

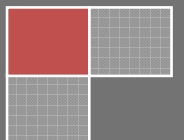
2010

Hormigón Estructural. Diseño por Estados Límites

(Parte I)

Versión enfocada al Código ACI 318 "Building Code Requirements for Structural
Concrete"

J. J. Hernández Santana
J. A. Hernández Caneiro



PRÓLOGO

En esta primera edición se recogen algunos apuntes que han sido redactados durante los últimos cursos por los autores, como complemento bibliográfico para el estudio de las asignaturas de Diseño de Hormigón Estructural, correspondientes al ciclo de formación especializada de los estudiantes de ingeniería civil, lo mismo en la CUJAE que en la UCLV. Comprendiendo que no es suficiente una formación enfocada sólo a los procedimientos de diseños regidos por los Reglamentos Normativos (procedimientos codificados), sujetos incluso a sistemáticas modificaciones en cualquier país, se ha decidido profundizar en los aspectos de comportamiento del hormigón y el acero, materiales básicos que definen la matriz del hormigón estructural, como principal garantía de una exitosa práctica profesional.

El Reglamento cubano para el diseño de estructuras de hormigón durante las últimas cuatro décadas ha seguido los patrones de la escuela europea y especialmente de España. El Código CEB – FIP (Comité Europeo del Hormigón y Federación Internacional de Pretensado), la Instrucción española EHE, y más recientemente el Eurocódigo, fueron referentes obligados en ese período, y continuarán siéndolo siempre. En consecuencia, la formación de los ingenieros civiles en Cuba, relativa a la práctica del diseño del hormigón armado y pretensado, se fundamentó en el desarrollo de modelos enfocados básicamente a estos Reglamentos. Los reconocidos aportes de los eminentes Profesores Francisco Medina Torri, Leonardo Ruiz Alejo, Manuel Babé Ruano, Ernesto Valdés Avellaneda, y algunos otros, se expresaron en interesantes textos y materiales complementarios con los enfoques de las escuelas europeas, que contribuyeron a la formación de numerosas generaciones de ingenieros civiles en el país, y que jamás perderán vigencia. En cada idea de este nuevo

intento hay mucho de todos ellos y sólo intentar alcanzarlos es una obra de gigantes. Cuánto hay del Dr. Ing. Valdés Avellaneda, quien hizo de la modelación del hormigón un arte y estableció una escuela que nos enseñó a todos a combinar ecuaciones con una buena práctica sin abandonar el sentido propio de la ingeniería.

Sin embargo, la reciente decisión del Comité Técnico de Normalización del Cálculo de Estructuras de Hormigón del Ministerio de la Construcción (MICONS), CTN 38, encaminada a la reorientación del Reglamento cubano hacia el Código normativo norteamericano ACI 318 “Building Code Requirements for Structural Concrete”, hizo ver la necesidad de actualizar la bibliografía docente existente para el estudio de las materias relacionadas con el hormigón, sobre todo con el interés de exponer los procedimientos de diseño bajo el enfoque de los artículos y disposiciones de este Reglamento. Ya desde la NC 207 “Requisitos Generales para el Diseño y Construcción de Estructuras de Hormigón”, Reglamento vigente en Cuba en el momento en que se redacta este libro, algunos de sus Capítulos incluyeron esta reorientación.

Por último, los autores desean expresar su más sincero agradecimiento a esos “hormigoneros” de siempre sin los cuales estos apuntes no habrían sido posibles. Esta recopilación también se debe a ellos. Si en cada estudiante que reciba este libro queda tan siquiera un poco de los procedimientos que aquí se exponen, bien valió la pena las intensas jornadas de digitalización y edición que ha requerido. A ellos principalmente va dirigido este trabajo, procurando asegurar la continuidad de la escuela cubana en esta interesante área del quehacer profesional.

Los autores

SEMBLANZA DE LOS AUTORES



Julio A. Hernández Caneiro, ingeniero civil, profesor titular (CUJAE) y doctor en Ciencias Técnicas. En la actualidad es Presidente de la Comisión Nacional de la Carrera de Ingeniería Civil en la República de Cuba y Vicepresidente del Tribunal Permanente de Construcciones e Hidráulica para la defensa de los Doctorados en Ciencias Técnicas. Ha participado en líneas de investigación asociadas a la Modelación de Estructuras, Análisis No Lineal, Normativas para el cálculo de hormigón armado y pretensado y Pedagogía en Educación Superior, y participado en entrenamientos en Alemania y el Instituto Eduardo Torroja, en Madrid, España. Es autor de un libro de texto para la Carrera de Ingeniería Civil, y ha publicado numerosos artículos técnicos sobre temas de hormigón en revistas nacionales e internacionales. Impartió cursos de posgrado y Maestría en Mozambique, Perú, Ecuador y Bolivia. Es miembro del Comité Técnico de Normalización No. 38 para el Cálculo de Estructuras de Hormigón (CONCEH) de la República de Cuba. Ha recibido numerosas condecoraciones por su actividad académica y actualmente representa a Cuba en el Grupo de Ingeniería Civil del Proyecto Tuning América Latina, vinculado al Programa ALFA de la Comisión Europea.



Juan José Hernández Santana, ingeniero civil, profesor titular (UCLV) y doctor en Ciencias Técnicas. En la actualidad es Vicerrector de la UCLV y se ha desempeñado como Decano de la Facultad de Construcciones en dicho centro. Ha participado en líneas de investigación asociadas a la Modelación y Proyectos de Estructuras, Normativas para el cálculo de hormigón armado y pretensado y dirigido proyectos sobre gestión universitaria y evaluación de la calidad en la Educación Superior. Es autor de dos libros para la Carrera de Ingeniería Civil, y ha publicado numerosos artículos técnicos sobre temas de hormigón en revistas nacionales e internacionales, así como sobre temas asociados a investigaciones pedagógicas. Impartió cursos de posgrado y Maestría en Nicaragua, Perú, Bolivia, Colombia y Honduras; y brindado asesoría en diseño curricular a universidades de Perú, Colombia y Bolivia; y formó parte como profesor del Doctorado Curricular “Formación del profesorado y desarrollo curricular en la educación superior” de la Universidad de Oviedo. Ha recibido numerosas condecoraciones por su actividad. Es Profesor Honorario de la Universidad “Ricardo Palma” en Perú.

TABLA DE CONTENIDO

EPÍGRAFE	CONTENIDO	Pág.
CAPÍTULO I: EL HORMIGÓN Y EL ACERO DE REFUERZO. EL HORMIGÓN ESTRUCTURAL. PROPIEDADES Y USO.		
1.1	Introducción	1
1.1.1	Tratamiento de las unidades bajo el sistema internacional (SI)	6
1.2	Propiedades del hormigón	12
1.2.1	El hormigón en estado fresco	12
1.2.2	El hormigón en estado endurecido. Principales características mecánicas	13
1.2.2.1	Tendencia de las curvas de comportamiento del hormigón a compresión uniaxial	13
1.2.2.2	Influencia de la velocidad de aplicación de la carga en la curva de comportamiento del hormigón	16
1.2.2.3	Influencia de la edad del hormigón ensayado en la curva de comportamiento	17
1.2.2.4	Influencia de la esbeltez y tipología de la probeta en la curva de comportamiento	19
1.2.2.5	Influencia en la curva de comportamiento de la relación agua/cemento	20
1.2.3	Leyes constitutivas para modelar el comportamiento del hormigón a compresión uniaxial	21
1.2.4	Resistencia característica del hormigón (f'_c)	29
1.2.5	Resistencia a tracción del hormigón	29
1.2.5.1	Caso de la tracción directa (f_{ct})	31
1.2.5.2	Caso de la tracción indirecta (f_r)	32
1.2.6	Módulo de deformación longitudinal	34
1.2.6.1	Módulo de deformación a compresión	34
1.2.6.2	Módulo de deformación a tracción	35
1.2.7	Coefficiente de Poisson del hormigón	35
1.2.8	Módulo de deformación transversal o módulo a cortante del hormigón	36
1.2.9	Influencia del tiempo en la resistencia del hormigón	36
1.3	La deformación del hormigón y los fenómenos dependientes del tiempo	37
1.3.1	La Fluencia del hormigón	37
1.3.2	La Retracción o Contracción del hormigón	43
1.4	Influencia de la temperatura en la resistencia del hormigón	47
1.5	Deformación total del hormigón	53

EPÍGRAFE	CONTENIDO	Pág.
1.6	<i>Propiedades del acero de refuerzo</i>	49
1.6.1	<i>Tipos de acero para el refuerzo del hormigón</i>	49
1.6.2	<i>Principales características mecánicas de los aceros de refuerzo</i>	50
1.6.3	<i>Diagramas tensión – deformación del acero de refuerzo</i>	50
1.6.3.1	<i>Diagrama tensión – deformación característico del acero natural</i>	51
1.6.3.2	<i>Diagrama tensión – deformación característico del acero sin escalón de fluencia</i>	52
1.6.4	<i>Características geométricas de las barras de acero de producción nacional</i>	54
1.6.5	<i>Características mecánicas de las barras de acero de producción nacional</i>	55
1.6.5.1	<i>Límite elástico aparente</i>	55
1.6.5.2	<i>Módulo de deformación</i>	56
1.6.5.3	<i>Aptitud del acero para el doblado</i>	56
1.6.6	<i>Propiedades físicas y químicas del acero de producción nacional</i>	56
1.7	<i>El hormigón estructural</i>	57
1.7.1	<i>Efecto del refuerzo en la fisuración</i>	57
1.7.2	<i>Efecto del hormigón sobre el refuerzo</i>	58
1.7.3	<i>Efecto de confinamiento del hormigón</i>	59
1.7.4	<i>Efecto del refuerzo en la retracción del hormigón</i>	61
1.7.5	<i>Efecto de la fluencia en el hormigón armado</i>	64
1.7.6	<i>Peso del hormigón armado</i>	66
1.7.7	<i>La adherencia</i>	66
	<i>Ejercicios Propuestos</i>	73
	<i>Bibliografía Consultada</i>	75
CAPÍTULO II: COMPORTAMIENTO DE SECCIONES DE HORMIGÓN ARMADO Y PRETENSADO ANTE SOLICITACIONES NORMALES		
2.1	<i>Introducción. Principios de Cálculo</i>	76
2.2	<i>Compatibilidad de las deformaciones a nivel de sección</i>	77
2.2.1	<i>Breve reseña para la comprensión del hormigón pretensado adherente</i>	78
2.2.2	<i>Estudio de la Tracción Axial</i>	80
2.2.2.1	<i>Compatibilidad de deformaciones en secciones de hormigón armado</i>	81
2.2.2.2	<i>Compatibilidad de deformaciones en secciones de hormigón pretensado</i>	81
2.2.3	<i>Estudio de la compresión axial</i>	83

EPÍGRAFE	CONTENIDO	Pág.
2.2.3.1	<i>Compatibilidad de deformaciones en secciones de hormigón armado</i>	83
2.2.3.2	<i>Compatibilidad de deformaciones en secciones de hormigón pretensado</i>	83
2.2.4	<i>Estudio de la Flexión Simple</i>	85
2.2.4.1	<i>Compatibilidad de deformaciones en secciones de hormigón armado</i>	87
2.2.4.2	<i>Compatibilidad de deformaciones en secciones de hormigón pretensado</i>	87
2.3	<i>Ecuaciones físicas del hormigón y el acero</i>	88
2.4	<i>Comportamiento de secciones frente a sollicitaciones normales</i>	88
2.5	<i>Caso de la tracción axial</i>	91
2.5.1	<i>Tensor de hormigón armado</i>	92
2.5.2	<i>Tensor de hormigón pretensado</i>	100
2.6	<i>Caso de la compresión axial</i>	108
2.6.1	<i>Columnas de hormigón armado</i>	108
2.6.2	<i>Columnas de hormigón pretensado</i>	112
2.7	<i>Comportamiento de secciones sometidas a flexión</i>	116
2.7.1	<i>Solución general de las ecuaciones de equilibrio</i>	117
2.7.2	<i>Transformación de leyes σ'_c vs ϵ'_c no lineales del hormigón en un diagrama rectangular equivalente</i>	125
2.7.2.1	<i>Análisis de la transformación en el caso de secciones rectangulares</i>	127
2.7.2.2	<i>Análisis de la transformación en el caso de secciones triangulares</i>	135
2.7.2.3	<i>Tratamiento de la sección T ó I mediante el diagrama rectangular equivalente</i>	137
2.7.2.4	<i>Tratamiento de la sección trapezoidal mediante el diagrama rectangular</i>	139
2.7.3	<i>Curvas de comportamiento de secciones de hormigón armado</i>	140
2.7.4	<i>Comparación de diferentes diagramas tenso deformacionales del hormigón</i>	147
2.7.5	<i>Curvas de comportamiento simplificadas. Caso del hormigón armado</i>	150
2.7.6	<i>Concepto de Ductilidad. Fallo Balanceado</i>	154
2.7.7	<i>Variación de la cuantía de refuerzo. Efecto del acero a compresión</i>	160
2.7.8	<i>Curvas de comportamiento de secciones de hormigón pretensado</i>	168
2.7.8.1	<i>Influencia de la resistencia a tracción del hormigón</i>	181
2.7.8.2	<i>Curvas de comportamiento simplificadas. Caso del hormigón pretensado</i>	184
2.7.8.3	<i>Aporte del acero ordinario</i>	194

EPÍGRAFE	CONTENIDO	Pág.
2.7.8.4	<i>Aporte de la deformación previa del pretensado (ϵ_{po})</i>	195
2.8	<i>Hipótesis derivadas del comportamiento para el estudio de los estados de resistencia última</i>	196
	<i>Ejercicios Propuestos</i>	197
	<i>Bibliografía Consultada</i>	201
CAPÍTULO III: LA SEGURIDAD EN EL DISEÑO ESTRUCTURAL		
3.1	<i>Introducción</i>	202
3.1.1	<i>Factores de incertidumbre</i>	205
3.1.2	<i>Probabilidad de ocurrencia del fallo</i>	206
3.1.3	<i>El factor de seguridad</i>	207
3.2	<i>Diferentes métodos para medir la seguridad</i>	209
3.2.1	<i>Tensiones Admisibles</i>	209
3.2.2	<i>Rotura</i>	212
3.2.3	<i>Estados Límites</i>	214
3.2.4	<i>Métodos probabilísticos. Teoría Seguridad</i>	220
3.3	<i>La seguridad en el ACI</i>	225
3.3.1	<i>Tratamiento de la resistencia del hormigón</i>	226
3.3.2	<i>Los factores de carga</i>	231
3.3.3	<i>El Factor de reducción de la resistencia</i>	233
3.3.4	<i>Factor de seguridad global del ACI</i>	238
3.3.5	<i>La seguridad dentro de la etapa de servicio</i>	239
3.4	<i>La combinación pésima</i>	240
	<i>Ejercicios Propuestos</i>	249
	<i>Referencias Bibliográficas</i>	251
CAPÍTULO IV: SOLICITACIONES NORMALES. GENERALIDADES. ESTUDIO DE LA FLEXIÓN		
4.1	<i>Introducción</i>	252
4.2	<i>Principios generales para el análisis de secciones sometidas a esfuerzos normales</i>	252
4.2.1	<i>Hipótesis básicas</i>	253
4.2.2	<i>Diagrama de Dominios.</i>	259
4.2.3	<i>Ecuaciones de compatibilidad de las deformaciones dentro de cada Dominio.</i>	262
4.3	<i>Fallo balanceado. Cuantía balanceada.</i>	265

EPÍGRAFE	CONTENIDO	Pág.
4.4	Fallo por tracción controlada. Profundidad de la línea neutra en la frontera	266
4.5	Solución general para sección rectangular	267
4.6	Recomendaciones de diseño	271
4.7	Comprobación de secciones	275
4.8	Diseño de secciones	283
4.8.1	Algunas consideraciones sobre el refuerzo a compresión	283
4.8.2	Diseño libre	286
4.8.3	Diseño con peralte prefijado.	290
4.9	Secciones T	298
4.9.1	Ancho efectivo del ala	299
4.9.2	Ecuaciones generales	300
4.9.3	Comprobación de secciones T	302
4.9.4	Diseño de secciones T	304
4.10	El método unificado de Ernesto Valdés	311
4.11	Flexión esviada	314
4.11.1	Ecuaciones generales para secciones rectangulares	315
4.11.2	Aporte del hormigón	316
4.11.3	Aporte del refuerzo	316
4.11.4	Solución técnica	317
	Ejercicios Propuestos	322
	Referencias Bibliográficas	326
CAPÍTULO V: EL ESFUERZO TANGENCIAL DE CORTANTE		
5.1	Introducción	327
5.2	El concepto de esfuerzos cortante	327
5.3	Mecanismo de resistencia a cortante sin refuerzos en el alma	329
5.3.1	La formación de grietas	329
5.3.2	Equilibrio a cortante	332
5.3.3	Mecanismo para la resistencia a cortante	332
5.3.4	Mecanismo de fallo	334
5.4	Aporte resistente del hormigón a cortante en vigas	336
5.4.1	Expresiones del ACI para elementos de Hormigón Armado	336
5.4.2	Expresiones del ACI para elementos de Hormigón Pretensado	337

EPÍGRAFE	CONTENIDO	Pág.
5.4.3	<i>Influencia de la carga axial</i>	340
5.5	<i>Mecanismo de resistencia a cortante con refuerzos en el alma. Aporte del refuerzo transversal</i>	341
5.5.1	<i>Analogía de la armadura</i>	342
5.5.2	<i>Método del ACI</i>	343
5.6	<i>Comprobación de secciones a cortante</i>	344
5.7	<i>Recomendaciones de diseño y construcción</i>	348
5.8	<i>Área total de refuerzo. Distribución.</i>	351
5.9	<i>Diseño por cortante</i>	354
5.10	<i>Vigas de peralte variable</i>	366
5.11	<i>Cortante de fricción.</i>	374
5.12	<i>Resistencia al cortante en secciones compuestas</i>	378
	<i>Ejercicios Propuestos</i>	384
	<i>Referencias Bibliográficas</i>	387

CAPÍTULO VI: EL ESFUERZO TANGENCIAL DE TORSIÓN

6.1	<i>Comportamiento de secciones a torsión</i>	388
6.1.1	<i>Tubos de paredes delgadas en torsión</i>	388
6.1.2	<i>Comportamiento antes de la fisuración. Torsión en régimen elástico</i>	390
6.1.3	<i>Comportamiento después de la fisuración</i>	392
6.1.4	<i>Ecuaciones de compatibilidad</i>	395
6.2	<i>Diseño de secciones de Hormigón Armado a torsión. Enfoque del ACI</i>	402
6.2.1	<i>Efecto de la torsión en elementos de Hormigón Armado</i>	402
6.2.2	<i>Torsión crítica. Elementos no fisurados.</i>	404
6.2.3	<i>Torsión en secciones fisurados.</i>	405
6.2.4	<i>Recomendaciones de diseño.</i>	408
	<i>Ejercicios Propuestos</i>	425
	<i>Referencias Bibliográficas</i>	426

CAPÍTULO VII: ESTADOS LÍMITES DE UTILIZACIÓN

7.1	<i>Introducción</i>	427
7.1.1	<i>Momento de fisuración</i>	428
7.1.2	<i>Sección fisurada</i>	430
7.2	<i>Fisuración</i>	433

EPÍGRAFE	CONTENIDO	Pág.
7.2.1	<i>Estados Límites de Fisuración</i>	434
7.2.2	<i>Factores influyentes en la fisuración</i>	436
7.2.3	<i>Cálculo de la abertura Fisuras</i>	440
7.2.4	<i>Disposiciones del ACI 318-99 para el chequeo de la fisuración</i>	444
7.3	<i>Deformación</i>	449
7.3.1	<i>Control de flechas</i>	450
7.3.2	<i>Flechas permisibles</i>	450
7.3.3	<i>Flechas Instantáneas</i>	452
7.3.4	<i>Rigidez efectiva de la sección fisurada.</i>	452
7.3.5	<i>Flechas diferidas</i>	454
7.3.6	<i>Flecha Total</i>	455
7.3.7	<i>Análisis de variables</i>	458
	<i>Ejercicios Propuestos</i>	461
	<i>Referencias Bibliográficas</i>	463
CAPÍTULO VIII: ADHERENCIA, ANCLAJE Y DISTRIBUCIÓN DEL REFUERZO		
8.1	<i>Introducción</i>	464
8.2	<i>Anclaje de las armaduras</i>	464
8.2.1	<i>Longitud de anclaje en barras traccionadas</i>	465
8.2.2	<i>Barras con anclajes curvos</i>	468
8.2.3	<i>Longitud de anclaje en barras comprimidas</i>	470
8.3	<i>Empalmes</i>	471
8.4	<i>Separación entre barras y recubrimiento</i>	472
8.5	<i>Paquetes o mazos de barras</i>	476
8.6	<i>Barras levantadas o dobladas</i>	476
8.7	<i>Corte de barras</i>	477
8.8	<i>Armadura de refuerzo en ángulo</i>	481
	<i>Ejercicios Propuestos</i>	488
	<i>Referencias Bibliográficas</i>	491
CAPÍTULO IX: VIGAS CONTINUAS		
9.1	<i>Introducción</i>	492
9.2	<i>Funciones y clasificación</i>	492
9.3	<i>Luz de cálculo</i>	492

EPÍGRAFE	CONTENIDO	Pág.
9.4	<i>Determinación de las cargas</i>	493
9.5	<i>Determinación de las solicitaciones elásticas</i>	494
9.6	<i>La Fluencia plástica en el Hormigón Armado</i>	494
9.7	<i>La redistribución de momentos</i>	498
9.8	<i>Limitaciones en la redistribución de momentos</i>	501
9.9	<i>Método Directo de Redistribución. Coeficientes plásticos para vigas continuas</i>	501
	<i>Ejercicios Propuestos</i>	537
	<i>Referencias Bibliográficas</i>	540

ANEXOS: AYUDAS DE CALCULO

TABLA A-1	<i>Áreas de barras de refuerzo</i>	542
TABLA A-2	<i>Valores de μ_r, ω_r, a/d y c/d para DOMINIOS 2 ó 3. FALLO DUCTIL.</i>	542
TABLA A-3	<i>Valores de μ_r, ω_r, a/d y c/d para DOMINIOS 4. FALLO FRAGIL.</i>	543
TABLA A-4	<i>Propiedades del área comprimida para flexión esviada</i>	544
TABLA A-5	<i>Valores del coeficiente K para vigas aisladas.</i>	545
TABLA A-6	<i>Longitud de anclaje l_d para barras o alambres en zonas de alta adherencia, sin revestimiento, colocadas en hormigón de peso normal</i>	547
TABLA A-7	<i>Número máximo de barras en una camada para vigas</i>	548
TABLA A-8	<i>Recubrimientos efectivos para barras de refuerzo en vigas.</i>	550
TABLA A-9	<i>Momentos flectores y fuerzas de corte de vigas continuas con tramos iguales</i>	551
TABLA A-10	<i>Factores de conversión para las unidades más comunes utilizadas en el diseño estructural</i>	553
TABLA A-11	<i>Equivalencia entre el sistema SI, el sistema mks, y el sistema inglés de las ecuaciones no homogéneas del Reglamento ACI 318</i>	554

CAPÍTULO 1

El hormigón y el acero de refuerzo. El hormigón estructural. Propiedades y uso

1.1 INTRODUCCIÓN

El hormigón¹, conocido también en algunas regiones de habla hispana como “concreto²” por su traducción del inglés, “*concrete*”, es un material artificial de origen pétreo que se obtiene de la mezcla cuidadosamente proporcionada de diferentes materiales en los que se incluyen, básicamente, áridos finos y gruesos (arena y grava de diferentes tamaños), un aglutinante³ (se estudiará en este curso el

¹ **Hormigón:** su raíz proviene del latín “formicus”, que significa fórmico o formáceo, es decir, susceptible de ser moldeado para darle la forma deseada.

² **Concreto:** proviene del término sajón “concrete”. Es sinónimo de concrecionado que significa acumulación de partículas unidas para formar un masa.

³ En Egipto empleaban yeso calcinado en sus construcciones.

En Grecia utilizaron calizas calcinadas.

En Roma molían cenizas volcánicas junto con cal viva. En Puteoli (hoy ciudad llamada Pozzuoli) se encontraba un depósito de estas cenizas, de ahí que a este cemento se le llamase cemento de puzolana o puzolánico.

En la Edad Media el empleo del hormigón como material estructural decayó al igual que su calidad.

Durante el Siglo XIX aparece el cemento artificial Portland de comprobado auge y desarrollo técnico; su nombre se debe a que el color del hormigón obtenido se parecía a la piedra natural de la zona de Portland (al sur de Inglaterra). Fue precisamente en este siglo que tienen lugar las primeras experiencias del hormigón armado.

En los comienzos del Siglo XX se realizan las primeras construcciones y publicaciones técnicas, así como las primeras normativas del hormigón armado.

hormigón obtenido a base de cemento Portland), agua, y en ocasiones algún aditivo⁴ o adición⁵ encargados de modificar favorablemente algunas de sus propiedades en estado fresco.

Quizá la mayor singularidad de este material artificial es la existencia en él de dos estados disímiles con propiedades diferentes en cada uno: inicialmente un **estado plástico fluido** que le permite adaptarse con facilidad a las diferentes formas de los moldes en que se vierte y, luego de endurecido, un **estado sólido** en el que se modifican sus propiedades. A causa de la baja resistencia que presenta a los esfuerzos de tracción debido a su origen pétreo, lo que quizá represente su principal debilidad, se embebe en su masa algún refuerzo (más frecuentemente acero) que obliga también a estudiar las propiedades de este segundo material.

El agua se añade a la mezcla con la finalidad de propiciar una reacción química con el cemento que proporcione una pasta que confiera el carácter aglutinante necesario como para unir las partículas de árido, tanto fino como grueso y, además, para garantizar una adecuada laborabilidad o manejabilidad, la suficiente como para facilitar su colocación en los moldes. Además la pasta es la encargada de rodear eficientemente al acero de refuerzo que se embebe en su masa. Una desproporción involuntaria de la relación entre la cantidad de agua añadida y de cemento puede convertirse en la peor de las causas de una baja resistencia mecánica del producto, o de una inadecuada manejabilidad. En definitiva la relación agua/cemento (a/c) se convierte en el principal parámetro que debe ser celosamente atendido en la proporción de la mezcla.

La clasificación más general que puede hacerse de este material es la siguiente⁶:

- ☞ **Hormigón Simple o en Masa:** se trata del hormigón que no posee refuerzo de acero o de otro tipo.
- ☞ **Hormigón Estructural:** se trata del hormigón reforzado. En este curso se estudiará el refuerzo en forma de barras de acero. Si el refuerzo es pasivo (tensión nula para carga exterior nula) se tratará del hormigón armado (*reinforced concrete*), y si el refuerzo es activo (deformado antes de la acción de las cargas externas): hormigón pretensado (*prestressed concrete*)

Existen sobradas evidencias para reconocer el carácter universal del hormigón como material de construcción, incluso desde épocas muy remotas, probablemente desde la misma antigüedad en Egipto. A su favor se reconocen **fortalezas** como su fácil adaptación a diferentes formas al presentar un estado

⁴ **Adición:** escorias, puzolanas, humo de sílice, cenizas volantes, etc., **que se añaden al cemento** durante su fabricación.

⁵ **Aditivo:** plastificantes, fluidificantes o superfluidificantes **que se añaden al hormigón** durante su fabricación.

⁶ La clasificación que se expone puede ser enriquecida con los siguientes otros tipos de hormigón: **Ciclópeo** (aquel cuyos áridos no pasan por un tamiz de 80mm de luz de malla, aunque normalmente exceden de 125mm. Se emplean generalmente en obras de gran volumen y en cimentaciones), **Ligero** (aquel que tiene una densidad comprendida entre 12y20 kN/m³. Son muy interesantes como aislante térmico y acústico, y especialmente para disminuir peso en las estructuras), **Celular** (con gas incorporado en su masa), **Mixto** (hormigón unido a perfiles metálicos), **Refractario** (hormigón con áridos de procedencia cerámica. Capaces de resistir una temperatura por encima 1000°C sin pérdida sensible de su resistencia)

inicial plástico y fluido; además, a excepción del cemento y las adiciones que puedan ser empleadas, el resto de los materiales que lo integran se extraen de canteras naturales que se ubican generalmente muy próximas al sitio de construcción y a costos relativamente bajos; su carácter pétreo le confiere una alta resistencia a la compresión y una probada aptitud, sobretodo en aquellos elementos en los que los esfuerzos internos son precisamente de compresión, que tienden a unir sus enlaces; su elevada resistencia a las altas temperaturas; a la abrasión, etc.

Sin embargo, su mismo origen pétreo le concede un elevado peso volumétrico y lo convierte en un material definitivamente frágil con una baja resistencia a la tracción (la resistencia media a la tracción es sólo del orden del 10% de su resistencia a la compresión), e inepto económicamente en elementos estructurales que se vean sometidos a fuertes esfuerzos de tracción en toda o gran parte de su sección transversal. Esta última, reconocida por muchos como su principal debilidad, hizo que en la segunda mitad del siglo XIX se propusiera una interesante solución a partir de la inclusión de barras de acero para contrarrestarla. El acero, material con mucha mayor resistencia a la tracción que el hormigón, se dispone esencialmente en aquellas zonas del elemento en las que aparecen los principales esfuerzos de tracción, dando lugar así al nuevo material llamado hormigón armado⁷.

No se debe entender el hormigón armado sólo como la combinación de hormigón y acero, es eso pero asegurando además que ese refuerzo de acero trabaje integrado al hormigón y para lograrlo debe encontrarse debidamente adherido a él. Si no se desarrolla esa adherencia entre ambos materiales, se modifica apreciablemente la forma conjunta de trabajo de ambos. La variante más generalizada para construir elementos estructurales con este nuevo material consiste, tecnológicamente hablando, en la colocación del refuerzo dentro de los moldes en la cantidad y posición que estipule el proyecto, luego se vacía el hormigón en dichos moldes y una vez endurecido se ha llegado al hormigón armado. El tipo de refuerzo usualmente empleado corresponde a barras de acero de sección circular y debidamente ancladas, cuya superficie puede ser lisa aunque preferiblemente deformada (corrugada) para mejorar la adherencia. El acero se coloca sin tensión previa alguna, es decir, mientras el elemento no entre en carga, e ignorando por ahora fenómenos como la contracción o retracción que tiene lugar en el hormigón durante el proceso de fraguado, la deformación en estas barras es nula; la barra es hasta entonces pasiva. Se ha reproducido así un material que mejora las debilidades de sus matrices (hormigón y acero) por separado⁸, favoreciendo sus ilimitadas posibilidades de uso en edificaciones, depósitos, puentes y en ocasiones hasta en pavimentos.

⁷ En algunos países de habla hispana se conoce como hormigón reforzado y en otros como concreto reforzado. Se reconoce a los franceses Monier y Coignet como los pioneros del hormigón armado, quienes en 1861 ofrecieron diversos criterios para la fabricación de diferentes elementos con el empleo de este novedoso material para la época: tubos, vigas, bóvedas, etc.

⁸ Sólo para ilustrar esta aseveración se citan los siguientes ejemplos: el hormigón simple presenta una baja resistencia a la tracción, sin embargo, al disponer armadura de acero en el interior de su masa, se atenúa apreciablemente esta debilidad y se incrementa la capacidad de carga del elemento. Por otro lado el acero presenta una elevada resistencia lo mismo a la tracción que a la compresión, pero sometido a este último tipo de esfuerzo es ávido a perder la estabilidad a causa de la elevada relación entre la longitud de la barra y su diámetro. Embebido en la masa de hormigón y endurecido este, la posibilidad de perder la estabilidad se reduce significativamente.

Sin embargo, su elevado peso limitó sus posibilidades en estructuras de grandes luces o sometidas a grandes cargas, sobre todo por el incremento de las deflexiones y la multiplicación de las grietas que tienen lugar bajo los efectos de la tracción, que no sólo comprometen los parámetros estéticos de cualquier estructura, sino que también incrementan la exposición de las armaduras a la corrosión por humedad u otras causas. Una vez más el ingenio humano es puesto a prueba y ya desde finales del siglo XIX, y con mayor intensidad dentro de las primeras décadas del siglo XX, con la aparición en el mercado de aceros de muy alta resistencia, surge la idea de precomprimir el hormigón, es decir, del preesfuerzo⁹.

La idea consiste en deformar la armadura de acero (conformada usualmente por alambres, cables o incluso barras), mediante un proceso de estiramiento mecánico, y luego de alcanzada la tensión que estipule el proyecto, esta armadura debe anclarse adecuadamente para mantener dicho nivel de tensión. Este proceso se realiza previo a la acción de las cargas externas y de ahí que el acero esté activado (traccionado), incluso, cuando estas no existan. Una vez endurecido el hormigón y trasferida a él la tensión del acero, tendrían las acciones externas que descomprimirlo primero para luego dejar abierta la posibilidad de su agrietamiento, lo que suele ocurrir para niveles de carga sensiblemente superiores a los correspondientes al hormigón armado. Este es el principio básico del hormigón pretensado y atendiendo al momento en que se deforma (estira) la armadura respecto del momento en que se vacía el hormigón, se estaría tratando del pretesado o el postesado. En definitiva el preesfuerzo reduce apreciablemente las deflexiones (flechas) y puede llegar a atenuar en el nivel que se desee, las grietas en el hormigón. Es un material muy intuitivo que ha permitido extender los rangos de luces en que puede emplearse el hormigón, y sobre todo en estructuras cuya función exija una probada estanqueidad.

Como el curso trata del hormigón estructural (lo mismo armado -H^oA^o- que pretensado H^oP^o), se justifica el estudio de las propiedades del hormigón, especialmente las que corresponden al estado sólido de este material, y también las del acero de refuerzo (natural u ordinario para el hormigón armado, y de alto límite elástico para el pretensado). El conocimiento consciente de estas propiedades se vuelve cada vez más necesario si se desea comprender las razones que justifican los modelos analíticos que se utilizan hoy para el diseño de elementos ejecutados con este material. Cuando no existían las condiciones objetivas para el estudio del comportamiento del hormigón y del acero, especialmente por no contar con laboratorios e instrumentales capaces de permitir hacer lo que hoy se hace, la intuición auxilió al cálculo estructural y los modelos procuraron predecir, con cierta confianza, lo que estaría aconteciendo bajo el efecto de las cargas.

Algunas predicciones eran certeras, sobretodo en cuanto a la seguridad estructural, porque los modelos eran realmente conservadores, pero otras lo fueron tan poco que llegaron a modificar algunas reglas que la propia intuición dictaba. La inmensa mayoría de los fenómenos de carácter reológicos como la **fluencia**¹⁰, la **retracción**¹¹, la **fatiga**, la **relajación** del acero, etc., exigieron estudios más

⁹ En Cuba y en otros países se conoce con el nombre genérico de **hormigón pretensado**, que puede ser pretesado o postesado. Su principal singularidad es que, a diferencia del hormigón armado, la armadura de acero se deforma (estira) antes que las cargas exteriores actúen, por eso se reconoce como hormigón con armadura activa.

¹⁰ En algunos países se le llama **cedencia**, mientras que inglés una de sus denominaciones es "**yield**", de ahí que para identificar el límite de fluencia del acero (tensión a la cual se estima la entrada en fluencia de este material), se utilice el término f_y .

minuciosos para mejorar la comprensión acerca de por qué los materiales modificaban sus propiedades con el tiempo. Hoy se interpreta mejor la razón por la cual una viga que sufre una deflexión instantánea y natural cuando se le somete a carga, ve incrementada su deformación inicial con el paso del tiempo, sin necesidad de que la carga incremente su magnitud. Lo mismo sucedió en los inicios mismos del pretensado cuando poco se conocía de las pérdidas de tensión que tienen lugar en el acero.

Estas argumentaciones quizás contribuyan a comprender la razón de abrir siempre un espacio al estudio de las propiedades del hormigón y del acero de refuerzo cuando se intente modelar el comportamiento del hormigón armado o pretensado. Algunas realizaciones interesantes con hormigón estructural se muestran en el montaje de fotos que a continuación se expone.



Foto 1 Edificio que ocupa la Facultad de Ingeniería Civil del Instituto Superior Politécnico de La Habana (ISPJAE).



Foto 2 Solución de entrepiso y cubierta del sistema de edificaciones empleado en la CUJAE. Se trata de un entramado de vigas y diafragmas monolíticos sobre los que se vacía la carpeta.



Foto 3 Escalera helicoidal ubicada en uno de los edificios de la Universidad de Ciencias Informáticas.



Foto 4 Viaducto Millau, situado en el sudeste de Francia. Desafiando las leyes de la física, es una colosal obra de ingeniería que incluso supera en altura a la célebre Torre Eiffel. Discurre a 245 metros del suelo, pesa 400 000 toneladas, resiste vientos de 210 kilómetros por hora y costó casi 300 millones de euros.

¹¹ Se conoce también como **contracción**.

1.1.1 TRATAMIENTO DE LAS UNIDADES BAJO EL SISTEMA INTERNACIONAL (SI)

Desde principio de los años 80 del siglo XX, en Cuba se convirtió en ley el empleo de lo normado por el Sistema Internacional de Unidades (SI), lo mismo para las actividades productivas, docentes que científicas. Desde entonces constituye práctica común emplear dicho sistema en la enseñanza de la ingeniería civil, y más específicamente en el diseño estructural.

No obstante esta larga experiencia de aproximadamente 30 años, el empleo de este sistema de unidades continúa representando una fuente de confusión y errores para los estudiantes a todos los niveles, que conducen en no pocas ocasiones a soluciones totalmente erradas que niegan el sentido físico del resultado alcanzado. Esta realidad fue predicha por el eminente Profesor Manuel Babé Ruano cuando introdujo el SI en la docencia de las Carreras de Ingeniería Civil y Arquitectura, y la atribuía a confusiones que surgen con varias de sus unidades básicas. Ejemplificaba su percepción con el Pascal (Pa) como unidad de medida lo mismo de la presión (fuerza por unidad de área), y del esfuerzo o tensión. Argumentaba el Profesor Babé que al usar el (Pa) se perdía el concepto mecánico de la tensión como media de fuerza por unidad de área, al no quedar expresado de forma explícita la tensión en estas unidades. Se pueden comprender fácilmente como unidades de tensión lo mismo la lb/plg^2 , que el kg/cm^2 , sin embargo expresarla en Pa exige el conocimiento previo de su definición. La importancia cardinal que posee el tratamiento correcto de las unidades durante el cálculo estructural ha impulsado a los autores a dedicar unas breves notas desde la misma Introducción del texto, acerca del tratamiento de las unidades y su aplicación dentro del campo del diseño estructural.

Magnitudes físicas tan recurrentes en las expresiones de diseño como la **longitud** (asociadas, por ejemplo, a las dimensiones de una pieza, lo mismo en sección que en longitud), la **carga** (vistas como fuerza por unidad de longitud o de superficie), la **tensión** (definida como la razón Fuerza/Superficie), etc., pueden tratarse de manera diferente de un sistema a otro de unidades. A continuación se exponen los detalles de las unidades dentro del SI, sólo para las tres magnitudes físicas que fueron señaladas anteriormente.

- (A) Para la **longitud** las unidades básicas son el milímetro y el metro, denotadas como (mm) y (m), respectivamente. Se derivan de ellas el siguiente:

Magnitud	Nombre de la Unidad	Símbolo	Valor
LONGITUD	micrómetro	μm	$10^{-6}m$
	milímetro	mm	$10^{-3}m$
	centímetro	cm	$10^{-2}m$
	decímetro	dm	$10^{-1}m$
	metro	m	10^0m
	decámetro	dam	$10m$
	hectómetro	hm	10^2m
	kilómetro	km	10^3m
	mega metro	Mm	10^6m

El (mm) se prefiere emplear para designar las dimensiones de las secciones transversales que se diseñan, los espesores, el diámetro de las barras, etc., mientras que el (m) para la luz o longitud entre apoyos de la pieza, longitudes de columnas, etc.

- (B) Para la **fuerza** la unidad básica es el Newton, denotado como (*N*), de la que se deriva el siguiente conjunto de prefijos:

Magnitud	Nombre de la Unidad	Símbolo	Valor
	micronewton	μN	$10^{-6} N$
	milinewton	mN	$10^{-3} N$
	centinewton	cN	$10^{-2} N$
	decinewton	dN	$10^{-1} N$
FUERZA	newton	<i>N</i>	$1N = 1kg \cdot m/s^2$
	decanewton	daN	$10N$
	hectonewton	hN	$10^2 N$
	kilonewton	kN	$10^3 N$
	meganewton	MN	$10^6 N$

En el diseño estructural y la construcción son el *N* y el *kN* las más empleadas y recomendadas.

- (C) Para la **presión**, **esfuerzo** o **tensión** la unidad básica es el Pascal (*Pa*), y se derivan de ella el siguiente conjunto de prefijos:

MAGNITUD	Nombre de la Unidad	Símbolo	Valor
	pascal	<i>Pa</i>	$1Pa = 1N/m^2$
PRESIÓN, ESFUERZO, TENSIÓN	decapascal	$daPa$	$10Pa$
	hectopascal	hPa	$10^2 Pa$
	kilopascal	kPa	$10^3 Pa$
	megapascal	MPa	$10^6 Pa$
	gigapascal	GPa	$10^9 Pa$

Siendo la unidad de mas amplio uso en el diseño estructural el megapascal (*MPa*), y en menor medida el *Pa* y el *kPa*. El *MPa* puede expresarse de diferentes formas cuando se refiera a la tensión de trabajo del material (hormigón y acero) en las ecuaciones de equilibrio escrito a nivel de sección transversal:

$$1MPa = 1N/mm^2 = 1MN/m^2 = 10^3 kN/m^2 = 10^{-1} kN/cm^2$$

El tratamiento de estas unidades ofrece varias alternativas de solución a un mismo problema planteado, en las que influye mucho la percepción del calculista sobre cada una de ellas. Por ejemplo al evaluar el esfuerzo normal ($\sigma = P/A$) originado por una fuerza $P = 1\,000kN$, que actúa sobre una sección de superficie $A = 4\,000mm^2$, se puede proceder de diferentes formas, a saber:

- Respetando las unidades originales de los datos:

$$\sigma = \frac{1\,000kN}{4\,000mm^2} = 0,25 kN/mm^2 = 250 N/mm^2 = \mathbf{250 MPa}$$

- Expresando el área en cm^2

$$\begin{aligned} \sigma &= \frac{1\,000kN}{40cm^2} = 25 kN/cm^2 = 25 \cdot \frac{10^3 N}{(10mm)^2} = 25 \cdot \frac{10^3}{10^2} N/mm^2 = 250 N/mm^2 \\ &= \mathbf{250 MPa} \end{aligned}$$

- Expresando el área en m^2

$$\sigma = \frac{1\,000\text{ kN}}{4 \cdot 10^{-3}\text{ m}^2} = 250 \cdot 10^{-3} \text{ kN/m}^2 = 250 \text{ N/mm}^2 = \mathbf{250 \text{ MPa}}$$

Obsérvese que independientemente de la unidad en la que se sustituya el área, siempre es posible expresar el valor buscado de tensión en **MPa**, que resulta ser la unidad recomendada para esta magnitud física.

Lo mismo sucede si se procura calcular el momento de la fuerza resultante de un volumen de tensiones normales uniformes de magnitud $\sigma = 250\text{ MPa}$, actuando sobre una sección de área $A = 4\,000\text{ mm}^2$, si la distancia de dicha fuerza (brazo) al punto del plano respecto del cual se desea evaluar el momento es $z = 300\text{ mm}$.

Conociendo que:

$$M = F \cdot z = (\sigma \cdot A) \cdot z$$

Entonces:

- Respetando las unidades originales de los datos:

$$\begin{aligned} M &= (250\text{ MPa})(4\,000\text{ mm}^2)(300\text{ mm}) = \left(250 \frac{\text{N}}{\text{mm}^2}\right)(4\,000\text{ mm}^2)(300\text{ mm}) \\ \therefore M &= 300\,000\,000 \text{ N} \cdot \text{mm} = 300 \cdot 10^6 \text{ N} \cdot \text{mm} = 300 \cdot 10^6 (10^{-3}\text{ kN})(10^{-3}\text{ m}) = \\ &\mathbf{300\text{ kN} \cdot \text{m}} \end{aligned}$$

- Expresando el área en (cm^2) y el brazo en (cm)

$$\begin{aligned} M &= (250\text{ MPa})(40\text{ cm}^2)(30\text{ cm}) = \left(250 \frac{\text{N}}{\text{mm}^2}\right)(40\text{ cm}^2)(30\text{ cm}) \\ M &= \left[250 \frac{10^{-3}\text{ kN}}{(10^{-1})^2\text{ cm}^2}\right](40\text{ cm}^2)(30\text{ cm}) = 25 \frac{\text{kN}}{\text{cm}^2}(40\text{ cm}^2)(30\text{ cm}) = 300 \cdot 10^2 \text{ kN} \cdot \text{cm} \\ \therefore M &= 300 \cdot 10^2 \text{ kN}(10^{-2}\text{ m}) = \mathbf{300\text{ kN} \cdot \text{m}} \end{aligned}$$

- Expresando el área en (m^2) y el brazo en (m)

$$\begin{aligned} M &= (250\text{ MPa})(4 \cdot 10^{-3}\text{ m}^2)(0.30\text{ m}) = \left(250 \frac{\text{N}}{\text{mm}^2}\right)(4 \cdot 10^{-3}\text{ m}^2)(0.30\text{ m}) \\ M &= \left[250 \frac{10^{-3}\text{ kN}}{(10^{-3})^2\text{ m}^2}\right](4 \cdot 10^{-3}\text{ m}^2)(0.30\text{ m}) = 250 \cdot 10^3 \frac{\text{kN}}{\text{m}^2}(4 \cdot 10^{-3}\text{ m}^2)(0.30\text{ m}) \\ \therefore M &= \mathbf{300\text{ kN} \cdot \text{m}} \end{aligned}$$

Hasta aquí el análisis carece de complejidad alguna porque se han tratado las variables como unidades métricas dentro del llamado Sistema Internacional de Unidades (SI); ¿Cuál ha sido la mejor forma de hacerlo? ¿Qué procedimiento resulta más sencillo y esclarecedor? Partiendo de que lo más común es expresar los esfuerzos en **MPa**, las fuerzas en **kN** y los momentos en **kN · m**, la respuesta a estas interrogantes no es única, dependerá, como ya se expresó, de la percepción de cada calculista y de la magnitud física que se esté evaluando.

Sin embargo, un segundo elemento aflora cuando de unidades se trata. Para algunas generaciones de ingenieros cubanos quizá escuchar que la resistencia de un hormigón es de **28 MPa**, no le ofrece una información completa acerca de la calidad de dicho material, se trata de las generaciones de menos juventud. Para ellas **280 kg/cm²**, o incluso **4 000 lb/plg²** o lo que es igual **4 000 psi**, es más esclarecedor. Lo contrario sucedería a las generaciones más jóvenes.

La causa de esta realidad se debe en lo fundamental a que las primeras generaciones que se refirieron fueron formadas en el período pre revolucionario bajo el Sistema **USCS** (United States Customary System), y comenzaron a ejercer la profesión en el complejo y a la vez apasionante mundo del cálculo estructural, bajo las reglas de dicho Sistema. En la actualidad en los EE.UU, a pesar de la firma en 1975 de la “Ley de Conversión Métrica de 1975”, aun varios de sus documentos normativos y libros de textos de autores norteamericanos, continúan recurriendo al Sistema **USCS**, razón por la cual las más jóvenes generaciones de estudiantes y profesionales deben estar preparados para la correcta conversión de dicho Sistema, al Sistema Internacional de Unidades.

Sólo para graficar la importancia de esta aseveración, se deduce a continuación la expresión para evaluar la contribución del hormigón a esfuerzos de cortante (V_c) en el SI, a partir de la expresión que ofrece el ACI 318:2005 en su edición para el USCS. Para ello la **Tabla 1.1** ilustra algunas de las conversiones más frecuentes entre ambos Sistemas. En el **ANEXO A, tabla A-10** se completa esta, exponiendo las conversiones para las unidades más comunes en el diseño estructural, lo que puede contribuir a estos fines.

TABLA 1.1 Factores de conversión para algunas de las unidades más comunes utilizadas en el diseño estructural

MAGNITUD	SISTEMA MÉTRICO A USCS	USCS A SISTEMA MÉTRICO
MASA	$1 \text{ kg} = 2,204 \text{ 62 lb}$	$1 \text{ lb} = 0,453 \text{ 592 kg}$
DENSIDAD LINEAL	$1 \text{ kg/m} = 0,671 \text{ 969 lb/ft}$	$1 \text{ lb/ft} = 1,488 \text{ 16 kg/m}$
DENSIDAD SUPERFICIAL	$1 \text{ kg/m}^2 = 0,204 \text{ 816 lb/ft}^2$	$1 \text{ lb/ft}^2 = 4,822 \text{ 43 kg/m}^2$
DENSIDAD (MASA POR UNIDAD DE VOLUMEN)	$1 \text{ kg/m}^3 = 0,062 \text{ 428 lb/ft}^3$	$1 \text{ lb/ft}^3 = 16,018 \text{ 5 kg/m}^3$
FUERZA	$1 \text{ N} = 0,224 \text{ 809 lbf}$	$1 \text{ lbf} = 4,448 \text{ 22 N}$
MOMENTO DE UNA FUERZA	$1 \text{ N} \cdot \text{m} = 0,737 \text{ 562 lbf} \cdot \text{ft}$ $1 \text{ N} \cdot \text{m} = 8,850 \text{ 75 lbf} \cdot \text{in}$	$1 \text{ lbf} \cdot \text{ft} = 1,355 \text{ 82 N} \cdot \text{m}$ $1 \text{ lbf} \cdot \text{in} = 0,112 \text{ 985 N} \cdot \text{m}$
FUERZA POR UNIDAD DE LONGITUD	$1 \text{ N/m} = 0,068 \text{ 521 8 lbf/ft}$	$1 \text{ lbf/ft} = 14,593 \text{ 9 N/m}$
FUERZA POR UNIDAD DE SUPERFICIE, PRESIÓN, TENSIÓN	$1 \text{ MPa} = 145,038 \text{ lbf/in}^2$	$1 \text{ lbf/in}^2 = 0,006 \text{ 894 76 MPa}$

Plantea el ACI citado, en su Artículo 11.3.1.1, que para elementos sometidos a cortante y flexión solamente, la contribución del hormigón a cortante se determina mediante la expresión (USCS):

$$V_c = (2\sqrt{f'_c})b_w d : \begin{cases} V_c \rightarrow lb \\ f'_c \rightarrow lb/plg^2 \text{ ó } psi \\ b_w \rightarrow plg \\ d \rightarrow plg \end{cases}$$

Se trata de una expresión de las llamadas **no homogéneas** que merecen una atención especial, pues han sido obtenidas de forma experimental e incluyen coeficientes que ya contienen un tratamiento de las unidades. Son expresiones que vienen acompañadas de indicaciones terminantes acerca de las unidades en que deben ser sustituidas las variables que intervienen en ellas, las que se indican para este caso en la llave que aparece a la derecha de la expresión señalada. Por ejemplo, el tratamiento dimensional de la fórmula para evaluar V_c permite aseverar que se trata de una expresión empírica que considera como estimación que la resistencia del hormigón a cortante es proporcional a $2\sqrt{f'_c}$. En efecto, si se sustituye en la expresión cada término del miembro derecho en sus unidades genéricas (al margen de cualquier sistema de unidades), se comprueba que la unidad resultante no corresponde al de una Fuerza, como debía suceder, salvo que el coeficiente multiplicador 2 posea como unidad \sqrt{F}/L :

$$\begin{aligned} \text{Fuerza} &\stackrel{??}{=} \left(2\sqrt{F/L^2}\right)(L)(L) \\ \left(2\sqrt{F/L^2}\right)(L)(L) &= \left(2\frac{\sqrt{F}}{L}\right)(L^2) = 2\sqrt{F}L \neq F \end{aligned}$$

En estos casos, referido a las ecuaciones homogéneas, se debe ser muy cuidadoso al realizar la transformación, debiéndose proceder de la manera siguiente:

Como en el SI el término V_c debe expresarse en N (se trata de una fuerza), en la expresión que se desea transformar, la resistencia del hormigón (f'_c) se debe sustituir en MPa .

Aceptando que $1 \text{ lb/plg}^2 = 0,00689476 \text{ MPa} = 0,00689476 \text{ N/mm}^2$:

$$\begin{aligned} V_c &= (2\sqrt{0,00689476 f'_c})b_w d = (2\sqrt{0,00689476})\sqrt{f'_c}b_w d \\ &= (0,1660692\sqrt{f'_c})b_w d \\ \therefore V_c &\cong \left(\frac{\sqrt{f'_c}}{6}\right)b_w d : \begin{cases} V_c \rightarrow N \\ f'_c \rightarrow MPa \\ b_w \rightarrow mm \\ d \rightarrow mm \end{cases} \end{aligned}$$

Que coincide con la expresión que ofrece el propio Artículo 11.3.1.1 el ACI 318:2005 en su versión en español con el SI.

Un segundo ejemplo más esclarecedor es el que corresponde a la expresión incluida en el Artículo 11.3.1.2 que refiere la misma contribución del hormigón dentro del Sistema USCS, cuando se trata de elementos sometidos a Compresión, además de flexión y cortante. Esta expresión es la siguiente:

RAZÓN ADIMENSIONAL

$$V_c = 2 \left(1 + \frac{N_u}{2000A_g}\right) \sqrt{f'_c} b_w d : \begin{cases} V_c \rightarrow lb \\ N_u \rightarrow lb \\ A_g \rightarrow plg^2 \\ f'_c \rightarrow lb/plg^2 \text{ ó } psi \\ b_w \rightarrow plg \\ d \rightarrow plg \end{cases}$$

La razón $(N_u/2000A_g)$ tiene que ser adimensional porque está sumada a 1, que es adimensional. En consecuencia el coeficiente 2000 que aparece en él debe tener implícita como unidad, lb/plg^2 . En efecto:

$$\frac{N_u}{2000A_g} \rightarrow \frac{lb}{\left(\frac{lb}{plg^2}\right)plg^2} \Rightarrow \text{adimensional}$$

Ahora se debe expresar lb/plg^2 , como unidad implícita del coeficiente 2000, en MPa ó N/mm^2 :

$$1 \frac{lb}{plg^2} = 0,006\,894\,76\,MPa \Rightarrow 2000 \frac{lb}{plg^2} = 13,789\,52\,MPa \approx 14MPa$$

Y aprovechando la transformación que se realizara anteriormente, se concluye que la nueva expresión referida en el Artículo 11.3.1.2, escrita en el SI, se convierte en:

$$V_c = \left(1 + \frac{N_u}{14A_g}\right) \left(\frac{\sqrt{f'_c}}{6}\right) b_w d : \begin{cases} V_c \rightarrow N \\ N_u \rightarrow N \\ A_g \rightarrow mm^2 \\ f'_c \rightarrow N/mm^2 \text{ ó } MPa \\ b_w \rightarrow mm \\ d \rightarrow mm \end{cases}$$

Atendiendo a estas transformaciones el ACI 318:2005 en su versión para el SI¹², ofrece en su **Apéndice F** todas las expresiones de este tipo en diferentes sistemas de unidades, información que

¹² El **Sistema Internacional de Unidades** (SI) fue desarrollado por la Conferencia General de Pesas y Medidas (CGPM), la cual es una organización de tratado internacional. La abreviatura (SI), derivada del francés “Système International d’Unités”, se utiliza en todos los idiomas. El SI es un sistema de mediciones racional, coherente, internacional y preferido que se deriva de sistemas métricos decimales anteriores pero que los sustituye a todos ellos.

En los Estados Unidos de América el uso del sistema métrico fue legalizado por una Ley del Congreso en 1866, pero su uso no fue declarado obligatorio. El 23 de diciembre de 1975 el Presidente Ford firmó la Ley 94-168, “Ley Métrica de 1975”, declarando una política nacional para coordinar el creciente uso del sistema métrico en los Estados Unidos, y estableciendo una Junta Métrica Norteamericana para coordinar la conversión voluntaria al sistema métrico. La Ley específicamente define al sistema métrico como el “Sistema Internacional de Unidades según lo establecido por la Conferencia General de Pesas y Medidas de 1960, y según lo descripto o modificado para los Estados Unidos de América por el Secretario de Comercio”.

Desde 1960 el sistema se ha refinado, y los Estados Unidos tiene una oportunidad especial para cambiar y pasar del sistema USCS (United States Customary System) al sistema internacional más actualizado en un solo paso.

Dentro de la comunidad del diseño y la construcción la aplicación de las unidades del SI, junto con los valores numéricos preferidos, seguramente simplificará y acelerará los cálculos y facilitará todas las actividades de medición. Debido a que el SI es un sistema de unidades coherente que posee solamente una unidad para cualquier magnitud física, no hay necesidad alguna de realizar conversiones dentro del propio sistema, de una unidad a otra, como el caso de las pulgadas y los pies, las onzas y las libras, o los galones y los metros cúbicos. Al pasar al SI, la comunidad norteamericana relacionada con la construcción puede convertirse en líder dentro del universo de las construcciones métricas. (Tomado literalmente de NBS TECHNICAL NOTE 938 “Práctica recomendada para el uso de unidades métricas_SI_ en el diseño y construcción de edificios”. Hans J. Milton. Center for Building Technology. National Bureau of Standards. Washington, D.C. 20234)

constituye una guía inestimable para los calculistas. En el **ANEXO A, tabla A-11** se ofrece una versión sintetizada de este Apéndice con las expresiones más utilizadas en el texto.

La **Tabla 1.2** relaciona los prefijos preferidos durante el cálculo estructural. Los múltiplos y submúltiplos fuera del rango comprendido entre 10^{-6} (micro) y 10^6 (mega) son muy poco frecuentes.

TABLA 1.2 Múltiplos y submúltiplos preferidos en el diseño estructural

FACTOR DE MULTIPLICACIÓN	PREFIJO	
	Nombre	Símbolo
10^{12} ó 1 000 000 000 000	tera	<i>T</i>
10^9 ó 1 000 000 000	giga	<i>G</i>
10^6 ó 1 000 000	mega	<i>M</i>
10^3 ó 1 000	kilo	<i>k</i>
10^{-3} ó 0,001	mili	<i>m</i>
10^{-6} ó 0,000 001	micro	μ
10^{-9} ó 0,000 000 001	nano	<i>n</i>
10^{-12} ó 0,000 000 000 001	pico	<i>p</i>

1.2 PROPIEDADES DEL HORMIGÓN

1.2.1 EL HORMIGÓN EN ESTADO FRESCO

El estudio del hormigón en estado plástico o fluido no es objeto del texto, no obstante, se reitera la importancia de propiedades tales como su consistencia, laborabilidad, homogeneidad, densidad o peso específico, etc.

La **consistencia** refiere un índice de cuánto puede deformarse el hormigón en estado fresco y se puede evaluar mediante el Cono de Abraham, el consistómetro Vebe o mediante otras vías. Influyen en ella la cantidad de agua que se agrega a la mezcla, la forma y tamaño de los áridos, la granulometría misma de ellos, etc. Mientras tanto, la **laborabilidad** es un reflejo de la facilidad de colocación del hormigón en los moldes con o sin energía de compactación. Para mejorarla, sin la necesidad de incrementar la cantidad de agua que puede favorecer la indeseable permeabilidad futura del material, disminuir su consistencia en estas edades, y también la resistencia en la etapa endurecida, se pueden emplear ciertos productos ubicados en el mercado (plastificantes).

Por su parte la **homogeneidad**, referida a visión macro del material, es de apreciable interés en cualquier hormigón, y debe asegurarse mediante un adecuado transporte y colocación del material para evitar su segregación. La **densidad** depende fundamentalmente del tamaño máximo del árido que se emplee, del grado de compactación que se procure, y de si se incorpora o no aire a la mezcla durante su elaboración. En realidad las dispersiones de esta variable son pequeñas y en Cuba es habitual considerar en los cálculos para estimar la carga de peso propio una densidad de 23 kN/m^3 para hormigones en masa, de 24 kN/m^3 para hormigones colocados in situ y de 25 kN/m^3 para hormigones prefabricados, estos dos últimos valores para las cuantías de armado usualmente empleadas.

1.2.2 EL HORMIGÓN EN ESTADO ENDURECIDO. PRINCIPALES CARACTERÍSTICAS MECÁNICAS.

Se abordarán en lo fundamental aquellas propiedades y características del material que tienen que ver con su resistencia y deformación una vez que haya endurecido, de manera que se puedan establecer modelos que permitan inferir su comportamiento ante la acción de las cargas externas, lo mismo de carácter instantáneo que diferido. Se tratarán en lo fundamental las relaciones tensodeformacionales a compresión axial, la resistencia característica a compresión, la resistencia a tracción directa y a tracción por flexión o indirecta (módulo de rotura), su módulo de deformación lo mismo longitudinal que transversal, la influencia en la deformación de fenómenos reológicos o cronodependientes como la retracción, la fluencia, la temperatura, etc. Cuando haya que revelar patrones que intervienen directamente en los modelos analíticos para el cálculo estructural, se incluirán en el texto aquellos que se refieren en el Código ACI 318:2005 “*Building Code Requirements for Structural Concrete and Commentary*”¹³, en su versión para el SI, salvo que en el texto se señale algo diferente.

1.2.2.1 TENDENCIA DE LAS CURVAS DE COMPORTAMIENTO DEL HORMIGÓN A COMPRESIÓN UNIAXIAL.

Uno de los enigmas más investigados del hormigón ha sido la modelización y simulación de sus leyes tensodeformacionales a compresión uniaxial. Numerosos han sido los trabajos que se han desarrollado desde la primera mitad del siglo pasado, y antes de presentar y discutir sólo algunas de las propuestas que han marcado pautas en la comunidad científica desde entonces, se expondrán las cualidades más distintivas de estas leyes a partir de una relación σ'_c vs ϵ'_c típica para el hormigón sometido a compresión uniaxial, y que se ilustra en la **Figura 1.1**.

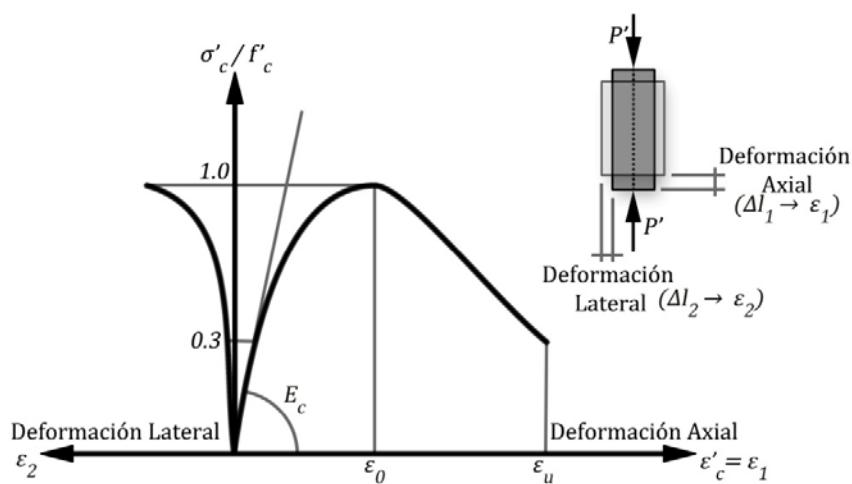


Figura 1.1 Ley típica tensión vs deformación axial y deformación lateral del hormigón sometido a compresión axial.

¹³ Se trata del Código Normativo norteamericano, y ACI es el acrónimo de “American Concrete Institute”. 318 es el Comité que dentro de este Instituto aborda y reglamenta los principios para el cálculo estructural de estructuras de hormigón armado y pretensado.

Sobran razones para comprender la conveniencia de generalizar el ensayo a **compresión uniaxial** cuando se desee profundizar en el estudio de las propiedades fundamentales del hormigón, y de ahí que el diagrama tensión - deformación que más se ha investigado de este material corresponde, precisamente, a esta sollicitación. A favor de este ensayo se pueden argumentar tres razones fundamentales: resulta el más sencillo de realizar en un laboratorio; el resto de las cualidades mecánicas del material se pueden expresar como una función de su resistencia a compresión (f'_c); y es además el principal indicador de la calidad del material y el parámetro por el que generalmente se comercializa, pues de él depende básicamente su costo.

Obsérvese en la **Figura 1.1** que la ley relacionada a la deformación axial es continua y presenta dos ramas fundamentales: una ascendente (entre la deformación nula, $\varepsilon'_c = 0$, y la deformación $\varepsilon'_c = \varepsilon_o$), y otra descendente (entre la deformación $\varepsilon'_c = \varepsilon_o$ y la deformación última $\varepsilon'_c = \varepsilon_u$); ambas convergen en una cresta a la que corresponde precisamente la deformación $\varepsilon'_c = \varepsilon_o$.

La rama ascendente presenta una respuesta prácticamente lineal hasta una tensión del orden del 30% de la máxima resistencia a compresión que se llega a alcanzar en el ensayo, es decir, para tensiones en el orden de $\sigma'_c \approx 0,30f'_c$, mientras que para tensiones que superen este límite comienza a desarrollarse un incremento gradual de la curvatura hasta tensiones próximas al intervalo $(0,75f'_c \leq \sigma'_c \leq 0,90f'_c)$, aproximadamente. A partir de este momento el incremento de la curvatura es más significativo hasta que se arriba al punto de máxima tensión f'_c .

Más allá de esta cresta el diagrama σ'_c vs ε'_c experimenta un descenso que llega a detenerse sólo cuando se origine el colapso por aplastamiento del hormigón ensayado, aunque en realidad la estimación exacta de esta rama descendente durante los ensayos es muy improbable pues con el incremento de la compresión el daño y degradación del material es progresivo, y caracterizado por la aparición de apreciables macrofisuras.

El perfil de la curva σ'_c vs ε'_c que se ilustra en el cuadrante derecho de la **Figura 1.1** permite interpretar bastante bien el mecanismo de formación y propagación de la microfisuración progresiva interna que tiene lugar en el hormigón.

En efecto, para tensiones σ'_c hasta $0,30f'_c$, existirán grietas microscópicas, fundamentalmente en la pasta de mortero, aunque la carga permanezca casi inalterada, es más, aunque no exista carga, lo que confirma que la energía interna disponible es menor que la energía requerida para crear una nueva superficie de microfisuras. La tensión correspondiente al valor $0,30f'_c$ ha sido propuesta como límite de elasticidad del hormigón por Kotsovos y Newman hacia 1977. Otros investigadores la extienden a valores entre $0,40f'_c$ y $0,45f'_c$.

Por otro lado, en el intervalo de tensión entre el 30% y el 50% de f'_c las fisuras comienzan a extenderse debido a la concentración de tensiones que tiene lugar en las puntas de cada grieta, mientras que las fisuras del mortero permanecen prácticamente inalterables hasta una fase de tensión más avanzada. En este intervalo la energía interna disponible es aproximadamente igual a la energía requerida para que la grieta se desarrolle. En estas condiciones la propagación de la fisuración es estable en el sentido de que las longitudes de la grieta se aproximan rápidamente a su valor final, si la carga llegara a permanecer constante.

Ya para tensiones entre el $(0,50f'_c)$ y el $(0,75f'_c)$ algunas fisuras próximas a la superficie del agregado comienzan a conectarse con las del mortero y al mismo tiempo otras continúan creciendo

lentamente. Si la carga se mantuviera constante las grietas continúan propagándose hasta alcanzar sus longitudes finales.

Para tensiones de compresión entre el $(0,75f'_c)$ y f'_c la mayoría de las grietas alcanzan su longitud final. La energía interna disponible es ahora mayor que la energía requerida y en consecuencia la propagación de las fisuras se manifiesta cada vez con mayor intensidad, conduciendo así a un sistema inestable que lleva a una ruptura completa del mecanismo descrito, a pesar de que la carga exterior se mantenga constante.

El fallo progresivo a tensiones próximas a f'_c es originado inicialmente por las microfisuras de la pasta de mortero, las que al unirse a las grietas que se originan en la superficie del agregado, dan lugar a una región interior de daño que es precisamente la que se encarga de estudiar la teoría del daño y la mecánica de la fractura. Cuando la tensión se incrementa, el daño del material continúa acumulándose y la curva tensión – deformación comienza a descender hasta que se hacen visibles las grietas (macrofisuras).

Hasta aquí una breve descripción del mecanismo de formación y propagación de la fisuración interpretado a partir de un ensayo bajo cargas monotónicas. Un estudio más amplio del comportamiento del hormigón bajo carga axial de compresión ha permitido establecer que el diagrama tensión - deformación difiere según se modifique uno cualquiera de los siguientes parámetros:

- La edad del hormigón en el instante en que se carga.
- La velocidad de aplicación de las cargas sobre la probeta de hormigón durante el ensayo.
- La velocidad con que se incrementan las deformaciones que sufre el hormigón.
- La calidad del hormigón.
- El tipo de probeta utilizada en el ensayo (cúbica, cilíndrica o prismática), y sus dimensiones.

Como la variación de alguno de los parámetros anteriormente señalados modifica la respuesta o comportamiento del material ante la carga (variabilidad del diagrama tensión-deformación), en teoría, cada vez que se procure diseñar un elemento habría que seleccionar el diagrama de comportamiento del hormigón que refiera las mismas o similares condiciones que las del mismo elemento durante su explotación, sus características geométricas y de cargas, etc., todo lo cual sería en extremo complejo y prácticamente inoperante. Sin embargo, las normas o códigos de diferentes países e instituciones, así como los diferentes autores han coincidido en simplificar este proceso tomando un grupo de parámetros y características de ensayos que unifican, y a la vez simplifican, la modelación de la respuesta del hormigón durante el cálculo, sin ceder en seguridad y racionalidad.

Al ensayar el cilindro de hormigón estándar a compresión axial (el rozamiento entre las caras de la probeta ensayada y los platos de la prensa que aplica la carga influirá lo mismo si se tratara de probetas cilíndricas, cúbicas o prismáticas), para cada escalón de carga aplicada ($\Delta P'$) durante el ensayo, se registra un acortamiento (Δl), sin embargo, resulta preferible representar la respuesta de este ensayo en términos de tensión y deformación, es decir, diagramas del tipo (σ'_c vs ϵ'_c), en lugar de sus análogos que refieren cargas y corrimientos (P' vs Δl).

Rasgos cardinales del diagrama de comportamiento:

- Se observa el carácter elástico - plástico del material, registrándose una respuesta cuasi elástica inicial para tensiones pequeñas, y luego una plastificación de las deformaciones.

En realidad el hormigón tiene un comportamiento no lineal en todo el rango de cargas aplicadas, sin embargo, para los fines prácticos, puede considerarse sensiblemente lineal siempre que las tensiones no sobrepasen del 30% ó 45% de la tensión máxima que se alcanza en el ensayo, es decir, dentro del rango de tensiones $0 < \sigma'_c \lesssim 0,45f'_c$ se puede aceptar una **respuesta elástica**, del tipo Hook ($\sigma'_c = E_c \varepsilon'_c$).

Esta consideración tendrá su repercusión a la hora de definir los modelos de análisis para el hormigón armado: modelos lineales para la etapa de servicio, mientras que modelos plásticos para el análisis próximo a los límites de resistencia. En algún caso, para hormigones de altas prestaciones y de hecho de mayores resistencias, el rango elástico puede ampliarse hasta el 60%.

2. A la tensión máxima corresponde generalmente una deformación longitudinal unitaria de 0,002, independientemente de la calidad del hormigón ensayado, es decir, $\varepsilon_o \approx 0,002$.
3. No es posible hablar de un único módulo de deformación longitudinal a compresión, y algunos Reglamentos distinguían tres módulos: el tangente inicial, el módulo secante y el módulo tangente a un punto de la curva, asociándolos a cargas instantáneas, de corta duración, y de acción prolongada, respectivamente.
4. Normalmente durante el ensayo se alcanza el colapso de la probeta a una tensión que es inferior al valor máximo que se llega a registrar, y a una deformación mayor que la que correspondió a la máxima tensión alcanzada. La rama descendente del comportamiento mucho depende de las características de la probeta y de la máquina de ensayo utilizada.

Para altas calidades de hormigón el diagrama σ'_c vs ε'_c tiende a ser más lineal que para uno de más baja calidad, en este último tiende a ser aplanado. La incidencia en el diagrama tensión – deformación de los factores anteriormente señalados, se comenta a continuación.

1.2.2.2 INFLUENCIA DE LA VELOCIDAD DE APLICACIÓN DE LA CARGA EN LA CURVA DE COMPORTAMIENTO DEL HORMIGÓN

Al ensayar 4 probetas realizadas todas con un hormigón proveniente de una misma amasada, pero empleando cuatro tiempos diferentes de aplicación de la carga durante el ensayo (0,04seg, 66seg, 1seg y 4112seg), si se graficaran los resultados, tomando como referencia los correspondientes al ensayo de 66seg, las curvas de comportamiento siguen una ley cualitativa como la que se ilustra en la **Figura 1.2**.

Se observa cómo al aumentar la velocidad de aplicación de la carga durante el ensayo, las deformaciones plásticas disminuyen y las curvas son más empinadas, a su vez la resistencia máxima que registra el ensayo se incrementa apreciablemente. Que las curvas sean más empinadas demuestra un incremento del módulo de deformación del material (lo que reconocían muchos reglamentos al declarar mayor módulo de deformación para cargas instantáneas que para cargas diferidas), además, que se incremente la resistencia para cargas de acción breve justifica que al estudiar la teoría de impacto se pueda suponer un incremento de la resistencia del hormigón.

En resumen, bajo cargas de acción rápida, el diagrama σ'_c vs ε'_c del hormigón tiene una pendiente más pronunciada, y bajo la acción de cargas sostenidas es más corto y menos empinado, es decir, bajo la acción de larga duración, la capacidad resistente disminuye y las deformaciones aumentan.

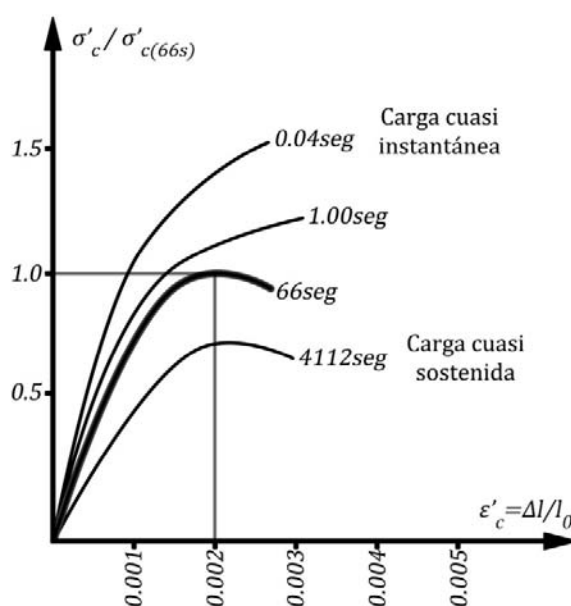


Figura 1.2 Influencia de la velocidad de aplicación de la carga en el ensayo a compresión de probetas de hormigón.

1.2.2.3 INFLUENCIA DE LA EDAD DEL HORMIGÓN ENSAYADO EN LA CURVA DE COMPORTAMIENTO

Al ensayar, por ejemplo, un hormigón de resistencia de diseño igual a 40MP, si este ensayo se realizara a los 3; 14; 28 y 84 días de construidas las probetas, las curvas de comportamiento que se obtienen siguen leyes del perfil mostrado en la **Figura 1.3**. Se observa que la deformación unitaria correspondiente a la máxima tensión continúa situándose alrededor de 0,002 en todos los casos, sin embargo, se evidencia que la tensión máxima que se alcanza es mayor cuanto mayor es la edad del hormigón en la puesta en carga, algo que algunos Reglamentos europeos reconocen por medio del coeficiente β_j sobre el que luego se regresará.

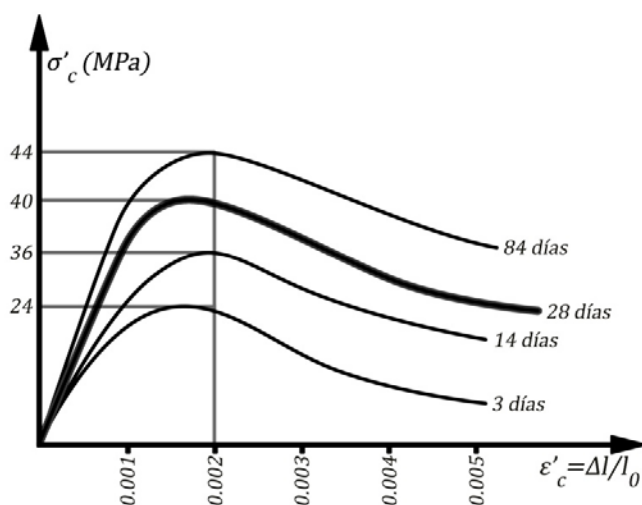


Figura 1.3 Influencia de la edad del hormigón a la hora del ensayo a compresión.

Como para diferentes edades de puesta en carga se registran en la probeta de hormigón diferentes resistencias, aun en hormigones de una misma amasada, las normas establecen que la edad del hormigón para definir su calidad, y de hecho su indicador de venta, sea 28 días. En los modelos analíticos se entenderá que el valor f'_c corresponde siempre a la resistencia reglamentada o característica, precisamente a esa edad.

No obstante, se pueden realizar ensayos a edades más tempranas (3, 7, 14 días) con el fin de predecir la resistencia a los 28 días. El investigador Petersons ofrece relaciones interesantes para estimar la resistencia del hormigón a diferentes edades, a partir del patrón correspondiente a los 28 días. Para hormigones elaborados con cementos normales su propuesta es la siguiente:

$$\begin{aligned} f'_{c(7\text{días})} &\approx 0,70f'_{c(28)} & f'_{c(14\text{días})} &\approx 0,88f'_{c(28)} & f'_{c(3\text{meses})} &\approx 1,12f'_{c(28)} \\ f'_{c(1\text{año})} &\approx 1,18f'_{c(28)} & f'_{c(>2\text{años})} &\approx 1,20f'_{c(28)} \end{aligned}$$

En diversos documentos técnicos se incluye el resultado de múltiples investigaciones que refieren la influencia de estos dos últimos factores, es decir, la **velocidad de aplicación de la carga** y la **edad del hormigón en el momento en que se carga**. La **Figura 1.4 (a)** ilustra el resultado de un ensayo a probetas de un hormigón de 28 días sometidas a cargas de compresión que se alcanzan en 2min, 20min, 100min, 7 días y varios meses ($t = \infty$); mientras que la **Figura 1.4 (b)** refiere el mismo ensayo, pero ahora para un hormigón de 1 año de edad en el momento del ensayo.

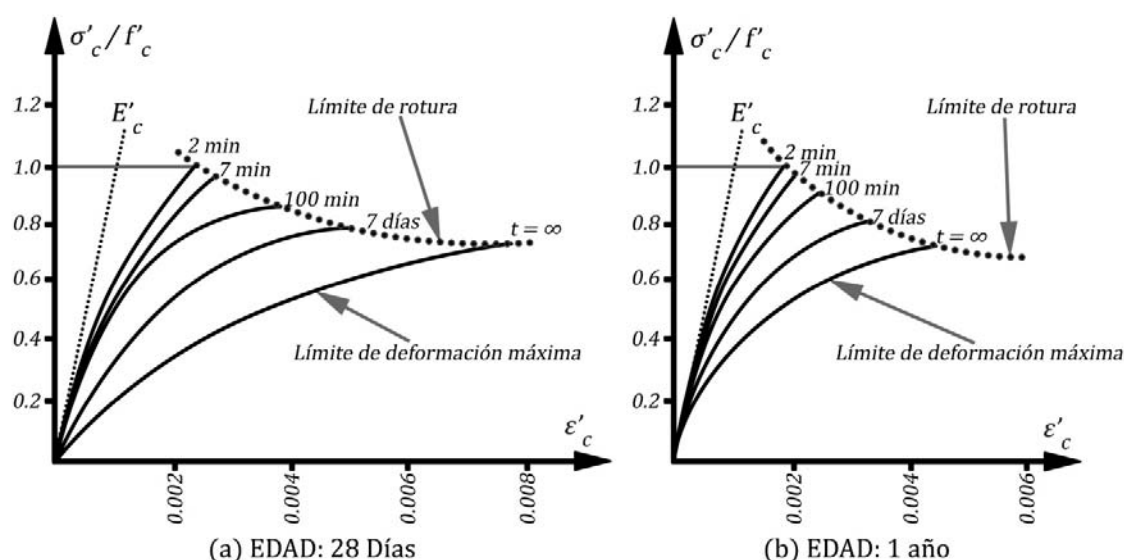


Figura 1.4 Influencia de la edad del hormigón y la velocidad de aplicación de la carga en el comportamiento a compresión.

Obsérvese cómo en el caso del ensayo a la edad de un año las curvas son más empinadas, denotando mayor rigidez y en consecuencia menor deformación. La velocidad de aplicación de la carga durante el ensayo se puede relacionar en la práctica con la acción sostenida de las cargas sobre la estructura real, justificándose la conveniencia de conocer sus efectos.

En su libro, Jiménez Montoya le llama a estos efectos cansancio del hormigón y su representación simplificada puede ser como se ilustra en la **Figura 1.5**.

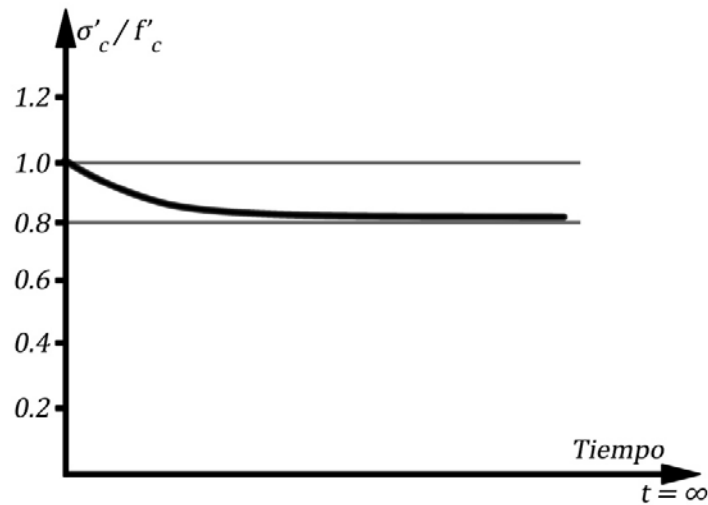


Figura 1.5 Reducción de la resistencia del hormigón por el efecto de carga sostenida.

1.2.2.4 INFLUENCIA DE LA ESBELTEZ Y TIPOLOGÍA DE LA PROBETA EN LA CURVA DE COMPORTAMIENTO

Aun cuando la influencia de la esbeltez de la probeta ensayada en la resistencia del hormigón se manifiesta de manera similar para diferentes tipologías de probeta, para el caso de la cilíndrica, que resulta ser la más estandarizada por los Reglamentos, el estudio confirma cómo para una esbeltez superior a 2 la resistencia cae, y lo hace tanto que para valores superiores a 6 se llega a reducir hasta en un 15%. Mientras tanto, para valores inferiores a 2, la resistencia aumenta significativamente, casi hasta un 40% (Ver **Figura 1.6**).

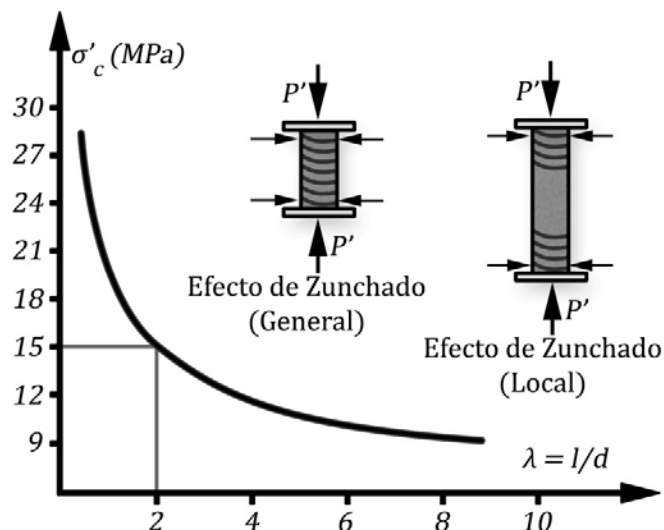


Figura 1.6 Influencia de la esbeltez de la probeta en el comportamiento a compresión del hormigón ensayado.

Como un aumento de la esbeltez está asociado a una disminución de la longitud en la que el efecto favorable del zunchado que se origina por la fricción entre las caras extremas de la probeta y las placas mediante las cuales se aplica la carga, la resistencia decae cuando la esbeltez crece.

Para fijar un valor de referencia único, debido a que diferentes tipos de probetas originan valores diferentes de la capacidad resistente del hormigón ensayado, algunas normas establecen el empleo de la probeta cilíndrica de esbeltez igual a 2 (**15cm x 30cm** ó **30cm x 60cm**) bajo ciertas condiciones de ensayo, mientras otras establecen probetas cúbicas de **10cm** de lado, o de múltiplos de estas dimensiones.

Por otro lado, la tipología de la probeta empleada en el ensayo (cilindro, cubo o prisma) y sus dimensiones, influyen en la resistencia del hormigón que se está evaluando, resultando interesante conocer los coeficientes de conversión de la resistencia respecto de una que se defina como patrón, en este caso la probeta cilíndrica de **15cm x 30cm**. La **Tabla 1.3** ofrece estos coeficientes.

Es decir, si la resistencia a compresión del hormigón que se registra durante un ensayo en el que se emplea una **probeta cilíndrica** de 15cm x 30cm es de **30MPa**, se infiere que el mismo hormigón ensayado bajo las mismas condiciones, pero utilizando la probeta cilíndrica de 10cm x 20cm, debe conducir a una resistencia aproximadamente igual a $f'_c \approx 0,97(30MPa) \approx 29MPa$.

TABLA 1.3 Factores de conversión de resistencia atendiendo a la tipología y dimensiones de la probeta¹⁴.

Tipo de Probeta	Dimensiones (cm)	Coeficiente de Conversión	
		Intervalo	Valor Medio (λ)
Cilindro (Esbeltez: 2)	10 x 20	0,94 ÷ 1,00	0,97
	15 x 30	-	1,00
	25 x 50	1,00 ÷ 1,10	1,05
Cubo	10	0,70 ÷ 0,90	0,80
	15	0,70 ÷ 0,90	0,80
	20	0,75 ÷ 0,90	0,83
	30	0,80 ÷ 1,00	0,90
Prisma	15 x 15 x 45	0,90 ÷ 1,20	1,05
	20 x 20 x 60	0,90 ÷ 1,20	1,05

$$f'_{c(cubo)} = f'_{c(cilindro)} / \lambda$$

$$f'_{c(prisma)} = f'_{c(cilindro)} / \lambda$$

1.2.2.5 INFLUENCIA EN LA CURVA DE COMPORTAMIENTO DE LA RELACIÓN AGUA/CEMENTO

Se conoce la marcada influencia de la relación (a/c) en la resistencia del hormigón, baste recordar la expresión de Boloumey que se estudia en los cursos de dosificación. Obsérvese en la **Figura 1.7** cómo para resistencias bajas, asociadas a altas relaciones (a/c), la pendiente de la rama descendente de la

¹⁴ Tomada del libro Hormigón Armado (Edición 14, pág. 114) de Jiménez Montoya, et al.

curva de comportamiento es suave y en general más aplanada, denotando un carácter plástico más nítido.

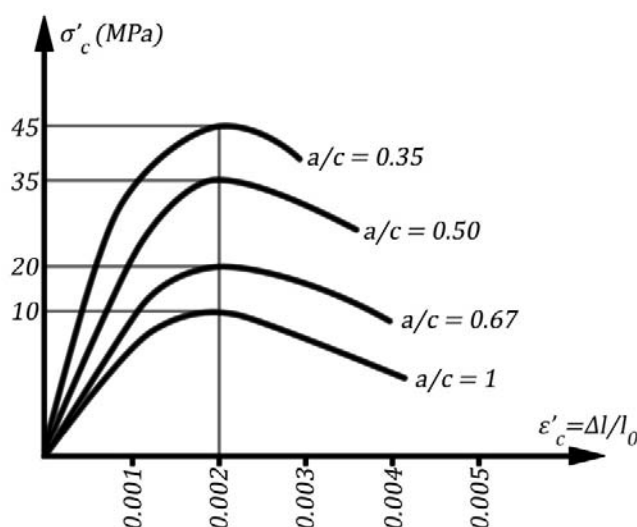


Figura 1.7 Influencia de relación a/c en el comportamiento a compresión de una probeta de hormigón.

Mientras tanto para resistencias altas, coligadas a relaciones (a/c) más bajas, la curva es más empinada y pronunciada en su parte superior, el módulo de elasticidad es mayor y la rama descendente es más corta. Definitivamente rasgos de una respuesta elástica más notable.

En resumen, los factores recién estudiados, aunque no son los únicos, influyen y modifican las curvas de comportamiento del hormigón ensayado a compresión uniaxial. Estas curvas siguen en lo general leyes tensodeformacionales que no son lineales, predominando en ellas una tendencia parabólica que aun cuando pueda conocerse con determina certeza las ecuaciones que las rigen, introducen en los modelos analíticos un grado de complejidad que justifica ciertas simplificaciones como las que reconocen los reglamentos normativos, a partir de propuestas de algunos investigadores, con la intención de facilitar los cálculos para modelar la etapa de servicio o la etapa próxima al límite de resistencia de las piezas de hormigón armado.

1.2.3 LEYES CONSTITUTIVAS PARA MODELAR EL COMPORTAMIENTO DEL HORMIGÓN A COMPRESIÓN UNIAxIAL.

Hasta 1950 aproximadamente prevalecieron los diseños mediante la teoría clásica en Tensiones de Trabajo¹⁵, y para ese entonces las investigaciones se enfocaron a definir, en lo fundamental: *el módulo*

¹⁵ En el diseño del hormigón armado han prevalecido por mucho tiempo dos filosofías diferentes para garantizar los criterios de seguridad: el diseño por **Tensiones de Trabajo** (reconocido por las siglas **WSD** /Working Strees Design), y el diseño por **Resistencia Última** (denominado por algunos Reglamentos como **SDM**/Strength Design Method). El primero fue el método más empleado desde inicios del siglo XX y hasta aproximadamente 1960, mientras el segundo se introduce por el ACI a partir de su edición de 1963, abordando la seguridad estructural mediante enfoques conceptualmente más realistas. No obstante, ya la edición del ACI del año

de elasticidad del hormigón, la tensión admisible del material y un coeficiente de equivalencia que permitiera transformar la superficie de acero en otra equivalente de hormigón.

Fue esta una etapa caracterizada por un diagrama de comportamiento para el hormigón de tipo lineal como el que puede observarse en la **Figura 1.8**, que reconoce únicamente el rango elástico en la respuesta del material, limitando en consecuencia a umbrales muy bajos sus tensiones de trabajo.

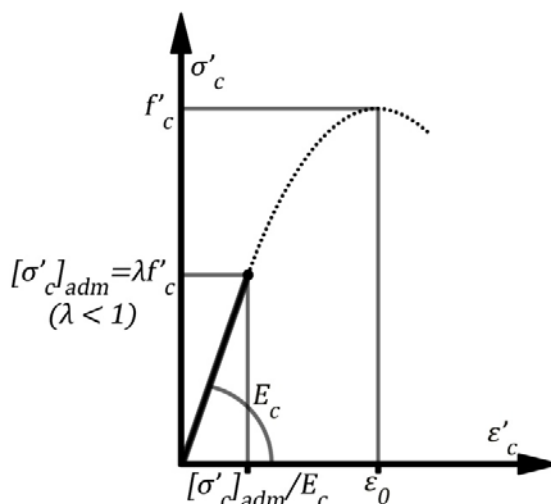


Figura 1.8 Ley constitutiva Lineal del hormigón.

En la actualidad un comportamiento de este tipo, al que corresponde una ley constitutiva lineal de la forma $\sigma'_c = E_c \varepsilon'_c$, continúa utilizándose en los métodos de cálculo de solicitaciones por teoría elástica y en diseños sustentados en el método de tensiones admisibles reprobado ya por la mayoría de los reglamentos, aunque también se aplica cuando se analizan los estados límites de servicio en hormigón armado y hormigón pretensado.

Ya el período comprendido entre 1950 y 1960 se caracteriza por la tendencia de sustituir los métodos de cálculo en tensiones de trabajo, por métodos en rotura, y las investigaciones se enfocaron esencialmente a mejorar la precisión en la estimación de los parámetros que definen al diagrama de tensiones del hormigón.

Entre estos parámetros se destacan: *tensión máxima, deformación última, deformación correspondiente a la máxima tensión, modelación analítica de la rama ascendente del diagrama σ'_c vs ε'_c , etc.*

Es precisamente el período en que se profundiza más en la influencia de la tipología de la probeta ensayada, de su esbeltez, de la velocidad de aplicación de la carga, de la edad del hormigón durante el ensayo, del confinamiento, etc. Quizá lo más significativo en este período fue el aporte de **Hognestad** al presentar una ley tensodeformacional que ha sido ampliamente utilizada por numerosos investigadores. La **Figura 1.9** revela esta ley.

1956 reconoció y oficialmente permitió el **SDM** al incluirlo en un Apéndice que recomendaba su empleo en el diseño de estructuras de hormigón.

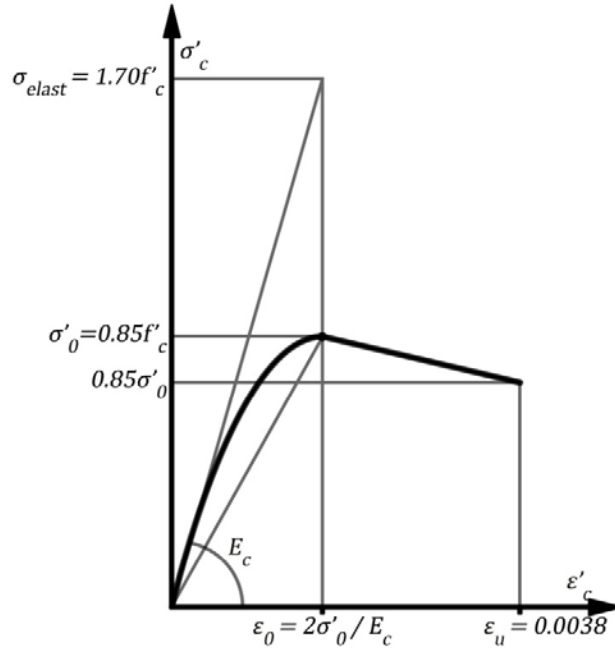


Figura 1.9 Ley constitutiva del hormigón presentada por Hognestad

En la propuesta de **Hognestad** la rama ascendente queda definida por una parábola cuadrática con el vértice en el punto $(\epsilon_o ; \sigma'_o)$, y que pasa por el origen $(0;0)$; mientras que la rama descendente está representada por una línea recta que parte del propio vértice de la parábola $(\epsilon_o ; \sigma'_o)$ y termina su desarrollo en el punto:

$$(\epsilon_u ; 0,85\sigma'_o) \equiv (0,0038 ; 0,72f'_c)$$

La ley asociada a una relación constitutiva de este tipo no es continua en todo el rango de deformaciones, y analíticamente se escribe de la forma:

$$\sigma'_c : \begin{cases} \sigma'_o \left[\frac{2\epsilon'_c}{\epsilon_o} - \left(\frac{\epsilon'_c}{\epsilon_o} \right)^2 \right] = 0,85f'_c \left[\frac{2\epsilon'_c}{\epsilon_o} - \left(\frac{\epsilon'_c}{\epsilon_o} \right)^2 \right] & \text{para } \epsilon'_c < \epsilon_o \\ \frac{\sigma'_o}{\epsilon_u - \epsilon_o} (\epsilon_u - 0,85\epsilon_o - 0,15\epsilon'_c) = \frac{0,85f'_c}{\epsilon_u - \epsilon_o} (\epsilon_u - 0,85\epsilon_o - 0,15\epsilon'_c) & \text{para } \epsilon_o \leq \epsilon'_c \leq 0,0038 \end{cases}$$

Si se define la variable $(\Omega = \epsilon'_c/\epsilon_o)$, la ley constitutiva sugerida por **Hognestad** se puede escribir también de la forma:

$$\sigma'_c : \begin{cases} 0,85f'_c [2\Omega - \Omega^2] & \text{para } \Omega < 1 \\ 0,94f'_c (1,05 - 0,15\Omega) & \text{para } 1 \leq \Omega \leq 0,0022(E_c/f'_c) \end{cases}$$

Algunos investigadores han modificado la propuesta original de **Hognestad** imponiendo las siguientes condiciones: $\epsilon_o = 0,002$, $\epsilon_u = 0,004$ y $\sigma'_o = f'_c$, conllevando así a la siguiente ley ajustada:

$$\sigma'_c : \begin{cases} f'_c [2\Omega - \Omega^2] & \text{para } \Omega < 1 \\ f'_c (1,15 - 0,15\Omega) & \text{para } 1 \leq \Omega \leq 2 \end{cases}$$

A partir de 1960 se inicia un nuevo período caracterizado por investigaciones encauzadas a definir una ley general y completa para simular analíticamente las relaciones tensodeformacionales a compresión del hormigón. Representan hitos en este período las propuestas realizadas por **Rüsch**, **Sargin**, **Sáenz**, **S.L**¹⁶, **Kabaila**¹⁷, **Desayi-Krishman**, **Kriz**, **L.B - Lee**, etc.

La propuesta de **Rüsch**, ilustrada en la **Figura 1.10**, es similar a la de **Hognestad**, y consiste también en la combinación de una parábola de segundo grado y un segmento rectilíneo, pero ahora este segmento con pendiente nula. Reconocida además como diagrama parábola-rectángulo, hace coincidir el vértice de la parábola con en el punto $(\varepsilon_0; 0,85f'_c)$ (siendo ε_0 la deformación de rotura del hormigón a compresión simple), mientras que el punto extremo de la recta de pendiente nula se sitúa en las coordenadas $(\varepsilon_u; 0,85f'_c)$, representando ε_u la deformación de rotura del hormigón a flexión según algunas Normas.

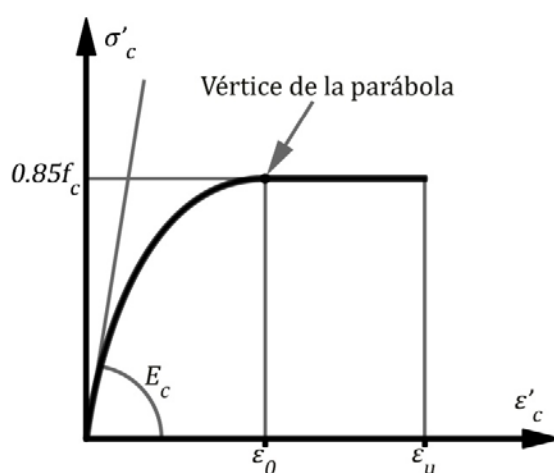


Figura 1.10 Diagrama Parábola-Rectángulo para modelar el comportamiento del hormigón.

Se verifica entonces que la máxima tensión a compresión que reconoce este diagrama es $0,85f'_c$, siendo f'_c la resistencia del hormigón a compresión, a los 28 días.

La ecuación física o constitutiva que rige la ley correspondiente al diagrama parábola rectángulo sugerido por **Rüsch**, se escribe a continuación:

$$\sigma'_c = \begin{cases} 0,85f'_c \left[2 \left(\frac{\varepsilon'_c}{\varepsilon_0} \right) - \left(\frac{\varepsilon'_c}{\varepsilon_0} \right)^2 \right] & \text{para } \varepsilon'_c < \varepsilon_0 \\ 0,85f'_c & \text{para } \varepsilon_0 \leq \varepsilon'_c \leq \varepsilon_u \end{cases}$$

¹⁶ Propone un modelo analítico para la ley constitutiva del hormigón a partir de un polinomio de 2do grado de la forma:

$$(\sigma'_c)^2 + a_0(\varepsilon'_c)^2 + a_1(\sigma'_c)(\varepsilon'_c) + a_2(\sigma'_c) + a_3(\varepsilon'_c) = 0.$$

Los coeficientes a_i (desde $i = 0$ hasta $i = 3$) se determinan a partir de un análisis estadístico de curvas experimentales obtenidas para seis calidades diferentes de hormigón ($f'_{c1}, f'_{c2}, \dots, f'_{c6}$).

¹⁷ La ecuación constitutiva de la ley presentada por este investigador es del tipo:

$$\sigma'_c = 0,85f'_c(2\Omega - 1,189\Omega^2 + 1,763\Omega^3 + 0,0027\Omega^4)$$

O también:

$$\sigma'_c: \begin{cases} 0,85f'_c[2\Omega - \Omega^2] & \text{para } \Omega < 1 \\ 0,85f'_c & \text{para } 1 \leq \Omega \leq \varepsilon_u/\varepsilon_o \end{cases}$$

La propuesta realizada por **Rüsch**, para $\varepsilon_o = 0,002$ y $\varepsilon_u = 0,0035$, valor este último que consideran algunos reglamentos europeos, conduce a la siguiente formulación:

$$\sigma'_c: \begin{cases} 850\varepsilon'_c(1 - 250\varepsilon'_c)f'_c & \text{para } \varepsilon'_c < 0,002 \\ 0,85f'_c & \text{para } 0,002 \leq \varepsilon'_c \leq 0,0035 \end{cases}$$

Se recomienda que este diagrama sea utilizado exclusivamente para el diseño y revisión de secciones de elementos estructurales de hormigón que se encuentren en la etapa de fallo o agotamiento, o sea en el estado de resistencia límite, y son varios los investigadores que lo consideran como el diagrama que mejor refleja el comportamiento del hormigón para esta etapa, razón que justifica que continúe siendo reconocido por numerosas normas internacionales y por códigos de muchos países, especialmente europeos.

Sargin realiza un pormenorizado estudio de los ensayos realizados hasta 1970 y fundamentalmente de las numerosas relaciones σ'_c vs ε'_c propuestas hasta ese entonces. Interpretando el resultado de estas investigaciones llega a establecer varias conclusiones que se convierten en invariantes para describir cualitativa y cuantitativamente estas leyes. Estas ***invariantes*** se pueden resumir de la manera siguiente:

- ☞ La ley constitutiva del hormigón a compresión constará siempre de una rama ascendente y otra descendente que se interceptan en un punto de máximo, cuyas coordenadas son $(\varepsilon_o; \sigma_o)$. La rama ascendente pasa invariablemente por el origen $(0;0)$ y la pendiente de la recta tangente a dicha rama en dicho punto, que representa el módulo de deformación longitudinal instantáneo del hormigón, depende en lo fundamental de su resistencia y de la velocidad de aplicación de la carga.
- ☞ La posición y magnitud de la tensión máxima es bastante estable y sus coordenadas pueden definirse con muy buena precisión en función de la resistencia del hormigón ensayado, de la velocidad de aplicación de la carga, del gradiente de deformaciones y de la cuantía de la armadura transversal.
- ☞ Las tangentes de las ramas ascendentes y descendentes depende de los mismos factores enunciados en el punto anterior, y ambas pendientes son mayores en la medida en que aumente la resistencia del hormigón.
- ☞ El hormigón admite grandes deformaciones sin que llegue a perder completamente su aptitud estructural, aunque acompañada de una disminución gradual de su capacidad resistente (la rama descendente refleja esta cualidad).
- ☞ Siempre es posible formular una ley analítica que refleje con suficiente exactitud la relación σ'_c vs ε'_c del hormigón.

Estas invariantes obligan a que la ley σ'_c vs ε'_c satisfaga los siguientes criterios:

1. La **rama ascendente** pasa por el origen, es decir:

$$\sigma'_c|_{\varepsilon'_c=0} = 0$$

2. La **tangente a la rama ascendente** en el origen es igual, por definición, al módulo de elasticidad del material:

$$\left. \frac{d\sigma_c'}{d\varepsilon_c'} \right|_{\varepsilon_c'=0} = E_o = E_c$$

3. La **rama ascendente** responde a una ley continua y tiene un máximo en el punto $\varepsilon_c' = \varepsilon_o$, es decir:

$$\left. \frac{d\sigma_c'}{d\varepsilon_c'} \right|_{\varepsilon_c'=\varepsilon_o} = 0$$

4. Las coordenadas del máximo son, por definición:

$$(\varepsilon_o ; \sigma_o) \equiv (\varepsilon_o ; k_3 f_c')$$

5. La **rama descendente** que se proponga debe refrendar siempre los resultados experimentales.

Para satisfacer estos cinco criterios sería saludable que:

- ✓ La ley que se proponga incluya siempre las entidades físicas siguientes: $(f_c', E_c, \varepsilon_o)$.
- ✓ La ecuación debería incluir factores, preferiblemente adimensionales, como: (A, D, η, k_3)
- ✓ La potencia de la variable independiente (ε_c') debe ser tan baja como posible sea, con tal de garantizar una variación suave a lo largo de las ramas ascendentes y descendentes, a la vez de simplificar los cálculos.

Definitivamente la propuesta analítica de **Sargin** para la relación σ_c' vs ε_c' , fue la siguiente:

$$\sigma_c' = k_3 f_c' \left[\frac{\eta A + (D - 1)\eta^2}{1 + \eta(A - 2) + D\eta^2} \right]$$

Siendo:

$$\eta = \varepsilon_c' / \varepsilon_o$$

$$A = \sigma_{elast} / \sigma_o' = (E_c \varepsilon_o) / (k_3 f_c')$$

D : Parámetro que afecta principalmente a la pendiente de la tangente de la rama descendente. ($D = 0,1 ; 0,2 ; 0,4, \dots$)

En esta profusa investigación **Sargin** estudió la influencia de numerosos factores en los cuatro parámetros básicos de su formulación general (A, k_3, η, D), y entre ellos se destacan:

- ✓ Resistencia característica del hormigón (f_c').
- ✓ Cuantía del refuerzo longitudinal.
- ✓ Separación y calidad de la armadura transversal.
- ✓ Gradiente de deformaciones.
- ✓ Tamaño de la probeta.
- ✓ Tipo de carga (estática, cíclica, de corta duración, de acción prolongada, etc.).
- ✓ Área relativa del núcleo confinado de hormigón.
- ✓ Recubrimiento.
- ✓ Fluencia, etc.

Parámetro 1: Coeficiente (A):

El coeficiente A depende en lo fundamental del módulo de elasticidad del hormigón y **Sargin** comprobó que este módulo está influenciado esencialmente por la resistencia del hormigón (f_c'), la fluencia y el gradiente de deformación, apreciándose en los ensayos el efecto despreciable de la

armadura transversal, aunque el mayor peso recae precisamente en la resistencia del hormigón. Para formularlo analíticamente se han conocido tres tendencias diferentes para sus expresiones:

Tendencia 1: $E_c = \left(\frac{a}{a_1 + f'_c}\right) f'_c$

Tendencia 2: $E_c = a + a_1 f'_c$

Tendencia 3: $E_c = a \sqrt[n]{f'_c}$

Los reglamentos en los últimos años recurren a una formulación del tipo presentado por esta última tendencia. El ACI sugiere una relación del tipo $E_c \sim \sqrt{f'_c}$, mientras que en Europa del tipo $E_c \sim \sqrt[3]{f'_c}$

Parámetro 2: Relación de máxima tensión ($k_3 = \sigma'_o / f'_c$):

Esta relación está afectada esencialmente por la influencia de la armadura transversal, el tipo de carga y su tiempo de aplicación, el tamaño de la probeta, y además por la relación *área del núcleo confinado / área de recubrimiento*. Por ejemplo, se ha comprobado que cuanto mayor es el confinamiento (menor espaciamiento de la armadura transversal incrementa el confinamiento), mayor es el valor de k_3 . Algunos examinadores del tema han adoptado valores en el intervalo ($0,75 \leq k_3 \leq 1,00$).

Parámetro 3: Coeficiente (η)

Este coeficiente depende de la deformación ε_o correspondiente a la máxima tensión, y esta deformación es prácticamente invariable pues se ha podido confirmar las escasas desviaciones que experimenta con los incrementos que pueda sufrir la resistencia del hormigón. Para cargas de acción breve se considera generalmente $\varepsilon_o \approx 0,002$.

Parámetro 4: Coeficiente (D)

El parámetro D se introduce para controlar la pendiente de la rama descendente y los escasos ensayos correspondientes a grandes deformaciones, a más de dispersos, hacen difícil su estimación, porque resulta difícil precisar la cualidad de la rama descendente. En general se establece que ($0 < D < 1$)

En la **Figura 1.11** se ilustra la influencia del parámetro D en la relación tensodeformacional del hormigón. Obsérvese que la mayor influencia se registra en la rama descendente. El mejor estimador que se conoce lo hace depender de la resistencia del hormigón exclusivamente, recurriendo a una expresión del tipo:

$$D = e^{(2,4-f'_c)}$$

Sustituyendo en ella f'_c en ksi ¹⁸.

La formulación universal presentada por **Sargin** contiene como casos particulares las propuestas de algunos otros expertos que le precedieron, y se señalan entre ellas las siguientes:

☞ Propuesta de **Desayi y Krishnan** que converge con la de Sargin si se considera $k_3 = 0,85$, $A = 2$ y $D = 1$. Su formulación es la siguiente:

$$\sigma'_c = k_3 f'_c \left[\frac{2 \left(\frac{\varepsilon'_c}{\varepsilon_o} \right)}{1 + \left(\frac{\varepsilon'_c}{\varepsilon_o} \right)^2} \right] \quad \Rightarrow \quad \sigma'_c = 0,85 f'_c \left(\frac{2\Omega}{1 + \Omega^2} \right)$$

¹⁸ $1ksi = 1000 lb/plg^2 \approx 6,8MPa$. Por ejemplo, si se adopta la expresión $D = e^{(2,4-f'_c)}$, a un hormigón de $21MPa$ ($\approx 3,088ksi$) corresponderá un valor $D = 2,71828^{(2,4-3,088)} \approx 0,502$

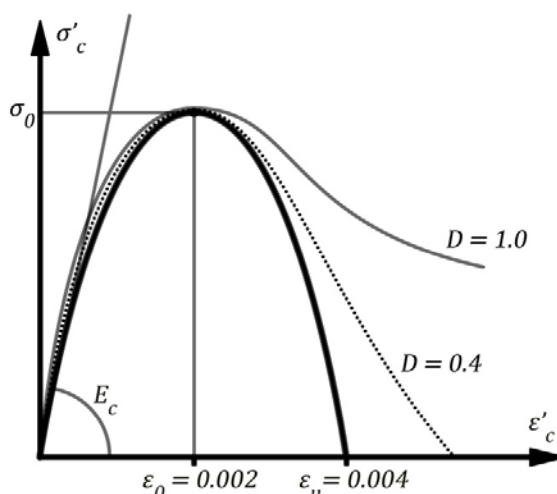


Figura 1.11 Influencia del parámetro D en la relación σ'_c vs. ϵ'_c del hormigón.

- ☞ Propuesta de **Sáenz**, prestigioso ingeniero cubano que sugirió en 1964 una ley constitutiva que satisface la formulación general de Sargin si se admite en esta última $D = 1$ y $k_3 = 1$

$$\sigma'_c = \frac{E_c \epsilon'_c}{1 + \left[\left(\frac{E_c}{E_1} - 2 \right) \left(\frac{\epsilon'_c}{\epsilon_0} \right) + \left(\frac{\epsilon'_c}{\epsilon_0} \right)^2 \right]} \Rightarrow \sigma'_c = \frac{E_c \epsilon'_c}{1 + \left[\left(\frac{E_c}{E_1} - 2 \right) (\Omega) + (\Omega)^2 \right]} \quad \text{Siendo } E_1 = f'_c / \epsilon_0$$

- ☞ El muy divulgado **diagrama parabólico para cargas de acción breve**, que consiste en una parábola de segundo grado o cuadrática, que tiene su vértice en el valor máximo de tensión al que corresponden las ordenadas $(0,002; f'_c)$, es decir, presupone $\epsilon_0 = 0,002$ y $k_3 = 1$, además de $A = 2$ y $D = 0$.
- ☞ El mismo **diagrama parabólico para cargas sostenidas**, que consiste también en una parábola cuadrática, pero ahora con su vértice en las ordenadas $(0,004; 0,8f'_c)$, es decir, considera $\epsilon_0 = 0,004$ y $k_3 = 0,8$, además de $A = 2$ y $D = 0$.

Estos dos últimos diagramas se muestran en la **Figura 1.12**, y la ecuación que modela la ley constitutiva del hormigón a compresión en ambos casos es del tipo:

$$\sigma'_c = k_3 f'_c \left[2 \left(\frac{\epsilon'_c}{\epsilon_0} \right) - \left(\frac{\epsilon'_c}{\epsilon_0} \right)^2 \right] \Rightarrow \sigma'_c = k_3 f'_c (2\Omega - \Omega^2)$$

Que se ajusta en cada caso a:

Para cargas de corta duración: $\epsilon_0 = 0,002$ y $k_3 = 1,0$

$$\therefore \sigma'_c = 1000 f'_c [\epsilon'_c - 250 (\epsilon'_c)^2]$$

Para cargas de larga duración: $\epsilon_0 = 0,004$ y $k_3 = 0,80$

$$\therefore \sigma'_c = 200 f'_c [\epsilon'_c - 62,5 (\epsilon'_c)^2]$$

Ambos diagramas fueron propuestos por el afamado investigador Collins, y se han utilizado fundamentalmente para estudiar el comportamiento experimental bajo cargas de corta y larga duración; para ejercer el control de calidad mediante ensayos; también durante investigaciones en elementos de hormigón en cualquier etapa; y para el cálculo de solicitaciones por métodos no lineales.

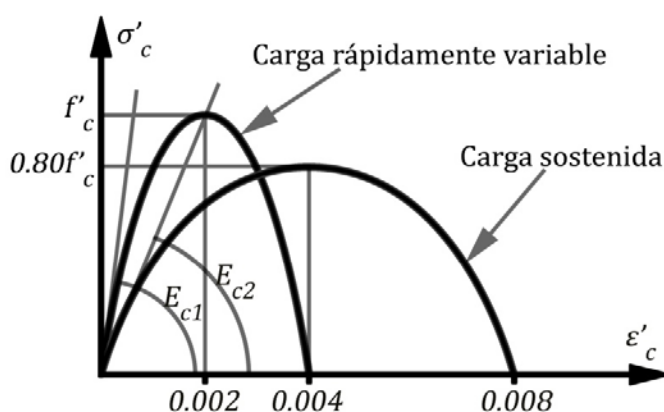


Figura 1.12 Diagramas parabólicos para estimar las leyes de comportamiento del hormigón.

Es evidente la complejidad que aparece en los modelos analíticos cuando se recurre a uno cualquiera de los diagramas descritos hasta aquí, salvo cuando se trate del diagrama lineal presentado inicialmente, que no pasa la prueba para el estudio de la etapa de agotamiento. La **Tabla 1.4** resume las leyes constitutivas que se acaban de comentar para modelar el comportamiento del hormigón a compresión mediante la relación σ'_c vs ϵ'_c .

1.2.4 RESISTENCIA CARACTERÍSTICA DEL HORMIGÓN (f'_c).

Ya se comentó que en el caso del hormigón su cualidad más distintiva, y a su vez el reflejo más directo de su calidad, es precisamente su resistencia a compresión; de hecho es el parámetro por el que se le comercializa generalmente, con la ventaja adicional de que la mayoría de las expresiones que cuantifican el resto de las propiedades mecánicas del material se expresan a partir de esta cualidad. En realidad los Reglamentos actuales refieren, para el diseño estructural de los elementos, su **valor característico**, es decir, el estadígrafo que presenta un grado de confianza predefinido, o de que los valores individuales de resistencia de las probetas ensayadas estén por encima de dicho valor con una probabilidad prefijada, siendo representada generalmente como f'_c .

En el ACI se le denomina **resistencia especificada del hormigón**, y en el Capítulo 3 (§ 3.3.1) se regresa a este concepto para presentar la manera en que este reglamento la define. Se exponen a continuación otras magnitudes de interés para el diseño estructural de secciones y elementos de hormigón, que se hacen depender analíticamente del valor de la resistencia característica a compresión.

1.2.5 RESISTENCIA A TRACCIÓN DEL HORMIGÓN.

La baja resistencia a la tracción es una de las principales debilidades del hormigón, no obstante, en determinadas evaluaciones de capacidad resistente, y sobre todo de funcionalidad y durabilidad, puede llegar a desempeñar un importante rol que exige una evaluación previa de este parámetro. En general se puede hablar de la **resistencia a tracción directa** y de la **resistencia indirecta** provocada generalmente por la flexión.

TABLA 1.4 Algunas leyes constitutivas para modelar la respuesta del hormigón a compresión.

LEY	ESQUEMA	ECUACIÓN ($\Omega = \varepsilon'_c / \varepsilon_o$)	OBSERVACIONES
Lineal		$\sigma'_c = E_c \cdot \varepsilon'_c$	Apropiada para el estudio de situaciones en que pueda asegurarse que: $\sigma'_c \lesssim 0,5f'_c$
		Para las consideraciones de Collins: $E_c = 1000f'_c$ y $\varepsilon_o = 0,002$, entonces: $\sigma'_c = 2\Omega \cdot f'_c$	
Collins		$\sigma'_c = k_3 f'_c (2\Omega - \Omega^2)$	CORTA DURACIÓN $k_3 = 1,0$ $\varepsilon_o = 0,002$ $\varepsilon_u = 0,004$
			LARGA DURACIÓN $k_3 = 0,80$ $\varepsilon_o = 0,004$ $\varepsilon_u = 0,008$
Hognestad		$\sigma'_c: \begin{cases} f'_c [2\Omega - \Omega^2] & \Omega < 1 \\ f'_c (1,15 - 0,15\Omega) & 1 \leq \Omega \leq 2 \end{cases}$	$k_3 = 1,0$ $\varepsilon_o = 0,002$ $\varepsilon_u = 0,004$
Rüsch (Parábola-Rectángulo)		$\sigma'_c: \begin{cases} k_3 f'_c [2\Omega - \Omega^2] & \Omega < 1 \\ k_3 f'_c & 1 \leq \Omega \leq \varepsilon_u / \varepsilon_o \end{cases}$	CORTA DURACIÓN $k_3 = 1,0$ $\varepsilon_o = 0,002$ $\varepsilon_u = 0,004$
			LARGA DURACIÓN $k_3 = 0,85$ $\varepsilon_o = 0,002$ $\varepsilon_u = 0,0035$
Kabaila	-	$\sigma'_c = k_3 f'_c (2\Omega - 1,189\Omega^2 + 1,763\Omega^3 + 0,0027\Omega^4)$	CORTA DURACIÓN $k_3 = 1,0$
			LARGA DURACIÓN $k_3 = 0,85$
Desayi-Krishman	-	$\sigma'_c = k_3 f'_c \left(\frac{2\Omega}{1 + \Omega^2} \right)$	CORTA DURACIÓN $k_3 = 1,0$
			LARGA DURACIÓN $k_3 = 0,85$

1.2.5.1 CASO DE LA TRACCIÓN DIRECTA

La evaluación de la **resistencia a tracción directa**¹⁹ (f_{ct}) resulta siempre compleja en cualquier laboratorio y no fue hasta la presentación de una interesante técnica ofrecida hace varias décadas por el brasileño Lobo Carneiro, conocida como ensayo brasileño, que su magnitud pudo ser estimada con mayor precisión.

La técnica consiste en la utilización de una probeta cilíndrica igual a la estandarizada para el ensayo a compresión, pero colocada horizontalmente en la máquina de ensayo, a la que se aplica una carga de compresión a lo largo de dos generatrices opuestas, para generar así una tracción en la dirección perpendicular al plano en que se aplica la carga distribuida, cuya magnitud se corresponde con la relación $2P/\pi dl$, siendo d y l el diámetro y la longitud inicial de la probeta ensayada, respectivamente.

La **Figura 1.13** ilustra esquemáticamente el ensayo. Obsérvese que en la dirección ortogonal al plano de carga, prácticamente toda la altura de la probeta en esa dirección estará sometida a una tensión uniforme de tracción, situación similar a lo que acontecería en un ensayo a tracción directa de más difícil realización en un laboratorio. Sin embargo, a pesar de la eficacia de este ensayo se confirma una dispersión mayor de los resultados al compararse con el ensayo a compresión directa, pudiéndose considerar que si la resistencia a tracción que se detecta mediante el ensayo indirecto (brasileño) es f_{ci} , entonces la resistencia a tracción directa del hormigón se puede estimar como $f_{ct} \approx 0.90f_{ci}$.

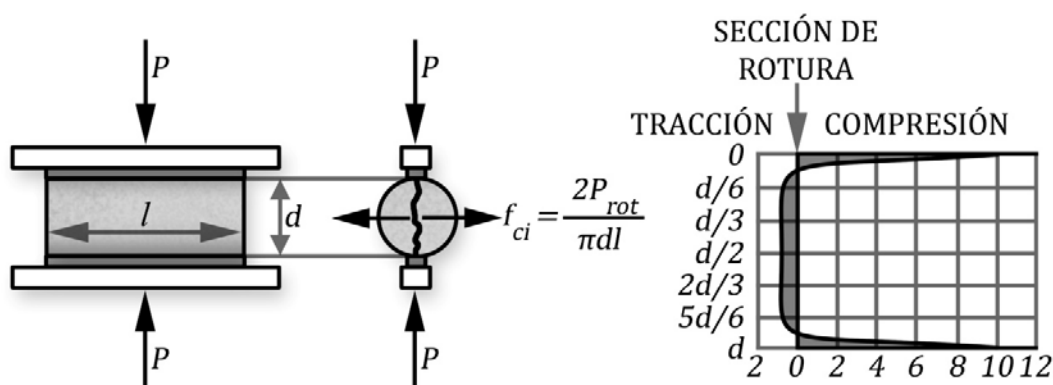


Figura. 1.13 Ensayo brasileño:

- (a) elevación lateral de la probeta colocada en la máquina de ensayo,
- (b) sección transversal de la probeta ensayada,
- (c) distribución de tensiones

Por eso la tendencia de las diferentes escuelas es expresar la resistencia a tracción directa en función de la resistencia a compresión del hormigón ensayado. Aunque el ACI no ofrece explícitamente expresiones para evaluar la resistencia a tracción directa, y más bien sugiere que se

¹⁹ En realidad los documentos provenientes de EE.UU llaman f_{ct} "resistencia promedio a la tracción por compresión diametral", equivalente a la que puede resultar del ensayo brasileño.

determine mediante ensayos²⁰, los autores norteamericanos Nilson y Winter, de Cornell University, ofrecen las siguientes expresiones:

Para Hormigones de Peso Normal: $f_{ct} = 4\sqrt{f'_c}$ (psi) ó $f_{ct} = 0,33\sqrt{f'_c}$ (MPa)

Para Hormigones Livianos: $f_{ct} = 2,5\sqrt{f'_c}$ (psi) ó $f_{ct} = 0,21\sqrt{f'_c}$ (MPa)

Los lectores pueden consultar la propuesta de otros reglamentos para evaluar esta característica mecánica del hormigón, mientras que la **Tabla 1.5** confirma la dispersión entre tres criterios de diferentes países, incluido Cuba según su normativa vigente en el momento en que se redacta este libro, respondiendo los resultados a un hormigón de peso normal y resistencia característica igual a $f'_c = 30\text{MPa}$.

TABLA 1.5 Resistencia a tracción directa del hormigón según tres enfoques diferentes.

	(EE.UU)	EHE:2008 (España) Para $f'_c \leq 50\text{MPa}$	NC 207:2003 (Cuba)
	$f_{ct} = 0,33\sqrt{f'_c}$ (f'_c : MPa)	$f_{ct} = 0,21\sqrt[3]{(f'_c)^2}$ (f'_c : MPa)	$f_{ct} = 0,21\sqrt[3]{(f'_c)^2}$ (f'_c : MPa)
f_{ct}	1,0MPa	2,0MPa	2,0MPa

Obsérvese que la diferencia entre el resultado a que conduce la expresión que tiende a utilizarse en EE.UU, y los valores evaluados mediante los reglamentos español o cubano, es significativa (100%), y si se adoptase el valor medio de la resistencia a tracción que ofrece el reglamento español ($\bar{f}_{ct} = 0,303f'_c/2$, para ese hormigón se obtendría $f_{ct}=2,9\text{MPa}$, es decir, $f_{ct}\approx 0,10f'_c$, estimador que se ha considerado tradicionalmente para cálculos de limitado rigor.

La resistencia a la tracción por compresión diagonal del hormigón se corresponde precisamente con la resistencia a tracción directa que acaba de evaluarse.

1.2.5.2 CASO DE LA TRACCIÓN INDIRECTA

La resistencia a tracción indirecta del hormigón, es decir, la inducida por la flexión, se reconoce en Norteamérica como módulo de ruptura (f_r). Resulta ser la resistencia más apropiada para evaluar las deformaciones en elementos sometidos a flexión, y su evaluación a nivel de laboratorio es más sencilla que la resistencia a tracción directa, ya que se realiza a una probeta prismática de longitud $5a$ cuya sección transversal es $(a \times a)$, apoyada en sus extremos, a la que se le aplica una carga centrada P

²⁰ El Artículo 5.1.4 del ACI 318:05 expresa: "Cuando los criterios de diseño en 9.5.2.3, 11.2 y 12.2.4 prevén usar la resistencia a tracción directa del hormigón f_{ct} , deben realizarse ensayos de laboratorio según la ASTM C 330 "Especificaciones para el hormigón estructural con agregados ligeros", con tal de establecer el valor de f_{ct} en correspondencia con el valor especificado de f'_c . (Nota de los autores: No se trata de una traducción literal del Artículo)

hasta alcanzar el colapso del hormigón a nivel de la fibra de máxima tracción. Este ensayo se ilustra en la **Figura 1.14**.

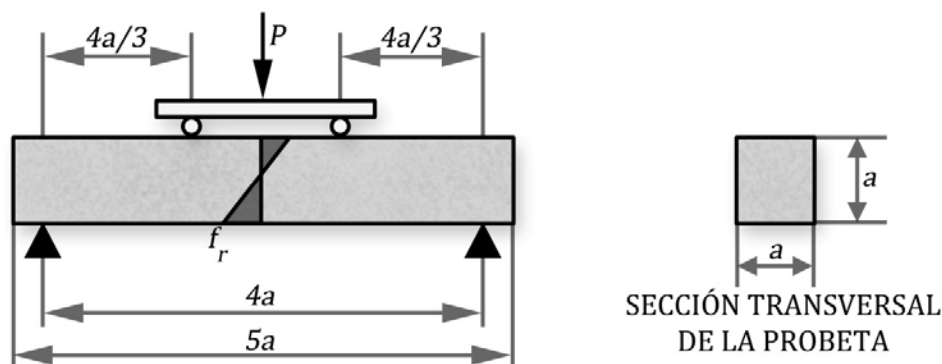


Figura. 1.14 Ensayo estandarizado para la determinación del módulo de rotura del hormigón

Si se admite una distribución lineal de las tensiones normales que tienen lugar en la sección transversal de la probeta, al alcanzar P el valor de rotura ($P \rightarrow P_{rot}$), la tensión a nivel de la fibra de máxima tracción (en realidad se trata de una tracción indirecta que es provocada por la flexión), coincide con la definición de f_r , y se puede evaluar mediante la expresión:

$$f_r = \frac{M_r}{W} = \frac{\frac{P_{rot}}{2} \cdot \frac{4a}{3}}{a^3/6} = \frac{2P_{rot}a/3}{a^3/6} = \frac{4P_{rot}}{a^2}$$

Entonces el valor de f_r depende de la fuerza P_{rot} que se registre durante el ensayo, y de la dimensión a de la sección transversal. Hace algunos años se proponía estimar esta resistencia mediante un valor situado entre 1.6 y 2.4 veces la resistencia a tracción directa, o sea: $f_r \approx (1,6 \div 2,4) f_{ct}$, llevando implícita las mismas incertidumbres que se tienen para evaluar la resistencia directa. Investigaciones más consistentes prefieren indicarla como una función de la resistencia a compresión.

El ACI sí refiere una expresión para evaluar esta resistencia en función de la resistencia a compresión, y lo hace de la manera siguiente:

Para Hormigones de Peso Normal: $f_r = 0,7\sqrt{f'_c}$ (MPa) ó $f_r = 7,5\sqrt{f'_c}$ (psi)

Otros reglamentos²¹ ofrecen otras expresiones. La **Tabla 1.6** evalúa algunas de estas propuestas para un hormigón de $f'_c = 30\text{MPa}$.

²¹ Por ejemplo, la RILEM CPC 7 indica una expresión que relaciona a f_r con f_{ct} y el peralte de la sección:

$$f_r = \left(\frac{1+1,5\left(\frac{h}{100}\right)^{0,7}}{1,5\left(\frac{h}{100}\right)^{0,7}} \right) f_{ct} \quad \text{en la que} \quad \begin{cases} h: \text{altura total de la sección (mm)} \\ f_{ct} \text{ en MPa} \\ f_r \text{ en MPa} \end{cases}$$

Sugiriendo para los peraltos más frecuentes la expresión $f_r = 0,37\sqrt{(f'_c)^2}$ (MPa). Por su parte la NC 207 establece la misma expresión del ACI, debiéndose la diferencia del factor que multiplica a la raíz a la aproximación que realiza este último reglamento al

TABLA 1.6 Resistencia a tracción indirecta o módulo de ruptura del hormigón según tres enfoques diferentes.

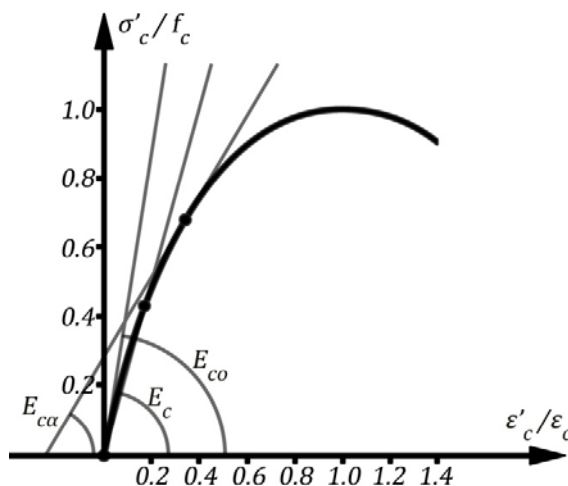
	ACI 318:05 (EE.UU) Hormigón de peso normal	EHE:2008 (España) Para $f'_c \leq 50\text{MPa}$	RILEM CPC 7 (Europa)	NC 207:2003 (Cuba)
	$f_r = 0,7\sqrt{f'_c}$ ($f'_c: \text{MPa}$)	$f_r \approx \bar{f}_{ct}$ $= 0,30\sqrt[3]{(f'_c)^2}$ ($f'_c: \text{MPa}$)	$f_r = 0,37\sqrt[3]{(f'_c)^2}$ ($f'_c: \text{MPa}$)	$f_r = 0,62\sqrt{f'_c}$ ($f'_c: \text{MPa}$)
f_r	3,4MPa	2,9MPa	3,6MPa	3,4MPa

1.2.6 MÓDULO DE DEFORMACIÓN LONGITUDINAL DEL HORMIGÓN

El carácter inelástico del hormigón impide hablar con rigor de un módulo de elasticidad para este material y por eso se prefiere llamarle módulo de deformación longitudinal, o simplemente módulo de deformación. Se justificaría distinguir la posible variación del módulo de deformación cuando se trata de un hormigón comprimido o traccionado.

1.2.6.1 MÓDULO DE DEFORMACIÓN A COMPRESIÓN

La ley tensión deformación del hormigón ha justificado que tradicionalmente se reconozcan los tres módulos de deformación que se señalan en la **Figura 1.15**. El **módulo inicial** E_{co} , conocido también como módulo de elasticidad en el origen, es el que coincide con la pendiente de la recta tangente al diagrama σ'_c vs ϵ'_c , precisamente, en el origen.

**Figura. 1.15 Módulos de deformación del hormigón**

El segundo, referido al **módulo secante** E_c , es en realidad variable pues se refiere a la pendiente de la recta que, partiendo del origen, intercepta al diagrama tensión – deformación que se considere en un

transformar la expresión de (*psi*) a (*MPa*). En efecto, si $f_r = 7,5\sqrt{f'_c}$ en (*psi*) entonces en (*MPa*) será $f_r \cong 7,5\sqrt{0,007(f'_c)} \approx 0,627\sqrt{f'_c}$.

punto de ordenadas (ϵ'_c ; σ'_c) prefijado. Se ha verificado que para cada calidad de hormigón y humedad ambiental es aproximadamente igual al 85% del módulo inicial ($E_c \approx 0,85E_{co}$).

Por último, se puede definir el **módulo tangente** E_{ca} que, al igual que el anterior, varía dependiendo del punto del diagrama que se considere, y coincidirá con la pendiente de la recta tangente en dicho punto.

Para la determinación de los corrimientos (deformaciones) que tienen lugar en un elemento estructural, y en otras evaluaciones de índole estructural, es indispensable conocer el módulo de deformación.

La incertidumbre recae en la correcta decisión de cuál de los tres módulos definidos anteriormente debe adoptarse. La respuesta se puede hallar en el siguiente comentario: como para las cargas impuestas de servicio (características) la tensión del hormigón supera el 40% de su resistencia ($\sigma'_c > 0,40f'_c$), o en ocasiones próxima a ella, se debe adoptar el **módulo secante de deformación**, que es precisamente el que adoptan la mayoría de los reglamentos.

El ACI establece las siguientes relaciones:

Para **hormigones livianos** ($15\text{kN/m}^3 < w_c < 25\text{kN/m}^3$):

$$E_c = 43w_c^{1.5}\sqrt{f'_c}$$

(sustituyendo w_c en kN/m^3 y f'_c en MPa , para obtener E_c en MPa)

Para **hormigones de peso normal**:

$$E_c = 4700\sqrt{f'_c} \quad (\text{en MPa})$$

La Instrucción española EHE: 08 en su Artículo 39.6 define los siguientes módulos:

$$E_{cm} = 8500\sqrt[3]{f'_{cm}} \approx 8500\sqrt[3]{(f'_c + 8)} \quad (\text{en MPa}) \quad (\text{Módulo de deformación longitudinal secante a los 28 días, siempre que la tensión en servicio no sobrepase de } 0,40f'_{cm}, \text{ es decir: } \sigma'_c \leq 0,40f'_{cm}), \text{ ó}$$

$$E_{c,28} = \beta_E E_{cm} \quad (\text{Módulo longitudinal inicial coincidente con la pendiente de la recta tangente al diagrama tensión-deformación en el origen. Se emplea para el análisis bajo cargas instantáneas o rápidamente variables})$$

Siendo:

$$\beta_E = 1,30 - f'_c/400 \nlessgtr 1,175 \quad (f'_c \text{ en MPa})$$

1.2.6.2 MÓDULO DE DEFORMACIÓN A TRACCIÓN.

Los reglamentos evaden generalmente indicar una formulación que permita evaluar esta característica mecánica, de hecho si complejo es el ensayo a tracción del hormigón, más aun lo es la determinación del módulo de elasticidad a tracción. No obstante, es frecuente considerarlo igual al de compresión que acaba de ser estudiado.

1.2.7 COEFICIENTE DE POISSON DEL HORMIGÓN.

Este coeficiente refiere la relación entre las deformaciones elásticas transversal y longitudinal, es decir:

$$\nu = \Delta_t/\Delta_l$$

En el caso del hormigón se ha comprobado que para tensiones normales de utilización dentro de la etapa de servicio, el coeficiente de Poisson varía entre 0,15 y 0,20, pudiéndose adoptar en los cálculos un valor promedio $\nu = 0,17$, aunque cuando se trata del hormigón armado o pretensado se prefiere utilizar $\nu = 0,20$.

1.2.8 MÓDULO DE DEFORMACIÓN TRANSVERSAL O MÓDULO A CORTANTE DEL HORMIGÓN.

Algunas investigaciones confirman que el módulo de deformación a Cortante, G_c , es del orden del 40% del correspondiente módulo de deformación longitudinal, es decir, $G_c \approx 0,40E_c$. Para cálculos más refinados se puede recurrir a una expresión del tipo:

$$G_c = \frac{1}{2(1 + \nu)} E_c$$

Nótese que para el valor promedio del coeficiente de Poisson definido en el párrafo anterior, se llega a obtener $G_c = 0,42E_c$.

1.2.9 INFLUENCIA DEL TIEMPO EN LA RESISTENCIA DEL HORMIGÓN.

En realidad la resistencia del hormigón depende, a más de todo lo estudiado en párrafos anteriores, de otro conjunto de factores que deben ser considerados, en especial del momento en que se desee evaluar (edad), del tipo de cemento, la temperatura y la humedad ambiental, etc. Como lo convencional es adoptar como referencia la resistencia especificada o característica que corresponde a los 28 días, algunas instrucciones europeas proponen el coeficiente $\beta_{(t)}$ para estimar la resistencia a cualquier otra edad, haciéndolo mediante una expresión²² del tipo:

$$f'_{c,t} = \beta_{(t)} f'_{cm,28}$$

$$f'_{cm,28} \approx f'_c + 8 \text{ MPa}$$

Para una humedad relativa $HR \geq 95\%$ y una temperatura $T = 20^\circ\text{C}$, el coeficiente $\beta_{(t)}$ viene dado por:

$$\beta_{(t)} = e^{s[1 - \sqrt{28/t}]}$$

t : Tiempo en días

s : $\begin{cases} 0.20 & \text{para cementos de alta resistencia y endurecimiento rápido} \\ 0.25 & \text{para cementos de endurecimiento normal} \\ 0.38 & \text{para cementos de endurecimiento lento} \end{cases}$

La **Tabla 1.7** refiere los valores de $\beta_{(t)}$ que permiten estimar la resistencia del hormigón a diferentes edades (desde los tres días a más de tres años), considerando los diferentes cementos que se producen y condiciones ambientales del tipo: humedad relativa del 95% y temperatura de 20°C .

Nótese que para tiempo infinito y hormigones elaborados con cemento de endurecimiento normal ($s = 0,25$), la resistencia del hormigón llega a crecer aproximadamente un 30%.

²² La expresión que se ofrece no aparece en el ACI, se ha tomado de instrucciones europeas.

TABLA 1.7 Valores de $\beta_{(t)}$ a los j días para una temperatura de 20°C y HR del 95%

s	Tiempo transcurrido (t días)										
	3	7	14	21	28	40	100	365 (1 año)	730 (2 años)	1095 (3 años)	α
0,20	0,663	0,819	0,920	0,970	1,000	1,033	1,099	1,156	1,174	1,183	1,22
0,25	0,598	0,779	0,902	0,962	1,000	1,042	1,125	1,198	1,223	1,234	1,28
0,38	0,458	0,684	0,854	0,943	1,000	1,064	1,196	1,316	1,357	1,376	1,46

Si la temperatura del hormigón es distinta a los 20°C, en algún período, el tiempo t debe corregirse y sustituir en su lugar el siguiente valor:

$$t_r = \sum_{i=1}^{i=n} (\Delta t_i) \cdot e^{-\left[\frac{4\,000}{273+T_{(\Delta t_i)}} - 13,65\right]}$$

En la que:

t_r : Edad corregida

Δt_i : Tiempo durante el cual actúa la temperatura $T_{(\Delta t_i)}$

$T_{(\Delta t_i)}$: Temperatura en cada período Δt_i

1.3 LA DEFORMACIÓN DEL HORMIGÓN Y LOS FENÓMENOS DEPENDIENTES DEL TIEMPO

Los fenómenos cronodependientes o reológicos se refieren a la variación, de origen tensional, que experimentan las deformaciones en un material dado, mientras transcurre el tiempo. Se estudiarán en el caso del hormigón los fenómenos de **Fluencia** y **Retracción**.

1.3.1 LA FLUENCIA DEL HORMIGÓN.

La **fluencia** es la propiedad que presentan muchos materiales de incrementar su deformación plástica bajo el efecto de cargas sostenidas durante un prolongado período de tiempo. Aunque los modelos físicos para explicar este fenómeno son diversos, la mayoría coinciden en reconocer que se debe a un acomodamiento interno de las partículas cristalinas que va teniendo lugar simultáneamente con la hidratación del cemento. Por otro lado, los modelos analíticos para estimar las deformaciones de acortamiento que experimenta el hormigón bajo tensión sostenida, son esencialmente empíricos y fundamentados en los resultados de extensos programas de ensayos de laboratorio a probetas de hormigón sometidas a compresión. En general se pueden distinguir tres tipos básicos de deformación: **elástica instantánea, elástica diferida y plástica diferida**.

Para explicarlas se describe lo que acontece cuando una probeta de hormigón se lleva a un ensayo a compresión mediante dos ciclos de carga. En el primer ciclo se aplica una tensión σ_o (carga noval) en un tiempo $t_o = 0$, y se registra la deformación **AB** que se indica en la **Figura 1.16 (b)**. Si se retira inmediatamente esta tensión debía esperarse que la probeta recuperase su longitud inicial, sin embargo, eso no sucede pues aunque la mayor parte de aquella deformación sí llega a recuperarse (**BC**), quedará siempre una deformación remanente (**AC**) que es irreversible, es decir, la deformación instantánea **AB** posee una componente elástica que se recupera, y otra remanente que no se recupera.

Si se aplicara una nueva tensión (carga no noval) que no supere a σ_o , al retirarla toda la deformación elástica que se experimenta se recupera, sin que quede deformación remanente alguna, confirmando una respuesta análoga a la de un material perfectamente elástico para el ciclo de carga no noval.

Ya para un segundo ciclo de carga que tenga lugar al transcurrir el tiempo ($t_1 > 0$), siempre que se aplique la nueva tensión ($\sigma_1 < \sigma_o$), aparecerá la deformación elástica instantánea **DE**. Manteniendo esta tensión en el tiempo ($t_1 \rightarrow t_2$), incluso sin que llegue a modificarse la magnitud de la nueva tensión aplicada, se aprecia un incremento gradual de la deformación que es la que describe la curva **EF**, ahora de carácter plástico. Transcurrido el tiempo t_2 , si se retirase la tensión σ_1 , tiene lugar inmediatamente una recuperación instantánea de la deformación (**FG=DE**) de tipo elástica, y conservando descargada la probeta parte de la deformación que quedó se irá recuperando lentamente (**GH**), pero quedando siempre una deformación plástica diferida que refleja el carácter inelástico del hormigón.

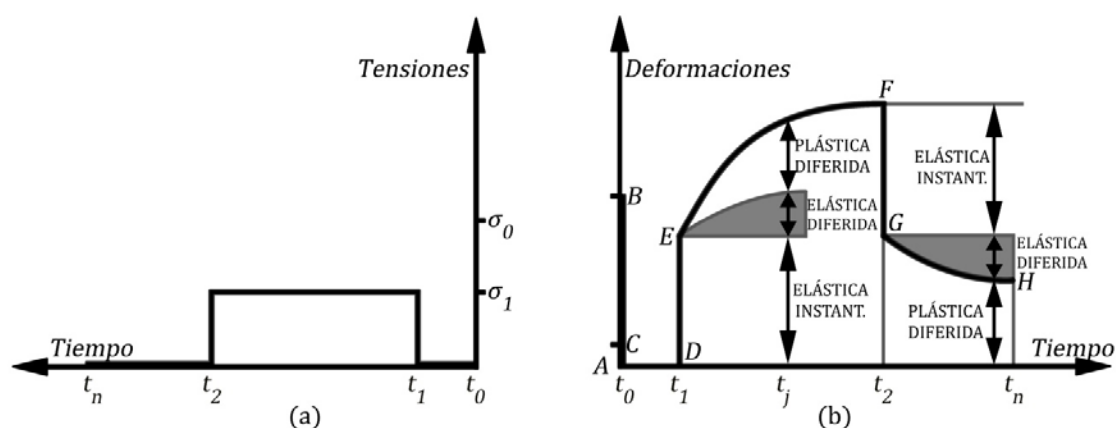


Figura: 1.16 Deformación que tienen lugar en el hormigón bajo carga sostenida.

Por esas razones los reglamentos advierten la necesidad de incrementar las flechas elásticas instantáneas que las cargas originan en cualquier elemento, cuando lo que interese es conocer la deformación al cabo de 3, 6, 12, 70 meses, por ejemplo.

Los factores que mayor influencia tienen sobre el fenómeno de fluencia que acaba de describirse son:

- Magnitud de la Carga o Tensión aplicada.

Cuanto mayor sea la carga que se aplique mayor será la deformación de fluencia.

- Edad del hormigón en la puesta en carga.

Siempre que se aplique la carga o aparezca la tensión sobre hormigones de mayor edad, resulta evidente que disminuya la deformación de fluencia. Entre otras, esta es una razón más para respetar los tiempos en que debe permanecer un elemento encofrado en el caso de las construcciones in situ. Un retiro temprano del encofrado de una losa, por ejemplo a los 7 días, hace que tan siquiera la carga de peso propio comience a actuar sobre un hormigón más joven e incrementar la susceptibilidad de deformaciones plásticas por fluencia.

- Humedad ambiental.
Una elevada humedad relativa del ambiente mejora la resistencia del hormigón y consecuentemente disminuirán las deformaciones causadas por la fluencia. Los climas continentales, predominante secos, exigen mejores curados para mejorar la resistencia y atenuar la fluencia.
- Calidad del hormigón (cantidad de pasta de cemento por unidad de volumen, relación a/c , etc.)
Cuanto mayor sea la resistencia del hormigón menor será el efecto de la fluencia.
- Tiempo de aplicación de la carga.
Siendo la fluencia un fenómeno asociado a la carga sostenida, es evidente que mientras mayor sea el tiempo de aplicación de la carga, mayor será el efecto de la fluencia.
- Acción de cargas anteriores.
La memoria reológica que poseen los materiales, incluyendo al hormigón, hace que el efecto de cargas anteriores se vaya grabando y agudice el efecto de la fluencia. El reconocimiento de este factor es decisivo en el tratamiento de la construcción evolutiva o por etapa.
- Presencia de armadura en compresión en la sección, etc.
Este factor será comentado más adelante cuando se analice el fenómeno de la fluencia en el caso del hormigón armado.

En realidad la fluencia no se detiene y aun al cabo de muchos años continúa manifestándose, sin embargo es más intensa dentro del primer año de aplicada la carga. Las investigaciones han confirmado que la deformación total permanente es aproximadamente tres veces mayor que la deformación elástica instantánea, aunque en general puede registrarse un incremento entre 2 y 5 veces.

En el caso del hormigón se han propuesto numerosos procedimientos para evaluar la deformación total por fluencia que tiene lugar entre los tiempos t_0 y t . Algunos de ellos se han incluido en diversos Reglamentos Normativos, especialmente europeos, y a continuación se detallará el que reconoce la Instrucción EHE.

Si se define la deformación debida a la fluencia como $\varepsilon_{c\sigma}(t, t_0)$, y se garantiza que la tensión de servicio aplicada en el instante t_0 se sostiene hasta un tiempo ($t > t_0$), asegurándose además que $\sigma_{c,t_0} \leq 0,45f'_{cm}$, se puede aceptar que:

$$\varepsilon_{c\sigma}(t, t_0) = \sigma_c(t_0) \cdot J(t, t_0)$$

En esta enunciación se ha incluido el concepto de **función de fluencia** $J(t, t_0)$, definida como aquella función que expresa el valor de la deformación que corresponde a una tensión unitaria. Recurriendo ahora al carácter aditivo que posee esta deformación (instantánea + diferida), resultaría para cualquier material:

$$J(t, t_0) = \frac{1}{E_{c,t_0}} + \frac{\varphi(t, t_0)}{E_{c,t}}$$

El primer sumando representa la deformación instantánea para la tensión unitaria $\sigma_c(t_0) = 1$, mientras el segundo la deformación de fluencia cuando la misma tensión unitaria se mantiene en el tiempo. Definitivamente, la deformación de fluencia originada por una tensión mayor que la unidad, $\sigma_c(t_0) > 1$, se puede determinar a partir de la función de fluencia mediante la ecuación:

$$\varepsilon_{c\sigma}(t, t_o) = \sigma_c(t_o) \cdot \left(\frac{1}{E_{c,t_o}} + \frac{\varphi(t, t_o)}{E_{c,28}} \right)$$

Siendo:

$$E_{c,t_o} = 8500 \sqrt[3]{f'_{cm}} \quad (\text{Módulo de deformación secante del hormigón en el instante } t_o \text{ de aplicación de la carga, definido en §1.2.6.1})$$

$$E_{c,28} = E_{c,28} = \beta_E E_{cm} \quad (\text{Módulo de deformación longitudinal instantáneo, es decir, tangente en el origen, definido en §1.2.6.1})$$

$$\varphi(t, t_o) = \varphi_o \cdot \beta_c(t, t_o) \quad (\text{Coeficiente de fluencia para una temperatura de } 20^\circ\text{C})$$

Esta última expresión no es aditiva, es decir, la fluencia entre los tiempos t_1 y t_2 , tal que $t_2 > t_1 > t_o$, no es $\varphi_o \cdot \beta_c(t_2, t_1)$, sino $\varphi_o \cdot [\beta_c(t_2, t_o) - \beta_c(t_1, t_o)]$, siendo:

Este modelo que se explica para determinar la deformación por fluencia $\varepsilon_{c\sigma}(t, t_o)$ es laborioso por la cantidad de coeficientes que deben ser evaluados, e incluso por las rectificaciones que se proponen cuando la temperatura es distinta de 20°C . A continuación se describe el procedimiento para evaluar cada uno de estos coeficientes.

Determinación del coeficiente φ_o que aparece en el coeficiente de fluencia $\varphi(t, t_o)$

$$\varphi_o = \varphi_{HR} \cdot \beta_{(f'_{cm})} \cdot \beta_{(t_o)}$$

$$\beta_{(t_o)} = \frac{1}{0,1 + (t_o)^{0,2}}$$

$$\beta_{(f'_{cm})} = 16,8 / \sqrt{f'_{cm}}$$

$$\varphi_{HR} = 1 + \frac{100 - HR}{9,9 \sqrt[3]{e_f}}$$

Siendo:

HR : Humedad relativa del ambiente en que está ubicado el elemento (%)

$e_f = 2A_c/P_c$ (mm) : Espesor ficticio

A_c : Área de la sección transversal del elemento que se analiza (mm^2)

P_c : Perímetro en contacto con la atmósfera de la sección transversal que se analiza (mm)

$f'_{cm} \approx f'_c + 8 \text{ mPa}$: Resistencia media del hormigón a los 28 días en condiciones estándar (mPa).

t_o : Instante de la puesta en carga, expresado en **días** a partir de la fecha de hormigonado (en el caso del pretensado, por ejemplo, se trata de la cantidad de días que transcurren desde el vaciado del hormigón, y hasta que se transfiere la fuerza de pretensado). Si la temperatura es **distinta de 20°C** , este tiempo se corrige cambiando t_o por t_r , según se definiera en §1.2.9.

Determinación del coeficiente $\beta_c(t, t_o)$ que aparece en el coeficiente de fluencia $\varphi(t, t_o)$

$$\beta_c(t, t_o) = \left[\frac{(t - t_o)}{\beta_H + (t - t_o)} \right]^{0,3}$$

$$\beta_H = 1,5e_f[1 + (0,012HR)^{18}] + 250 \leq 1\,500$$

Correcciones al Coeficiente de Fluencia:

Cuando la temperatura que rodea al elemento es distinta de **20°C**, el coeficiente de fluencia así calculado debe recibir las siguientes correcciones:

- a) Corrección por temperatura durante el **período de curado**.

Esta corrección consiste en reemplazar el tiempo t_o real, por aquel otro que viene dado por la fórmula:

$$t_o = t_r \left[1 + \frac{9}{2 + (t_r)^{1,2}} \right]^\alpha \geq 0,5 \text{ días}$$

$$\alpha: \begin{cases} -1 & \text{para cementos de endurecimiento lento} \\ 0 & \text{para cementos de endurecimiento normal o rápido} \\ 1 & \text{para cementos de alta resistencia y endurecimiento rápido} \end{cases}$$

El tiempo t_r se evalúa según se explicó en §1.2.9

- b) Corrección por temperatura durante el **período de aplicación de la carga si la temperatura es distinta de 20°C, pero constante**.

El efecto de la temperatura durante la etapa de curado fue ya tenido en cuenta mediante la corrección anterior, sin embargo, si durante el período de acción de la carga externa la temperatura es constante pero diferente de 20°C, su efecto sobre la fluencia exige las siguientes dos correcciones:

- b.1) Sustituir el coeficiente φ_{HR} por $\varphi_{HR,T}$ en la expresión para calcular φ_o , siendo:

$$\varphi_{HR,T} = e^{0,015(T-20)} + (\varphi_{HR} - 1)e^{0,015\sqrt[5]{(T-20)^6}}$$

- b.2) Sustituir el coeficiente β_H por β_{HT} en la expresión para calcular $\beta_c(t, t_o)$, siendo:

$$\beta_{HT} = \beta_H \cdot \beta_T$$

$$\beta_T = e^{\left(\frac{1\,500}{273+T} - 5,12\right)}$$

T : Temperatura durante el tiempo de aplicación de la carga (°C)

- c) Corrección por temperatura durante el **período de aplicación de la carga si la temperatura es distinta de 20°C, pero variable**.

Si durante el período de carga que se estudia se experimenta una modificación de temperatura ΔT , variable por intervalos de tiempo, su efecto instantáneo sobre la fluencia puede ser tenido en cuenta considerando un nuevo coeficiente de fluencia $\varphi(t, t_o, T)$, en lugar de $\varphi(t, t_o)$. Este nuevo coeficiente se define mediante la expresión:

$$\varphi(t, t_o, T) = \varphi_o \cdot \beta_c(t, t_o) + \Delta\varphi_{\Delta T}$$

$$\text{Con } \Delta\varphi_{\Delta T} = 0.0004(T - 20)^2$$

Hasta aquí la descripción del procedimiento analítico para evaluar la deformación debida a la fluencia. Es cierto que involucra a un importante grupo de variables (temperatura durante el curado y durante el tiempo de aplicación de la carga, humedad relativa del ambiente, tipo de cemento, edad del hormigón en la puesta en carga, etc.), incluso, exigiendo correcciones cuando la temperatura sea distinta de 20°C que fue la que se garantizara durante las investigaciones que condujeron a estas formulaciones.

Sin embargo, a pesar de la complejidad analítica que presenta este modelo para evaluar la deformación por fluencia $\varepsilon_{cs}(t, t_o)$ entre los tiempos t y t_o , en algunos cálculos estructurales como por ejemplo, la evaluación de la pérdida de tensión que experimenta un acero pretensado debida a la fluencia del hormigón, la precisión que con él se alcanza comparada con la de otros procedimientos más simplistas, puede justificar su preferencia. La **Tabla 1.8**²³ ofrece directamente los valores del coeficiente de fluencia $\varphi(t, t_o)$ para un hormigón de $f'_c = 37.5 \text{ MPa}$, un tiempo t_o variable y considerando $t = 10\,000 \text{ días}$.

De la **Tabla 1.8** pueden extraerse las siguientes conclusiones:

- Al aumentar la humedad relativa del ambiente, disminuye la deformación de fluencia.
- Cuanto mayor sea la edad del hormigón en la puesta en carga, menor es la deformación de fluencia.
- Al aumentar el espesor ficticio de la sección, menor es la deformación de fluencia.

TABLA 1.8 Valores del coeficiente de fluencia $\varphi(t, t_o)$ para un hormigón de $f'_c = 37.5 \text{ MPa}$.

Edad puesta en carga t_o (días)	Humedad Relativa (50%)			Humedad Relativa (60%)			Humedad Relativa (70%)			Humedad Relativa (80%)		
	Espesor Ficticio e_f (mm)			Espesor Ficticio e_f (mm)			Espesor Ficticio e_f (mm)			Espesor Ficticio e_f (mm)		
	50	150	600	50	150	600	50	150	600	50	150	600
1	5,4	4,4	3,6	4,8	4,0	3,3	4,1	3,6	3,0	3,5	3,1	2,7
7	3,8	3,1	2,5	3,3	2,8	2,3	2,9	2,5	2,1	2,5	2,2	1,9
14	3,3	2,7	2,2	2,9	2,4	2,0	2,5	2,2	1,8	2,2	1,9	1,7
28	2,9	2,4	1,9	2,6	2,1	1,8	2,2	1,9	1,6	1,9	1,7	1,5
60	2,5	2,1	1,6	2,2	1,9	1,5	1,9	1,7	1,4	1,6	1,4	1,3
90	2,3	1,9	1,5	2,0	1,7	1,4	1,8	1,5	1,3	1,5	1,3	1,2
365	1,8	1,4	1,2	1,6	1,3	1,1	1,4	1,2	1,0	1,2	1,0	0,9
1800	1,3	1,1	0,8	1,1	1,0	0,8	1,0	0,9	0,7	0,8	0,7	0,7

- El coeficiente de fluencia se mueve 0,7 y 5,4, lo que dice que para cargas de servicio el efecto de la carga mantenida llega a incrementar la deformación elástica inicial aproximadamente de una a cinco veces, siendo mayor este incremento cuanto menor es la humedad relativa, más joven es el hormigón al cargarse y menor el espesor ficticio de la

²³ Tomada del libro. "Proyecto y Cálculo de Estructuras de Hormigón". Calavera, J. Tomo I. INTMAC. S.A. España. 1999. (Pág. 560)

sección. Para Cuba, con una humedad relativa media en condiciones normales de aproximadamente 80%, y cargado el elemento pasado los 28 días, este coeficiente se sitúa entre 1.5 y aproximadamente 2.

1.3.2 LA RETRACCIÓN O CONTRACCIÓN DEL HORMIGÓN.

La **retracción** es el fenómeno asociado a la disminución de volumen que experimenta cualquier espécimen de hormigón durante el fraguado y endurecimiento en ambiente normal (al aire), y se traduce en una deformación volumétrica de la pieza.

Se debe en lo fundamental a la eliminación del exceso de agua presente en la mezcla, lo mismo por la hidratación de las partículas de cemento que no llegaron a hidratarse inicialmente (demandan agua, generando una reacción exotérmica que da lugar a los componentes aglutinantes de la pasta), que por la evaporación y desecación progresiva que sufre la pasta al ser expuesto el hormigón al aire. Es un fenómeno dañino y a la vez prácticamente inevitable, razón que justifica conocer los factores que influyen en él con el interés de aliviar sus nocivos efectos. Entre los principales factores se señalan:

- Humedad relativa ambiental que rodea a la pieza durante el fraguado.
Cuanto mayor sea la humedad más se dificulta que el agua contenida en la mezcla se pierda y en consecuencia la retracción disminuirá. Por tal razón se deben evitar en lo posible los procesos de hormigonado en medio de situaciones climáticas muy secas, o tomar las medidas que correspondan cuando sea inevitable.
- Relación agua/cemento.
En la medida en que crece la relación α/c , mayor cantidad de agua puede eliminarse por cualquiera de las vías descritas anteriormente y mayor será la deformación por retracción. A la vez crecerán las tracciones que aparecen en el hormigón, aumentando así el riesgo de la fisuración temprana.
- Cantidad de pasta por unidad de volumen.
Un incremento de la pasta por unidad de volumen demandaría mayor cantidad de agua para su hidratación, agudizando el fenómeno de retracción y aumentando las tracciones que tienen lugar en la masa de hormigón.
- Tipo de cemento (atendiendo fundamentalmente a la finura del grano)²⁴.
Los cementos con mayor finura aumentan la superficie de hidratación y permiten predecir pastas más retráctiles.
- Tipo y tiempo de Curado.
El curado se aplica fundamentalmente para atenuar la pérdida del agua de la mezcla con el interés de reducir la retracción. Cuanto mayor sea la eficacia del curado menor será la retracción, por eso los curados por inmersión resultan en extremo eficientes, aunque improbables en construcciones in situ. Los elementos superficiales como losas y muros exigen especial atención durante el curado, lo mismo en tiempo que en efectividad, porque

²⁴ A pesar de que se habla de cementos sin retracción, no ha sido posible elaborar un cemento que impida totalmente la retracción, ni tan siquiera los llamados cementos expansivos.

exponen una mayor superficie de intercambio con el ambiente y en consecuencia una mayor pérdida de agua.

- Presencia de la armadura de refuerzo en la pieza.

La presencia de armadura (acero) en la masa de hormigón disminuye las deformaciones debidas a la retracción pero incrementa la tensión de tracción que aparecería en el hormigón, tanto más cuanto mayor sea la cuantía de refuerzo. Luego se regresará a este efecto.

La retracción es una deformación impuesta (no una fuerza) que origina tensiones de tracción en la masa de hormigón coartada de deformarse libremente, tan siquiera por el propio molde que contiene a la masa de hormigón en estado plástico. Estas tracciones ocasionan a su vez la fisuración prematura del hormigón, y para atenuar los efectos negativos del fenómeno se puede recurrir a muy diversas alternativas, entre otras: empleo de juntas permanentes en la estructura o de juntas temporales (esta es una solución muy recurrente en el vaciado de elementos superficiales, dividiendo la superficie en paños de pequeña área, alrededor de 12 a 16m², para luego ir colocando el hormigón en paños alternados. Una vez endurecido el hormigón de los paños rellenados en la primera fase, y haberse desarrollado en ellos la mayor parte de la retracción, se procede al vaciado en los restantes paños. La tecnología descrita es muy empleada en la construcción de pisos de hormigón), selección de una efectiva técnica de curado especialmente en las primeras edades, empleo de armadura de refuerzo de pequeño diámetro y convenientemente repartida para distribuir mejor las fisuras y a la vez disminuir su abertura (variante muy empleada en losas que estructuralmente trabajan sólo en una dirección).

Los modelos afinados que se conocen para estimar el acortamiento que experimenta el hormigón a causa de este fenómeno son todos complejos, al igual que el que se describiera para la fluencia. Aquí se expondrá una síntesis de uno de ellos, no obstante, cuando no se requiera una elevada precisión en los cálculos para considerar la retracción mediante la deformación (ϵ_{cs})²⁵ que ella provoca, pueden adoptarse los siguientes valores promedios de deformación unitaria debido a este fenómeno:

Hormigón en Masa: $\epsilon_{cs} = \epsilon_{cs}^{hs} = 0,00035 = 0,35\text{mm}/1,00\text{m}$

Hormigón Armado²⁶: $\epsilon_{cs} = \epsilon_{cs}^{ha} = 0,00025 = 0,25\text{mm}/1,00\text{m}$

Para evaluar el acortamiento relativo que experimenta el hormigón debido a la retracción entre los tiempos t y t_r , que se designará por $\epsilon_{cs}(t, t_r)$, se propone a continuación uno de los modelos afinados que reconoce la literatura especializada en el tema. Mediante este modelo y cuando la temperatura durante el fraguado es de 20°C, la deformación unitaria debida a la retracción se determina mediante la siguiente expresión:

$$\epsilon_{cs}(t, t_r) = \epsilon_{cs}(0) \cdot \beta_s(t - t_r)$$

²⁵ El subíndice "cs" se ha empleado para indicar que se trata de la deformación del hormigón (c: concrete) debido a la retracción (s: shrinkage). A su vez los superíndices "hs" y "ha" significan hormigón simple y hormigón armado, respectivamente.

²⁶ En realidad el valor que se indica depende mucho de la cuantía de refuerzo que se considere, aumentando tanto cuanto aumente la cuantía, como evidencia del incremento de la restricción que impone el acero al acortamiento del hormigón, evidenciándose la aparición de tensiones mayores de tracción en el hormigón con el incremento de la cuantía.

Esta expresión no tiene tampoco carácter aditivo, es decir, la retracción entre dos instantes t_1 y t_2 , tal que $t_2 > t_1 > t_0$, no es $\varepsilon_{cs}(t_1, t_2)$, si no $[\varepsilon_{cs}(t_2, t_0) - \varepsilon_{cs}(t_1, t_0)]$.

Determinación del coeficiente base de retracción $\varepsilon_{cs}(0)$ que aparece en la expresión $\varepsilon_{cs}(t, t_r)$

$$\varepsilon_{cs}(0) = \beta_{HR} [160 + \beta_{sc}(90 - f'_{cm(28)})] 10^{-6}$$

$f'_{cm(28)} \approx f'_c + 8 \text{ MPa}$
 $\beta_{sc}: \begin{cases} 4 & \text{para cementos de endurecimiento lento} \\ 5 & \text{para cementos de endurecimiento normal o rápido} \\ 8 & \text{para cementos de alta resistencia y endurecimiento rápido} \end{cases}$
 $\beta_{HR}: \begin{cases} -1,55 \left[1 - \left(\frac{HR}{100} \right)^3 \right] & \text{para } 40\% < HR < 99\% \\ 0,25 & \text{para } HR \geq 99\% \end{cases}$
 HR : Humedad relativa (%)

Determinación del coeficiente de desarrollo de la retracción en el tiempo $\beta_s(t - t_r)$

$$\beta_s(t - t_r) = \sqrt{\frac{(t - t_r)}{0,035e_f^2 + (t - t_r)}}$$

Siendo:

t : Edad del hormigón en el momento en que se desea evaluar la retracción. **No necesita corrección.**

t_r : Edad a la que comienza a manifestarse el fenómeno de la retracción que, para los curados habituales y a temperatura ambiente, se puede estimar en 1 día. **No es necesario corregirlo.**

e_f : Definido en §1.3.1

Correcciones para temperaturas distintas a 20°C:

Si la temperatura durante el desarrollo de la retracción es distinta a 20°C se deben realizar las siguientes correcciones:

a) Corrección en la evaluación del coeficiente $\beta_s(t - t_r)$.

En estos casos se debe modificar la ecuación descrita anteriormente para evaluar $\beta_s(t - t_r)$. En su lugar considerar:

$$\beta_s(t - t_r) = \sqrt{\frac{(t - t_r)}{\alpha_{rt} + (t - t_r)}}$$

Siendo:

$$\alpha_{rt} = (0,035e_f^2)e^{-0,06(T-20)} \rightarrow \begin{cases} e_f \rightarrow mm \\ T \rightarrow ^\circ C \end{cases}$$

b) Corrección en la evaluación del coeficiente $\varepsilon_{cs}(0)$.

En lugar de emplear el coeficiente $\varepsilon_{cs}(0)$ como se definiera anteriormente, se debe incluir en su evaluación el factor β_{rT} , es decir:

$$\varepsilon_{cs}(0) = (\beta_{rT}) \cdot \beta_{HR} [160 + \beta_{sc}(90 - f'_{cm(28)})] 10^{-6}$$

Siendo:

$$\beta_{rT} = 1 + \left(\frac{8}{103 - HR} \right) \left(\frac{T - 20}{40} \right)$$

La **Tabla 1.9**²⁷ ofrece los valores del coeficiente de retracción ε_{cs} para un hormigón de $f'_c = 37,5 MPa$

TABLA 1.9 Valores del coeficiente de retracción ε_{cs} para un hormigón de $f'_c = 37,5 MPa$.

$(t - t_r)$ (días)	Valor del Coeficiente de Retracción $\varepsilon_{cs}(t, t_r) \cdot 10^{-6}$											
	Humedad Relativa (50%)			Humedad Relativa (60%)			Humedad Relativa (70%)			Humedad Relativa (80%)		
	Espesor Ficticio e_f (mm)			Espesor Ficticio e_f (mm)			Espesor Ficticio e_f (mm)			Espesor Ficticio e_f (mm)		
	50	150	600	50	150	600	50	150	600	50	150	600
14	-193	-69	-17	-173	-61	-15	-145	-51	-13	-107	-38	-10
30	-262	-99	-25	-235	-89	-23	-197	-75	-19	-146	-55	-14
90	-369	-166	-44	-331	-149	-39	-277	-125	-33	-206	-93	-24
365	-466	-292	-87	-417	-262	-78	-350	-219	-65	-260	-163	-49
1825	-507	-434	-185	-454	-388	-165	-381	-326	-139	-283	-242	-103
10 000	-517	-499	-345	-463	-448	-309	-388	-375	-259	-288	-279	-192

De la **Tabla 1.9** se pueden extraer las siguientes conclusiones:

- Al aumentar la humedad relativa del ambiente, disminuye la deformación por retracción, algo que ya fue comentado.
- Cuanto mayor sea el intervalo de tiempo dentro del cual se quiera evaluar la deformación por retracción, tanto mayor será esta.

²⁷ Tomada del Calavera, J. "Proyecto y Cálculo de Estructuras de Hormigón". Tomo I. INTEMAC. S.A. España. 1999. (Pág. 563)

- Al aumentar el espesor ficticio de la sección, menor es la deformación por retracción.
- El coeficiente de retracción se mueve aproximadamente entre 0,0002 y 0,0005 para humedades relativas bajas, y entre 0,00001 y 0,0002 para humedades relativas altas, lo que confirma la decisiva importancia de un buen curado.

1.4 INFLUENCIA DE LA TEMPERATURA EN LA RESISTENCIA DEL HORMIGÓN.

Como sucede a cualquier otro material, el hormigón se ve sometido a cambios volumétricos cuando la temperatura que lo rodea se modifica. Estos cambios volumétricos dependerán de su coeficiente de dilatación térmica (α), el que a su vez depende de la composición misma del hormigón.

Las investigaciones realizadas han permitido verificar que el coeficiente de dilatación térmica del hormigón se sitúa en el rango de ($9,2 \cdot 10^{-6}/^{\circ}\text{C} \rightarrow 11 \cdot 10^{-6}/^{\circ}\text{C}$) para temperaturas entre -15°C y 50°C . Algunos reglamentos proponen a los efectos del cálculo, y hasta una temperatura de 150°C , el valor $\alpha = 10^{-5}/^{\circ}\text{C}$, es decir, $\alpha = 0,01\text{mm}/\text{m} \cdot ^{\circ}\text{C}$, ventajosamente muy similar al coeficiente de dilatación del acero. A manera de referencia cualitativa, la **Tabla 1.10** expone el efecto de la temperatura sobre el hormigón.

TABLA 1.10 Efectos de las altas temperaturas sobre el hormigón.²⁸

Temperatura	Efecto sobre el hormigón
$< 100^{\circ}\text{C}$	Ninguna influencia
$100^{\circ}\text{C} - 150^{\circ}\text{C}$	El hormigón cede su agua capilar y de adsorción
150°C durante un tiempo prolongado	Ligera disminución de la resistencia a compresión y fuerte caída de la resistencia a tracción
Hasta 150°C en períodos cortos	Disminución de la resistencia a tracción sin afectar a la de compresión
$300^{\circ}\text{C} - 500^{\circ}\text{C}$	Pérdida de un 20% de la resistencia a compresión; la de tracción puede haber desaparecido
$500^{\circ}\text{C} - 900^{\circ}\text{C}$	La cal hidratada se destruye por la pérdida del agua de cristalización (agua combinada químicamente)
$900^{\circ}\text{C} - 1\,000^{\circ}\text{C}$	La deshidratación es total y ocurre la destrucción completa del hormigón.

Se ha podido comprobar que la contracción producida por un descenso de temperatura es análogo al de la retracción, incluso algunos investigadores plantean que la retracción es equivalente a un descenso de la temperatura de aproximadamente 25°C , y para atenuar los efectos nocivos de los incrementos de temperatura sobre las estructuras, se debe prever juntas de dilatación térmica que permitan los

²⁸ Tomado de la Edición 14 del libro "Hormigón Armado" de Jiménez Montoya, García Meseguer y Morán Cabré (pág. 84)

movimientos térmicos que tienen lugar. De ahí la importancia de conocer las tensiones que se originan a causa de esta deformación unitaria, especialmente para investigar la ubicación y dimensiones de las juntas de dilatación en las estructuras construidas con este material.

1.5 DEFORMACIÓN TOTAL DEL HORMIGÓN.

Conocer la deformación del hormigón en cada instante es de sobrada trascendencia durante algunos cálculos que deben realizarse en la etapa de proyecto, pero especial importancia posee cuando se trata de construcciones evolutivas, o cuando se procura evaluar la pérdida diferida de tensión que tiene lugar en el refuerzo pretensado, por sólo citar dos ejemplos. Un enfoque más moderno para evaluar esta deformación es incluir dentro de un mismo modelo las deformaciones que experimenta el hormigón debido a la acción de las cargas externas, a la retracción, la fluencia y la temperatura. A continuación se expondrá un enfoque frecuentemente observado en las dos últimas décadas.

La deformación total en el instante t , de un hormigón sometido a carga en el instante t_o , bajo una tensión constante $\sigma_c(t_o)$, puede llegar a descomponerse de la manera siguiente:

$$\varepsilon_c(t) = \varepsilon_{ci}(t_o) + \varepsilon_{c\sigma}(t, t_o) + \varepsilon_{cs}(t, t_o) + \varepsilon_{c,T}$$

Siendo:

$\varepsilon_c(t)$: Deformación total en el instante t .

$\varepsilon_{ci}(t_o)$: Deformación instantánea bajo carga.

$\varepsilon_{c\sigma}(t, t_o)$: Deformación de fluencia hasta el instante $t > t_o$

$\varepsilon_{cs}(t, t_o)$: Deformación de retracción hasta el instante $t > t_o$

$\varepsilon_{c,T}$: Deformación térmica debida a la variación de temperatura.

No obstante, se destaca que en el cálculo de estructuras de hormigón armado es poco frecuente que se llegue a niveles de exactitud tan exquisitos como para incluir en el análisis de los esfuerzos interiores, aquellos que generan la retracción y la fluencia, pues sus magnitudes son aparentemente despreciables frente a los esfuerzos generados por las cargas impuestas (permanentes y de servicio), de viento, sismo, u otras, aunque se llama la atención que bajo determinadas premisas es imperdonable ignorarlos.

De hecho, el ACI incluye en su **Artículo 9.2 Resistencia Requerida**, una combinación de carga que incluye las deformaciones impuestas (T) debidas al flujo plástico y la retracción de fraguado del hormigón, además de las originadas por los cambios de temperatura y los posibles asientos diferenciales:

$$U = 1.2(D + F + T) + 1.6(L + H) + 0.5(L_r \text{ ó } S \text{ ó } R)$$

D : Carga Muerta

F : Carga debida al peso o empuje de fluido de densidad conocida y altura máxima controlada

T : Efectos acumulados de temperatura, fluencia, retracción ó asientos diferenciales (deformaciones impuestas)

H : Carga debida al peso o empuje de sólidos, del agua inter poro, o cualquier otro material.

L y L_r : Carga Viva y Carga Viva de cubierta

S y R : Carga por nieve o por lluvia

1.6 PROPIEDADES DEL ACERO DE REFUERZO

La baja resistencia del hormigón a tracción es una de las principales causas que limita el empleo del hormigón en masa, y para dotar a los elementos estructurales de suficiente capacidad resistente a esfuerzos de tracción directa o inducida, es que se emplean fundamentalmente las armaduras de acero. Independientemente de que este pueda ser el principal encargo del refuerzo en el hormigón, otras funciones llega a desempeñar. Basta señalar las siguientes:

- Incrementar la capacidad de carga a compresión (columnas, vigas de peralte restringido, etc.)
- Resistir los esfuerzos de tracción diagonal originados por el cortante.
- Reducir la esbeltez de otras barras de acero sometidas a compresión, mediante el empleo de cercos.
- Para la distribución de cargas.
- Para resistir tensiones de tracción originadas por la retracción, fluencia, variación de la temperatura, etc.

La alternativa más utilizada para reforzar al hormigón es mediante el empleo de barras de acero o mallas electrosoldadas, y las tipologías de estos refuerzos, lo mismo que sus características mecánicas, varían de un país a otro. Aquí se expondrán los rasgos esenciales de los aceros que se producen actualmente en Cuba para el refuerzo del hormigón, contenidos en la **NC 7: 2002 “Barras de acero para refuerzo de hormigón. Especificaciones”**, elaborada por el Comité Técnico de Normalización NC/CTN 25 de Acero para refuerzo de hormigón.

1.6.1 TIPOS DE ACERO PARA EL REFUERZO DEL HORMIGÓN

El acero es un material artificial que se consigue, básicamente, a partir de la combinación de hierro (F_e) y carbono (C), con otras sustancias alternativamente añadidas como el fósforo, azufre, nitrógeno, cromo, molibdeno, vanadio, etc. Además para conseguirlo se sigue un proceso industrial que puede ser por una de las dos vías siguientes: laminado en caliente, o estirado (trefilado) en frío. Aunque no es objeto de esta materia profundizar en estos aspectos, se llama la atención acerca de la influencia, lo mismo de la composición química que del proceso de fabricación que se siga, en las cualidades del acero que se fabrica y que a los fines del refuerzo del hormigón, pueden ser clasificados en **aceros naturales u ordinarios** y **aceros de alto límite elástico**.

Los **aceros naturales u ordinarios**, generalmente empleados en hormigón armado, presentan muy bien definido su escalón de fluencia como luego se precisa, y se obtienen mediante procesos de laminado en caliente. Poseen además un bajo contenido de carbono y en consecuencia menor resistencia pero mayor ductilidad. Mientras tanto los **aceros de alto límite elástico**, de empleo más profuso en hormigón pretensado, aunque algunos países producen determinados grados también para hormigón armado, son aceros que no poseen bien definido su escalón de fluencia y se elaboran mediante procesos de estiramiento en frío. En la composición química de estos últimos se aprecia una mayor presencia de carbono y resultan ser más resistente, pero a la vez menos dúctiles que los aceros naturales. En resumen, cuanto más elevada es la cantidad de carbono que se adiciona, más resistente es el acero que se obtiene, pero menor será su ductilidad.

1.6.2 PRINCIPALES CARACTERÍSTICAS MECÁNICAS DE LOS ACEROS DE REFUERZO

Para la caracterización cualitativa de un acero resulta necesario conocer sus principales propiedades mecánicas, entre las que se pueden señalar:

- Carga unitaria máxima a tracción o resistencia última (f_{su} ó f_{pu})
- El límite elástico aparente (f_y) o convencional ($f_{y0.2}$ ó f_{py}). El primero para los aceros naturales y el segundo para los aceros de alto límite elástico
- Módulo de deformación longitudinal o módulo de elasticidad (E_s ó E_p)
- El alargamiento bajo carga máxima (ε_{su})
- La relación (f_{su}/f_y) para los aceros ordinarios o ($f_{su}/f_{y0.2}$) para los de alto límite elástico.
- La aptitud al doblado o al desdoblado

La resistencia (f_{su} ó f_{pu}) y el límite elástico (f_y ó $f_{y0.2}$) definen las cualidades de resistencia del acero, mientras que ε_{su} y la relación f_{su}/f_y refieren su grado de ductilidad. Representa un compromiso la prioridad que se dé durante el proceso de fabricación del acero a cada aspecto de los dos señalados, pues se contraponen, es decir, si se desea priorizar la resistencia se compromete la ductilidad, y viceversa. La determinación de la resistencia, el límite elástico, y el alargamiento se determinan mediante ensayos estandarizados a tracción realizados a probetas del acero que se estudia.

1.6.3 DIAGRAMA TENSIÓN – DEFORMACIÓN DEL ACERO DE REFUERZO

El diagrama tensión-deformación de cualquier acero se determina mediante el ensayo hasta la rotura de probetas provenientes del lote que se desea estudiar. En el caso del acero el ensayo más generalizado es el de tracción y existen fundamentalmente dos razones que justifican esta aseveración. En primer lugar, mediante un ensayo a tracción se evade la posible pérdida de estabilidad de la probeta durante el ensayo, antes que se alcance la rotura, y en segundo lugar ha podido comprobarse que las curvas cargas-desplazamiento (P vs Δl), o mejor aun tensión – deformación (f_s vs ε_s) que resultan de los ensayos a tracción y a compresión, en el caso del acero, son sensiblemente iguales, lo que ratifica la conveniencia de estandarizar el ensayo a tracción. Habitualmente las probetas que se ensayan se toman de barras cuyo diámetro (inicial) es $d_o = 10mm$, y de una longitud inicial efectiva igual a (n) el diámetro, es decir, (nd_o) , encontrándose n entre 5 y 10, aunque puede considerarse otro diámetro $d_o \neq 10mm$. La cualidad de las curvas de comportamiento del acero, es decir, sus leyes tensión-deformación, varía con el tipo de acero. La Figura 1.17 muestra curvas “típicas” de comportamiento tanto de los **aceros naturales u ordinarios**, como de los **aceros de alto límite elástico**.

Se define la **resistencia o carga unitaria de rotura** (f_{su}) a la máxima tensión que es capaz de soportar la barra ensayada. Se le llama unitaria ya que al reducirse la sección transversal de la barra por el efecto de Poisson (estricción), los valores que se registran durante el ensayo se refieren a la sección inicial de la barra y no a la reducida.

Por su parte el **límite elástico** (f_y), que también se refiere a la sección inicial, corresponde a la tensión que puede soportar el material sin que se produzcan deformaciones plásticas diferidas representativas. Existen aceros en los que esta tensión se aprecia con nitidez durante su ensayo como sucede en los aceros **con escalón de fluencia**, llamados comúnmente aceros naturales, y en ellos el ensayo descubre con transparencia un escalón en el que se registra un incremento progresivo de la

deformación bajo tensión sostenida, precisamente el escalón de fluencia. La máxima tensión que soporta el material sin que tengan lugar deformaciones plásticas, coincidente en estos aceros con la tensión a la cual se inicia la fluencia es, precisamente, su **límite elástico aparente**. Habitualmente las barras de refuerzo se comercializan mediante esta cualidad.

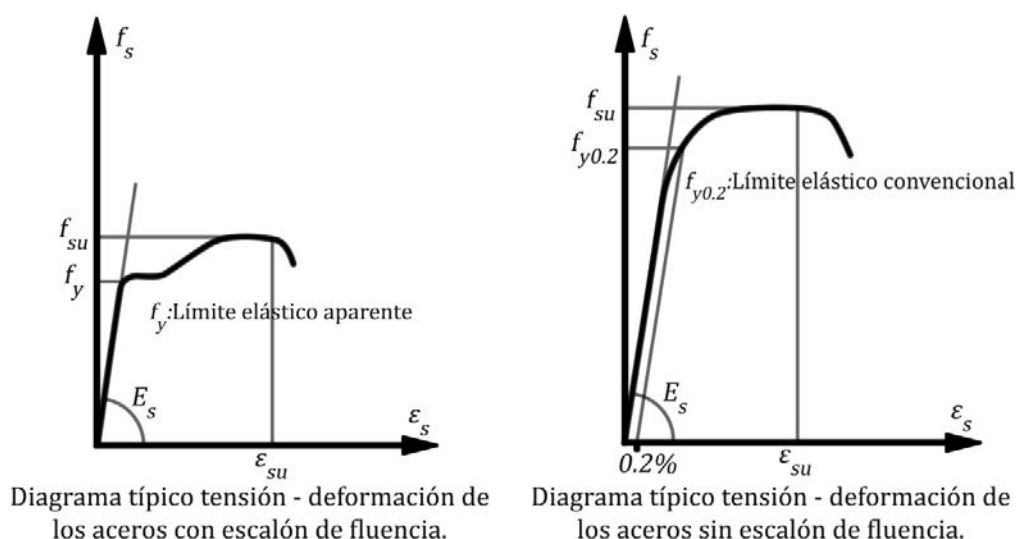


Figura 1.17 Diagramas de comportamiento de los aceros naturales y de alto límite elástico.

También existen otros en los que el ensayo no permite definir esta tensión, de ahí que para ellos se establezca internacionalmente la convención de declarar como **límite elástico convencional** a aquella tensión a la que corresponde una deformación remanente del 2‰, es decir, una deformación $\epsilon_s = 0.002$, denotando esta tensión como $f_{y0.2}$.

La relación f_{su}/f_y es un indicador razonable para inferir el grado de ductilidad del acero, comprendiéndose que cuanto mayor sea, mayor será la ductilidad.

1.6.3.1 DIAGRAMA TENSIÓN – DEFORMACIÓN CARACTERÍSTICO DEL ACERO NATURAL

El diagrama tensión-deformación característico refiere aquellos valores de tensión que presentan, para deformaciones entre cero y un valor límite definido como ϵ_{su} , una probabilidad de un 5% de no alcanzar el valor de tensión registrado durante el ensayo, es decir, un nivel de confianza del 95%. En realidad estos son los diagramas que se incluyen en los reglamentos, y representan un diagrama simplificado que facilita la deducción de los modelos analíticos que incluyen las ecuaciones de campo.

Queda por definir el valor de la deformación máxima ϵ_{su} hasta la que se extiende el diagrama simplificado. El ACI no acota de manera explícita esta deformación, mientras los reglamentos europeos la limitan a 1%, es decir, $\epsilon_{su} = 0.01$. Este límite será el que reconozca este texto.

Como en la práctica no siempre se cuenta con datos de ensayos lo suficientemente amplios para construir el diagrama característico de un acero dado, los reglamentos refieren una propuesta que es la que se emplea en el cálculo estructural como parte de la actividad de proyecto. La Figura 1.18 ilustra la propuesta que reconocerá el reglamento cubano para el cálculo y diseño de las estructuras de hormigón.

En estos aceros el valor de la tensión f_y se utiliza para definir su marca o grado mediante el cual se comercializa. Por ejemplo, si se trata del acero G60 significa que $f_y = 60 \cdot 10^3 \text{psi} = 420 \text{MPa}$ ²⁹.

Si el diagrama característico reconoce que a partir de la deformación de fluencia ϵ_y la tensión no es constante sino que se incrementa linealmente hasta alcanzar el valor f_u , correspondiente a la deformación máxima ϵ_u (ver Figura 1.18), se puede considerar el nivel de ductilidad del acero. Algunas instrucciones definen los siguientes límites:

Gran ductilidad:	$f_u/f_y \geq 1.15$	y	$\epsilon_u \geq 6\%$
Alta ductilidad:	$1.08 \leq f_u/f_y < 1.15$	y	$5\% \leq \epsilon_u < 6\%$
Ductilidad normal:	$1.05 \leq f_u/f_y < 1.08$	y	$2.5\% \leq \epsilon_u < 5\%$
Baja ductilidad:	$f_u/f_y < 1.05$	y	$\epsilon_u < 2.5\%$

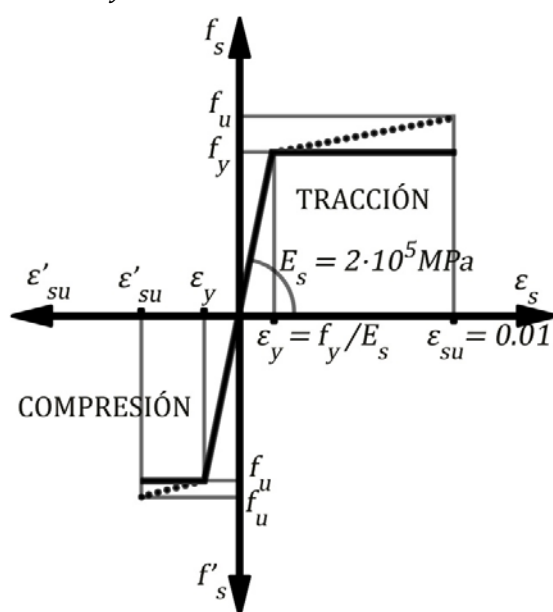


Figura 1.18 Diagrama característico para los aceros naturales

1.6.3.2 DIAGRAMA TENSIÓN – DEFORMACIÓN CARACTERÍSTICO DEL ACERO SIN ESCALÓN DE FLUENCIA

Se trata de los aceros generalmente denominados de alto límite elástico (ALE). Su tecnología de fabricación puede seguir tratamientos térmicos (aceros patentados o aceros templados y revenidos), o tratamientos mecánicos (aceros trefilados o aceros estirados por tracción o torsión en frío). Este es el tipo de acero empleado en el hormigón pretensado y su diagrama tensión-deformación, incluyendo su módulo de deformación E_p , debe ser suministrado por el fabricante.

La principal singularidad de estos aceros, en contraste con los aceros naturales, es que no muestran un punto de fluencia definido, es decir, no fluyen bajo esfuerzos constantes o prácticamente constantes, pues la fluencia se desarrolla gradualmente y la curva continúa aumentando poco a poco en el rango inelástico hasta que se alcanza la rotura. Esta es la razón por la que a ellos se les define un límite de fluencia y en realidad se hace de forma algo arbitraria, como por ejemplo, considerar para alambres y torones que la tensión de fluencia es aquella a la que corresponde una elongación total del 1%, y del

²⁹ La unidad psi (pound square inch) significa lb/plg^2 y se puede comprobar que $1\text{psi} \approx 0.007\text{MPa}$.

0.7% para barras de acero aleado. La Figura 1.19³⁰ muestra diferentes curvas tensión-deformación unitaria para barras, alambres y torones de distinto Grado, e incluye el diagrama correspondiente al acero natural de grado G-60 para ilustrar las diferencias cualitativas de ambos tipos de acero.

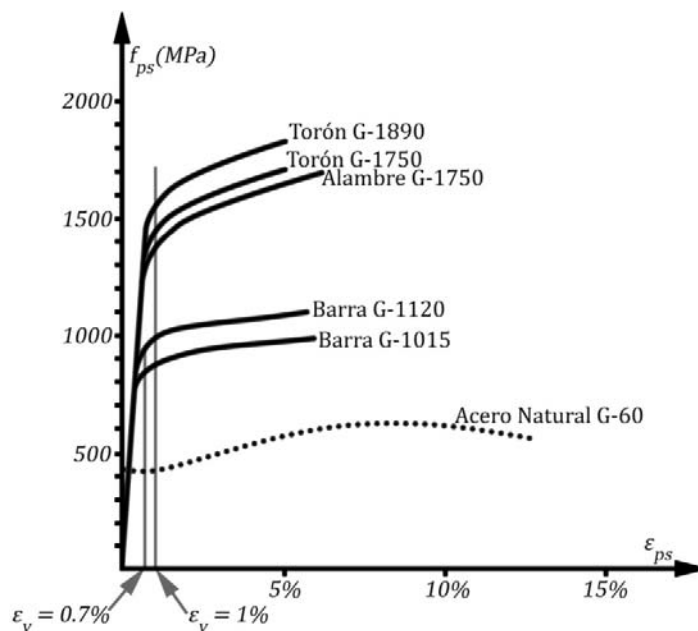


Fig. 1.19 Diagrama tensión-deformación típico de los aceros de Alto Límite Elástico

En realidad la deformación del acero (Ver Figura 1.20) se forma a partir de la suma de dos componentes: la primera asociada al pre-estiramiento producido por el pretensado (ϵ_{pe}), a la que se adiciona la denominada deformación efectiva (ϵ_{p2}) que origina la carga exterior.

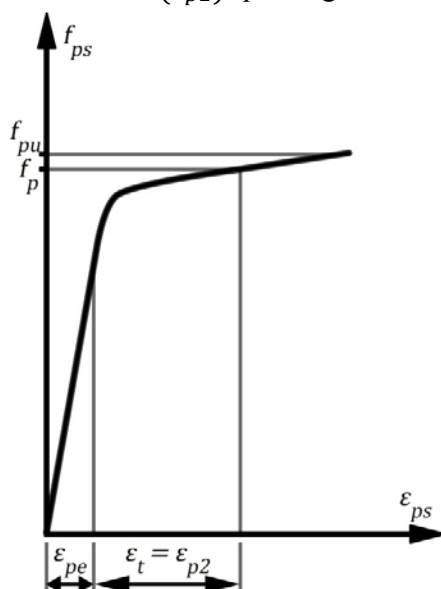


Fig. 1.20 Diagrama tensión-deformación típico de los aceros de Alto Límite Elástico

³⁰ Tomada de "Diseño de Estructuras de Concreto". Arthur H. Nilson (12ma Edición). 2001. (pág. 59)

El cálculo de la deformación ε_{pe} es relativamente complejo y a los fines prácticos puede evaluarse a partir de la ley de Hooke, aceptando que la relación entre f_{pe} y ε_{pe} es lineal, es decir:

$$\varepsilon_{pe} = f_{pe}/E_p = P_e/(A_p E_p)$$

1.6.4 CARACTERÍSTICAS GEOMÉTRICAS DE LAS BARRAS DE ACERO DE PRODUCCIÓN NACIONAL

Las barras de acero para el refuerzo del hormigón pueden ser **LISAS** o **CORRUGADAS**. Las corrugas no son más que salientes o deformaciones que presenta la superficie de la barra para incrementar su adherencia con el hormigón, y en Cuba se producen en la actualidad dos tipos de corrugas (Ver Figura 1.21):

- ✓ Helicoidal parcial de tres pasos sin llegar a tocar los nervios longitudinales (1).
- ✓ Corrugas en dos direcciones (en cruz) (2)

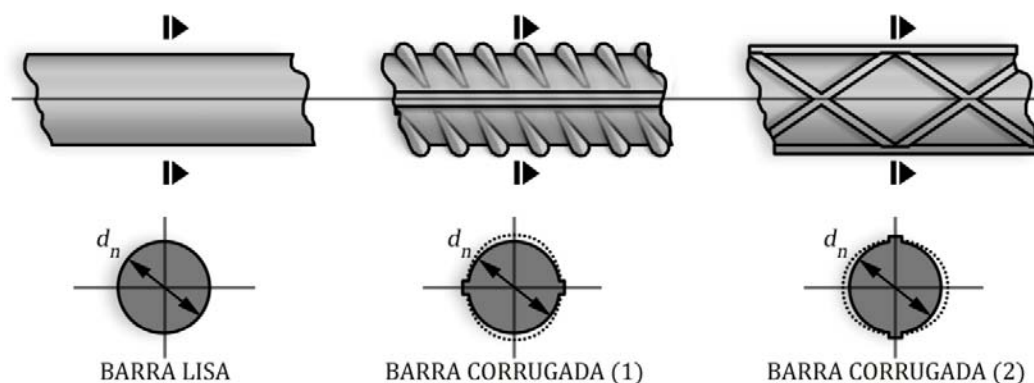


Figura 1.21 Superficie de las barras de acero de producción nacional.

Las principales características geométricas de las barras de refuerzo que interesan son: diámetro nominal, área nominal y la masa lineal. La Tabla 1.9 refiere las que corresponden a los aceros de producción nacional en la actualidad.

TABLA 1.9 Dimensiones de la barras lisas y corrugadas de producción nacional.

Designación ³¹	Diámetro nominal	Área nominal de la sección circular	Masa lineal
	(mm) – (plg)	(mm ²)	(kg/m)
No.10 (3)	9.5 - (3/8)	71	0.560
No.13 (4)	12.7 - (1/2)	129	0.994
No.16 (5)	15.9 - (5/8)	199	1.552
No.19 (6)	19.1 - (3/4)	284	2.235
No.22 (7)	22.2 - (7/8)	387	3.042
No.25 (8)	25.4 - (1)	510	3.973
No.32 (10)	32.2 - (1 1/4)	819	6.404
No.36 (11)	35.8 - (1 3/8)	1006	7.907

³¹ La designación mediante el identificador Número corresponde al diámetro nominal expresado en mm, aunque en algunos países el Número de la barra se refiere a las cantidades de octavos de pulgadas de su diámetro. Por ejemplo, la barra No. 5 es indicativo de que se trata de un diámetro de 5/8 plg, es decir, la barra No. 16 según la denominación que empleamos en el país.

La masa lineal se ha determinado aceptando que la densidad del acero es de aproximadamente $7\,850\text{ kg/m}^3$, es decir, de 78.5 kN/m^3 . Por ejemplo, si se trata de la barra No.25, cuya área es de 510 mm^2 , su masa lineal vendrá dada por:

$$\text{masa}/m = (7\,850\text{ kg/m}^3)(510 \cdot 10^{-6}\text{ m}^2) \approx 4\text{ kg/m}$$

El valor no coincide exactamente con el que se ofrece en la Tabla 1.10 (3.973 kg/m) porque la densidad que se indica es aproximada.

Cuando las barras se reciben en obra pueden admitirse desviaciones de su diámetro entre -0.6 mm y $+0.4\text{ mm}$. No hay que rechazar barras lisas que posean dos nervios diametralmente opuestos hacia uno de sus extremos.

Las barras se suministran en mazos de un solo diámetro y grado en las longitudes rectas que se ilustran en la Tabla 1.10.

TABLA 1.10 Longitudes comerciales de la barras de producción nacional.

Designación	Peso del Mazo			Longitud
	1t	2t	1-4t	
No.10 (3/8)	X			Hasta 7.5m
No.10 (3/8) y No.13 (1/2)		X		6.00m 9.00m 12.00m
No. 16 (5/8) – No. 36 (1 3/8)			X	6.00m 9.00m 12.00m

En la actualidad son varios los países que han abandonado la fabricación de las barras lisas por su incompetencia a causa de su baja adherencia con el hormigón, y más que eso sus reglamentos proscriben su empleo.

1.6.5 CARACTERÍSTICAS MECÁNICAS DE LAS BARRAS DE ACERO DE PRODUCCIÓN NACIONAL

1.6.5.1 LÍMITE ELÁSTICO APARENTE

Es frecuente identificar el límite elástico aparente de un acero por su Grado. En Cuba se producen actualmente tres Grados diferentes: G-34, G-40 y G-60. Las propiedades mecánicas de cada uno de ellos se exponen en la Tabla 1.11.

Nótese cómo en la medida que crece la resistencia del acero, disminuye su ductilidad, es decir, menor es la relación f_{su}/f_y . Por eso el acero G-60 es más resistente que el G-34, pero a la vez menos dúctil. Existen países que producen aceros naturales con límites elásticos superiores a los de producción nacional, por ejemplo, en España se comercializa el acero B 500 S con $f_y = 500\text{ MPa}$, $f_{su}/f_y = 1.05$ y $\epsilon_{su} = 12.5\%$, es decir, de mayor resistencia al G-60 pero de una ductilidad reducida.

TABLA 1.11 Características Mecánicas de la barras de producción nacional³².

Grado	Límite Elástico Aparente (f_y)			Límite de Rotura (f_{su})			(f_{su}/f_y)	ϵ_{su}
	lb/in^2	kg/cm^2	MPa	lb/in^2	kg/cm^2	MPa		
G-34	34 000	2 400	240	47 570	3 333	333	1.3875	12
G-40	40 000	3 000	300	59 000	4 130	413	1.3767	12
G-60	60 000	4 200	420	82 570	5 780	578	1.3762	9

1.6.5.2 MÓDULO DE ELASTICIDAD

Se adopta para los tres Grados un **módulo de deformación** igual a $E_s = 2 \cdot 10^5 MPa$

1.6.5.3 APTITUD DEL ACERO PARA EL DOBLADO

El doblado es una aptitud asociada al nivel de ductilidad del acero en barras. El detallado de la armadura de refuerzo, entiendo como tal al conjunto de barras que conforman la armazón de un elemento de hormigón, requiere en ocasiones que el acero pueda ser doblado, baste pensar en la elaboración de cercos y estribos, en el desvío de la dirección de una barra longitudinal, la ejecución de ganchos en los extremos de barras longitudinales sometidas a tracción con el fin de incrementar su anclaje, etc.

El doblado de las barras se realiza alrededor de un mandril o punzón cuyo diámetro guarda relación con el diámetro de la barra a doblar. Es una propiedad normada y para las barras de producción nacional, en la Tabla 1.12 se indican los diámetros del punzón para doblar a 180° barras de cualquiera de los tres grados que se producen.

TABLA 1.12 Diámetro del Punzón para un ángulo de doblado de 180°

No. DE DESIGNACIÓN DE LA BARRA	ÁNGULO DE DOBLADO A 180°		
	GRADO DE ACERO		
	G-34	G-40	G-60
	DIÁMETRO DEL PUNZÓN		
10, 13 y 16 (3, 4 Y 5)	$2d_n$	$3.5d_n$	$3.5d_n$
19, 22 y 25 (6, 7, 8)	$3d_n$	$5d_n$	$5d_n$
32, 36 (10, 11)	—	$7d_n$	$7d_n$

1.6.6 PROPIEDADES FÍSICAS Y QUÍMICAS DEL ACERO DE PRODUCCIÓN NACIONAL

Como complemento de las características mecánicas que distinguen a los aceros, es necesario también conocer cómo este material se comporta ante las siguientes propiedades físicas y químicas:

- Soldabilidad
- Oxidación
- Cambios de temperatura (coeficiente de dilatación térmica)

La **Soldabilidad** es una propiedad con la que los aceros pueden o no contar y llega a requerirse en situaciones tales como la unión a tope o solape de barras longitudinales para incrementar su longitud,

³² La Tabla indica los valores mínimos garantizados. El valor de ϵ_{su} se corresponde con la elongación permanente porcentual.

la disposición de barras transversales a las armaduras longitudinales para incrementar el anclaje de estas últimas, lo mismo que la soldadura de planchas en los extremos de las barras longitudinales con el mismo fin, etc. La Figura 1.22 expone estas situaciones. En la medida en que sea mayor el contenido de carbono menos apto es el acero para ser soldado.

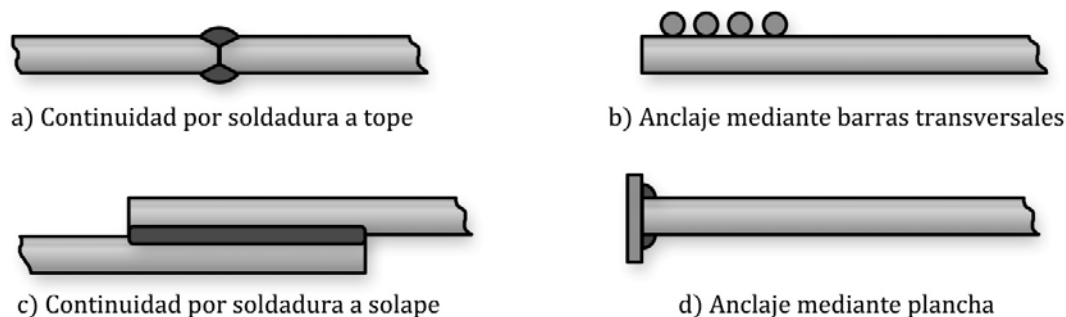


Figura 1.22 Empleo de soldadura en barras de acero

La NC 7: 2002 establece que “las barras de acero **G-60** en todos sus diámetros no son soldables con técnicas corrientes de soldadura, debiéndose aplicar técnicas específicas a partir de la composición química real de las barras. En el caso del **G-34** se garantiza la soldabilidad y en el del **G-40** la soldabilidad depende de su composición química real que el productor informará a solicitud del cliente”.

La **Oxidación** del acero es otro de los grandes males del hormigón armado. En cuanto comienza la corrosión de las armaduras las capas de óxido que se forman se traducen en pérdida de sección y por consiguiente en disminución de capacidad resistente. Pero además, esas capas que se van formando producen un incremento volumétrico del acero, generalmente ubicado hacia el perímetro exterior de los elementos, que ejerce una tensión sobre el hormigón que lo recubre hasta que llega a desprenderlo, comprometiendo la estética de la estructura y exponiendo aun más al acero al intemperismo. Son más oxidables los aceros con menor contenido de carbono, de ahí que el acero G-34 lo sea más que el G-60.

Por último, se ha comprobado que el **Coefficiente de Dilatación Térmica** del acero es sensiblemente igual al del hormigón, pudiéndose adoptar un valor promedio de $\alpha = 0.01\text{mm/m} \cdot ^\circ\text{C}$.

1.7 EL HORMIGÓN ESTRUCTURAL

Hasta aquí fueron analizadas las propiedades que poseen los dos materiales básicos del hormigón estructural en forma independiente, sin embargo, cuando trabajan de conjunto cambian o se modifican algunas de sus propiedades. En lo que sigue se analizarán las más importantes de las propiedades que se modifican, alteran o simplemente se anulan en uno u otro material componente cuando trabajando de conjunto, dan lugar al hormigón estructural.

1.7.1 EFECTO DEL REFUERZO EN LA FISURACIÓN.

Cuando un elemento de hormigón simple se somete a tracción directa, flexión, cortante o torsión, la aparición de la primera fisura provoca el fallo súbito o brusco del mismo. Si a ese elemento se le coloca el refuerzo necesario (al menos el refuerzo mínimo), cuando aparecen las fisuras en el hormigón no se origina el fallo, es más, si las fisuras están con aberturas inferiores a las permisibles, la pieza se

considera en general en un estado no peligroso. Respecto de la fisuración, el objetivo del diseño es evitar preferentemente que no se produzca una fisura grande, sino mejor muchas con aberturas más pequeñas, lo que puede lograrse con el refuerzo que se disponga en la pieza. La Figura 1.23 ilustra esta idea tanto para la tracción axial como para la flexión.

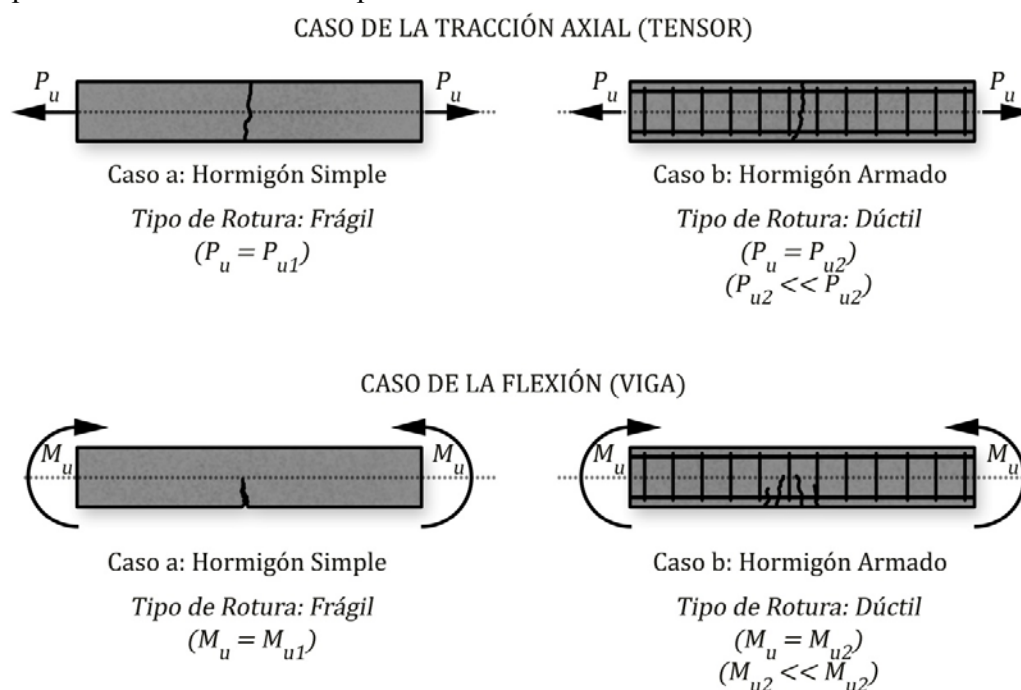


Figura 1.23 Efecto del refuerzo en la Fisuración del hormigón

Pero además, el refuerzo del hormigón mediante el empleo de barras de acero con cuantías adecuadas, le confiere al potencial fallo un deseado nivel de ductilidad, quizá una de las fortalezas más esperadas del refuerzo, alejando así los reconocidos inconvenientes de los colapsos frágiles. Finalmente, es evidente el incremento de capacidad resistente que se obtiene con un diseño apropiado de la armadura.

1.7.2 EFECTO DEL HORMIGÓN SOBRE EL REFUERZO.

Un elemento de acero sometido a compresión se aproxima al colapso en el momento que alcanza su tensión límite de fluencia, si es que no falla antes por pérdida de estabilidad a causa del pandeo, que es lo más probable en barras de acero aisladas o desnudas.

Sin embargo, la barra de acero embebida en el hormigón y sometida a compresión, cuando alcanza su capacidad máxima queda apta para mantener dicha capacidad y someterse a deformaciones mayores que la que corresponde a aquella carga que originó su entrada en fluencia, de manera que continúa colaborando junto al hormigón a consecuencia de la redistribución de tensiones que tiene lugar a nivel de sección. Es como si el acero al comenzar a fluir y “comprender” que no puede aportar más al equilibrio, desvíe hacia el hormigón cualquier incremento posterior de la carga exterior, hasta que sea este segundo material sea el que se agote. La Figura 1.24 muestra las dos situaciones descritas.

En resumen, una barra de acero desnuda y de hecho sin restricción lateral, antes de colapsar por rotura pierde su estabilidad y falla por pandeo, aun bajo cargas pequeñas, sin embargo, esa misma

barra embebida en el hormigón es capaz de alcanzar su capacidad resistente total debido a que el propio hormigón y los cercos o estribos que generalmente se disponen, originan restricciones laterales que impiden el efecto del pandeo, lo que equivale a decir que las barras de acero, a pesar de ser delgadas y muy esbeltas, dentro del hormigón trabajan hasta su capacidad última. Las barras longitudinales colocadas próximas a la superficie del hormigón y armadas con cercos transversales muy espaciados, son más propensas a perder la estabilidad, por ello y como una razón más, se hace necesario limitar el espaciamiento de los estribos o cercos en función del diámetro de la barra longitudinal, a la vez de garantizar los recubrimientos mínimos del hormigón.

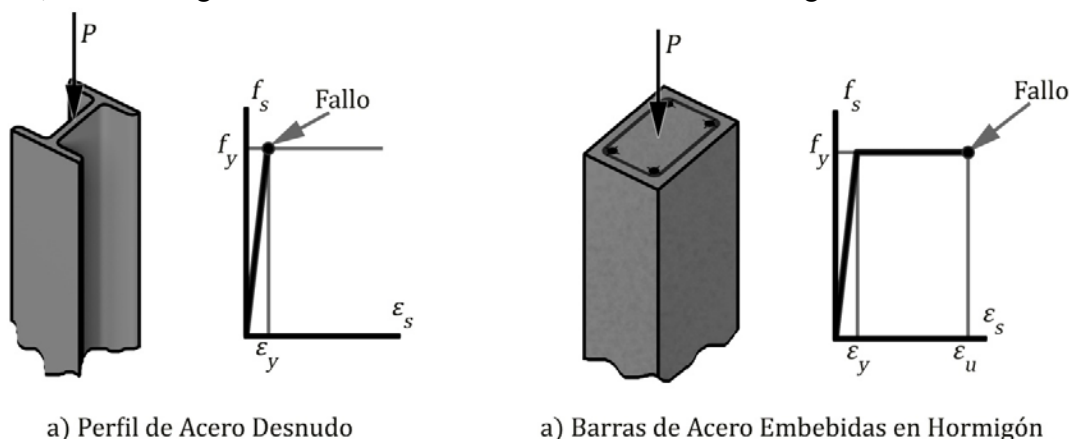


Figura 1.24 Efecto del hormigón sobre la barra de acero en compresión

De igual forma, si se tratase de la flexión, caso que se ilustra en la Figura 1.25, cuando la barra que está sometida a tracción alcanza su máxima capacidad en el momento en que dicha armadura comienza a fluir, no se produce el colapso ya que el acero continuaría alargándose (es cierto que no indefinidamente), y logrando así mantener su capacidad resistente con deformaciones mayores que ϵ_y , hasta un valor que algunos reglamentos acotan.

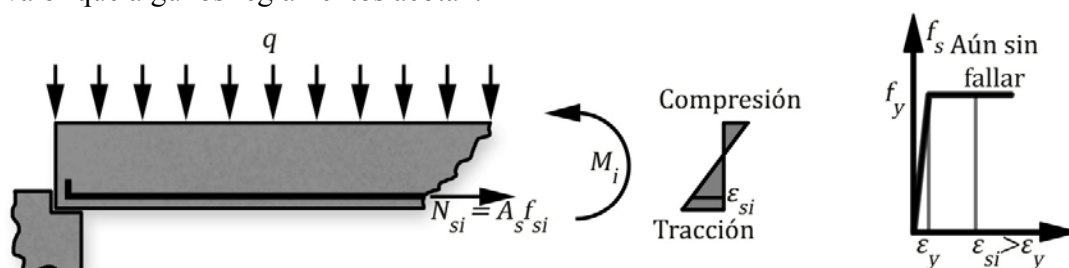


Figura 1.25 Efecto del hormigón sobre la barra de acero en tracción

1.7.3 EFECTO DEL CONFINAMIENTO DEL HORMIGÓN.

El efecto de confinamiento en el hormigón se produce esencialmente debido a la presencia del refuerzo transversal, o también a un incremento brusco de sección dentro de un mismo elemento. En ambos casos este efecto es provocado por la aparición de tensiones de compresión en la dirección transversal a la aplicación de las cargas, corroborando lo que los ensayos confirman: un mismo hormigón resiste más cuanto mayor sean las tensiones de compresión que pueden aparecer en las direcciones ortogonales a la dirección principal de carga (estado triaxial o biaxial de carga).

En la descripción del ensayo a compresión del hormigón se comentó que la resistencia obtenida en probetas con menor esbeltez es mayor. Esto se debe a que las planchas de la máquina de ensayo originan fricción en la superficie de la probeta cuando las mismas tienden a expandirse lateralmente, creándose en el interior del hormigón tensiones transversales de compresión que abarcan mayor altura de la probeta cuanto menor sea su esbeltez. Dichas tensiones producen un efecto favorable de confinamiento lateral que aumenta la capacidad resistente del hormigón ensayado, efecto que va disminuyendo en la medida en que la esbeltez crece. Generalícese este análisis al caso de un elemento real en el que la esbeltez es normalmente muy superior al de la probeta. Por ejemplo, si trata de una columna cuya sección transversal presenta un área A_c y en la que se utiliza un hormigón de resistencia a compresión f'_c , registrada durante el ensayo de probetas elaboradas con él, se debería esperar que la capacidad límite, sólo de la sección de hormigón, venga expresada por la relación $N'_c = A_c f'_c$, sin embargo, los reglamentos establecen para estos casos que $N'_c = (0.80 \text{ ó } 0.85) A_c f'_c$ con lo cual reconocen que en el caso del elemento real “columna”, cuya esbeltez es significativamente superior a la esbeltez de la probeta, el efecto favorable del confinamiento producido por las tensiones laterales que aparecen durante el ensayo es superior (este efecto se traduce en un zunchado de prácticamente toda la probeta, Figura 1.6), con lo cual se justificaría una reducción de la resistencia del mismo hormigón cuando se emplee en la columna.

También el efecto de confinamiento puede estar originado por un cambio brusco de sección del hormigón, es decir, cuando la relación de superficie entre una y otra sección es amplia como sucede, por ejemplo, en la intersección de un pedestal o una columna con el plato de un cimiento aislado (Figura 1.26).

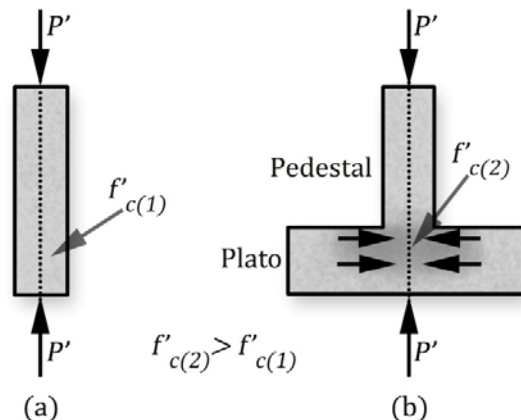


Figura 1.26 Incremento de la resistencia f'_c por compresión local.

En este caso el hormigón de la sección mayor que rodea la zona cargada (la del plato), impide su expansión lateral y de este modo se incrementa la capacidad de la sección menor (la del pedestal). Este efecto se conoce como compresión localizada.

A pesar de tratarse de un mismo hormigón, a los efectos del cálculo su resistencia f'_c se considera mayor en la sección de unión del pedestal y el plato producto del confinamiento que confiere el volumen de hormigón de este último.

El refuerzo transversal también confiere confinamiento pues los estribos o cercos, como también las espiras o hélices (zunchos), impiden el desplazamiento lateral del hormigón del núcleo. Los zunchos

son más efectivos y sobretodo con pasos pequeños, y esta razón se tiene en cuenta cuando se introducen los criterios de seguridad en el diseño mediante el coeficiente reductor de la capacidad nominal ϕ , como podrá estudiarse en el Capítulo III.

Son diversos los modelos analíticos que se han generado para incluir el confinamiento en las relaciones tensodeformacionales del hormigón, y lo máspreciado de este efecto es el incremento de ductilidad que le confiere al comportamiento del hormigón. La Figura 1.27 ilustra el tipo de confinamiento que originan dos tipos diferentes de refuerzo transversal: los cercos o estribos, y las espiras o hélices.

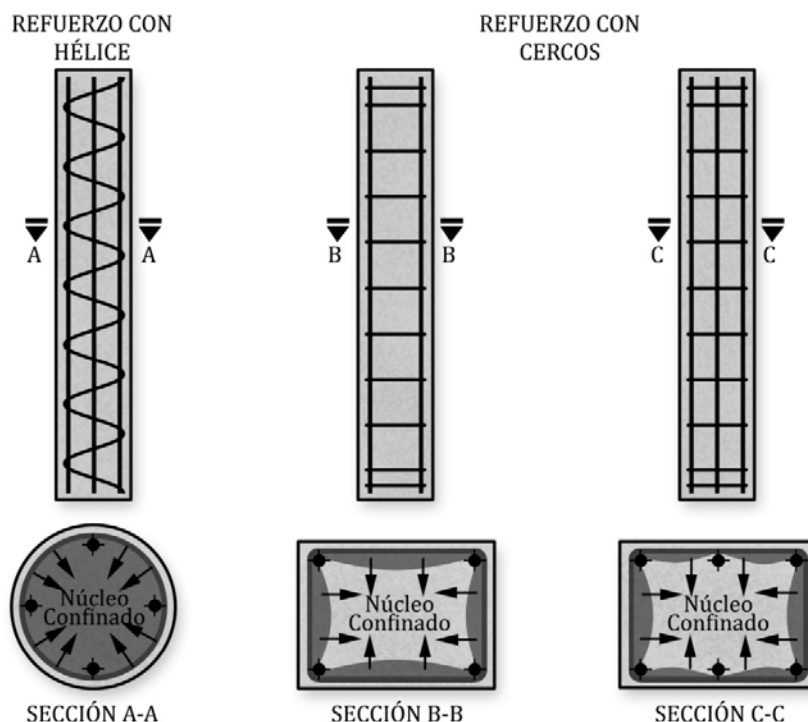


Figura 1.27 Efecto del refuerzo transversal en el confinamiento del hormigón

Cuando las cargas actuantes son pequeñas el confinamiento es prácticamente despreciable, mientras que para cargas elevadas y pequeños pasos de la hélice o de los cercos, el confinamiento aumenta y con él la ductilidad. Definitivamente el confinamiento mejora la capacidad resistente, pero sobre todo incrementa la ductilidad, efecto muy beneficioso especialmente en zonas sísmicas.

El confinamiento que produce los cercos o estribos no es tan efectivo como las hélices, reduciéndose en el primero de los casos a las zonas adyacentes a las barras longitudinales como se aprecia en la Figura 1.27. Por lo general el incremento de la resistencia f'_c a causa de este confinamiento no se tiene en cuenta en los cálculos.

1.7.4 EFECTO DEL REFUERZO EN LA RETRACCIÓN DEL HORMIGÓN.

La retracción en una pieza de hormigón simple, sin ningún refuerzo, que no esté impedida de desplazarse, puede alcanzar, como ya se señalara, valores medios de deformación unitaria por retracción del orden de 0,00035, o sea, 0,35 mm/m (Ver §1.3.2)

En el caso del hormigón armado, las barras de refuerzo colocadas dentro de la masa de hormigón, constituyen un impedimento para la libre deformación de éste material. Se originan compresiones en el refuerzo y tracciones en el hormigón de modo que, como resultado, el acortamiento total es inferior que para el caso del hormigón simple, pero la fisuración es prácticamente inevitable.

En la Figura 1.28 (a) se muestra la deformación por retracción que tiene lugar en un elemento de hormigón simple, libre de deformarse, si se adopta el valor medio señalado para la deformación unitaria por retracción ($\epsilon_{cs}^{hs} = 0.0035 = 0.35\text{mm}/1.00\text{m}$). Mientras tanto, en la Figura 1.28 (b) se representa un caso análogo pero de hormigón armado (la longitud del elemento es la misma en ambos casos), ahora con una deformación unitaria por retracción ($\epsilon_{cs}^{ha} = 0.0025 = 0.25\text{mm}/1.00\text{m}$)

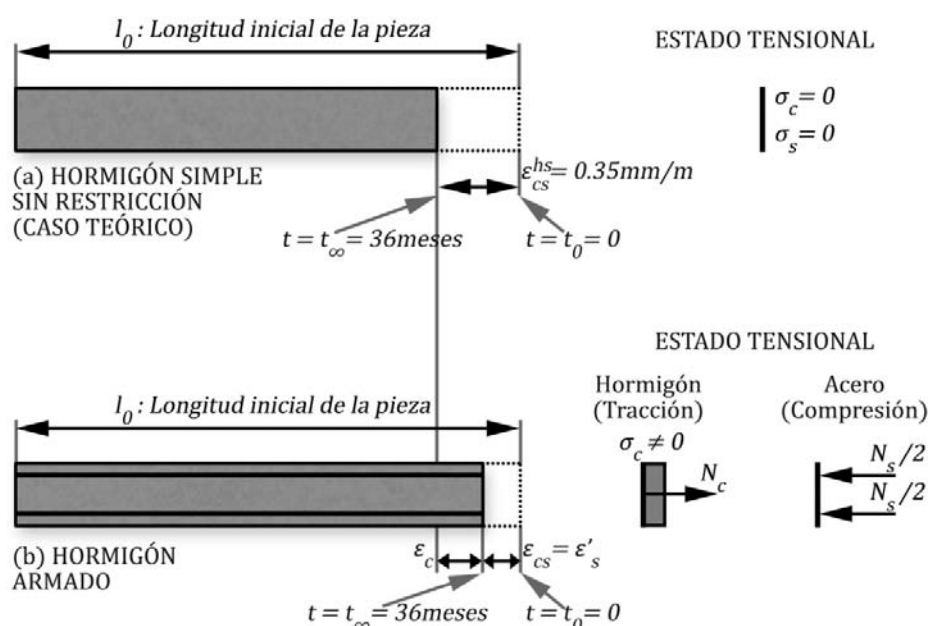


Figura 1.28 Efecto de la retracción en piezas de hormigón simple y armado

La deformación total se produce desde un tiempo inicial $t = t_0 = 0$ hasta un tiempo prolongado que se designará por $t = t_\infty$, que puede ser de 3 años (36 meses). Como en el primer caso, hormigón simple, no existe restricción al acortamiento de la pieza (se trata de un análisis puramente teórico pues algún tipo de restricción siempre existirá, por ejemplo la propia restricción que impone el molde al hormigón recién vertido cuando este comienza a retraerse), las tensiones en el hormigón son nulas, es decir: ($\sigma_c = 0$)

En el caso (b) correspondiente al hormigón armado, cuando transcurre el tiempo $t = t_\infty$, la pieza se ha acortado una magnitud a la que corresponde una deformación unitaria $\epsilon_{cs} = \epsilon_{cs}^{ha}$, mucho menor que $\epsilon_{cs} = \epsilon_{cs}^{hs}$, provocando en el hormigón una tracción a una deformación ϵ_c , mientras el acero se comprime a una deformación $\epsilon_s' = \epsilon_s'$.

La sección está sometida a un sistema de fuerzas en estado de auto equilibrio: el acero comprimido y el hormigón traccionado. Si las tensiones de tracción sobrepasan la resistencia a tracción del hormigón, se producen las llamadas grietas de retracción.

Para evaluar la magnitud de las tracciones se recurre a las ecuaciones de equilibrio, de compatibilidad de deformaciones y físicas que intervienen en el problema, lo que puede comprenderse mejor dentro del Capítulo II. De la propia Figura 1.28 (b) se tiene:

Condición de Equilibrio

$$N_c = N_s \text{ (No existe carga exterior alguna)}$$

$$\text{Siendo: } N_c = A_c \cdot \sigma_c \text{ y } N_s = A_s \cdot f_s$$

$$\text{Donde } A_c \text{ y } A_s \text{ son las áreas de hormigón y acero, respectivamente. Entonces } A_c \cdot \sigma_c = A_s \cdot f_s$$

Ecuaciones Físicas

Considerando que las tensiones en el hormigón y el acero son pequeñas, se supondrá para ambos un comportamiento elástico al que corresponde un diagrama lineal de tensiones:

$$\text{En el hormigón: } \sigma_c = E_c \cdot \varepsilon_c \quad (\text{Tracciones})$$

$$\text{En el acero: } f_s = E_s \cdot \varepsilon'_s \quad (\text{Compresiones})$$

Ecuación de Compatibilidad de Deformaciones

$$\varepsilon_{cs}^{hs} = \varepsilon_c + \varepsilon'_s$$

Pero como $\varepsilon_{cs} = \varepsilon'_s$ y además $\varepsilon_{cs}^{hs} = 0.00035$, entonces:

$$0.00035 = \varepsilon_c + \varepsilon'_s$$

$$\therefore \varepsilon_c = 0.00035 - \varepsilon'_s \Rightarrow \varepsilon_c = 0.00035 - \frac{f_s}{E_s}$$

La solución del problema está en la combinación de los tres juegos de ecuaciones que acaban de deducirse. En efecto, de la condición de equilibrio se obtiene:

$$f_s = \frac{A_c}{A_s} \cdot \sigma_c \Rightarrow f_s = \frac{A_c}{A_s} \cdot (E_c \varepsilon_c)$$

Sustituyendo en la ecuación de compatibilidad se llega a:

$$\varepsilon_c = 0.00035 - \frac{1}{E_s} \left[\frac{A_c}{A_s} \cdot (E_c \varepsilon_c) \right]$$

Y resolviendo esta última ecuación se comprueba que:

$$\varepsilon_c = \frac{0.00035 \frac{E_s}{E_c} \left(\frac{A_s}{A_c} \right)}{1 + \frac{E_s}{E_c} \left(\frac{A_s}{A_c} \right)}$$

Si se define la relación entre las áreas de acero y hormigón como “cuantía geométrica” ($\rho_g = A_s/A_c$), y entre sus “módulos de deformación” factor de equivalencia $n = E_s/E_c$, esta última expresión se puede escribir de la forma:

$$\varepsilon_c = \frac{0.00035 n \rho_g}{1 + n \rho_g}$$

Considerando $E_s = 2 \cdot 10^5 \text{ MPa}$ y $E_c = 4700 \sqrt{f'_c} = 4700 \sqrt{25}$ (igual módulo a tracción que a compresión, especialmente para umbrales bajos de tensión en el hormigón), entonces $n = 8.5$. La Tabla 1.13 ofrece para estas consideraciones y para diferentes cuantías geométricas, las deformaciones de tracción que tienen lugar en el hormigón (ε_c), la tensión de tracción que provoca en el hormigón la retracción (σ_c), las deformaciones y tensión en el acero, (ε'_s) y (f_s), respectivamente, y finalmente la deformación por retracción del material compuesto hormigón-acero (ε_{cs}^{ha}).

TABLA 1.13 Influencia de la cuantía de acero en la retracción que tienen lugar en el hormigón.

ρ_g	HORMIGÓN		ACERO		$\varepsilon_{cs}^{ha} = \varepsilon'_s$
	$\varepsilon_c = \frac{0.003\rho_g}{1 + 8.5\rho_g}$	$\sigma_c = E_c \varepsilon_c$ (MPa)	$\varepsilon'_s = 0.00035 - \varepsilon_c$	$f_s = (2 \cdot 10^5) \varepsilon'_s$ (MPa)	
0.002	$5.90 \cdot 10^{-6}$	0.14	$3.44 \cdot 10^{-4}$	69	0.000344
0.005	$1.44 \cdot 10^{-5}$	0.34	$3.36 \cdot 10^{-4}$	67	0.000336
0.01	$2.76 \cdot 10^{-5}$	0.65	$3.22 \cdot 10^{-4}$	64	0.000322
0.02	$5.13 \cdot 10^{-5}$	1.21	$2.99 \cdot 10^{-4}$	60	0.000299
0.03	$7.17 \cdot 10^{-5}$	1.69	$2.78 \cdot 10^{-4}$	56	0.000278
0.04	$8.96 \cdot 10^{-5}$	2.10	$2.60 \cdot 10^{-4}$	52	0.000260
0.05	$1.05 \cdot 10^{-4}$	2.47	$2.45 \cdot 10^{-4}$	49	0.000245

De la Tabla 1.13 se pueden extraer las siguientes conclusiones:

1. La tensión de tracción (σ_c) que provoca la retracción en el hormigón aumenta con el incremento de la cuantía de refuerzo, y ya para cuantías moderadas puede llegar a superar la débil resistencia a la tracción de este material. En efecto, téngase en cuenta que la resistencia a tracción directa de este hormigón es igual a $f_{ct} = 0.33\sqrt{25} = 1.65 \text{ MPa}$ y se podrá comprobar cómo a partir de la cuantía de 0.03 (3%), normalmente requerida por los diseños, el hormigón llega a fisurarse sólo a consecuencia de la retracción, aun cuando no exista carga externa, lo que suele ocurrir incluso durante el período de endurecimiento del material, es decir, a edades muy tempranas. Por tal razón no faltan los que afirman que el hormigón “*nace fisurado*”.
2. La retracción origina una tensión f_s muy baja en la armadura de refuerzo (en este ejemplo la mayor tensión representa sólo el 16% de la tensión de fluencia de un acero G 60).
3. La deformación unitaria por retracción para el hormigón armado ($\varepsilon_{cs} = \varepsilon_{cs}^{ha}$) depende mucho de la cuantía de refuerzo, moviéndose en este ejemplo entre 0.000245 y 0.000344, lo que puede justificar el valor promedio de $\varepsilon_{cs} = \varepsilon_{cs}^{ha} = 0.00025 = 0.25 \text{ mm}/1.00 \text{ m}$ que se indicara en la sección §1.3.2. Cuantías muy bajas acercan el hormigón armado al hormigón simple y la deformación por retracción se acerca a la de este último, es decir, a $\varepsilon_{cs} = \varepsilon_{cs}^{hs} = 0.00035 = 0.35 \text{ mm}/\text{m}$.

No obstante, la deformación por retracción no se incluye tradicionalmente en el cálculo de la capacidad resistente de los elementos de hormigón, ya que ésta no afecta su capacidad resistente, pero sí su servicialidad.

Sólo en casos muy aislados se considera, por ejemplo, cuando el hiperestatismo de la estructura esta afectando al movimiento o deformación libre de la pieza analizada, y muy especialmente durante la evaluación de las pérdidas de tensión en el acero pretensado.

1.7.5 EFECTO DE LA FLUENCIA EN EL HORMIGÓN ARMADO.

Otra de las propiedades del hormigón simple que es restringida por las barras de refuerzo es la deformación por efecto de la fluencia del propio hormigón.

Al estar sometido a cargas mantenidas, el hormigón sufre acortamientos que son disminuidos por la presencia de las barras, originándose una redistribución interna de las tensiones entre ambos materiales a nivel de sección, o de secciones entre sí cuando ello es posible. Este proceso tiene lugar con el transcurso del tiempo, siendo más intenso en las primeras edades, es decir, en los primeros meses de carga, y continuando más lentamente hasta alcanzar el valor final de deformación diferida. En la Figura 1.29 se muestra esquemáticamente el proceso de redistribución de tensiones y la variación de deformaciones que tiene lugar en una sección de hormigón armado, sometida en este caso, sólo para graficar el fenómeno, a compresión. La Figura ilustra el estado inicial ($t = 0$) cuando al aplicar la carga $P_{1(t=0)}$ el elemento sufre un acortamiento instantáneo que se traduce en deformaciones unitarias, tanto en el hormigón $\varepsilon'_{ci(t=0)}$, como en el acero $\varepsilon'_{si(t=0)}$, tal que por compatibilidad de las deformaciones $\varepsilon'_{ci(t=0)} = \varepsilon'_{si(t=0)}$, dando lugar a la tensión $\sigma'_{ci(t=0)}$ en el hormigón y $f_{si(t=0)}$ en el acero, de modo que la condición de equilibrio ha de expresarse de la manera:

$$P_{1(t=0)} = A_c \cdot \sigma'_{ci(t=0)} + A_s \cdot f_{si(t=0)}$$

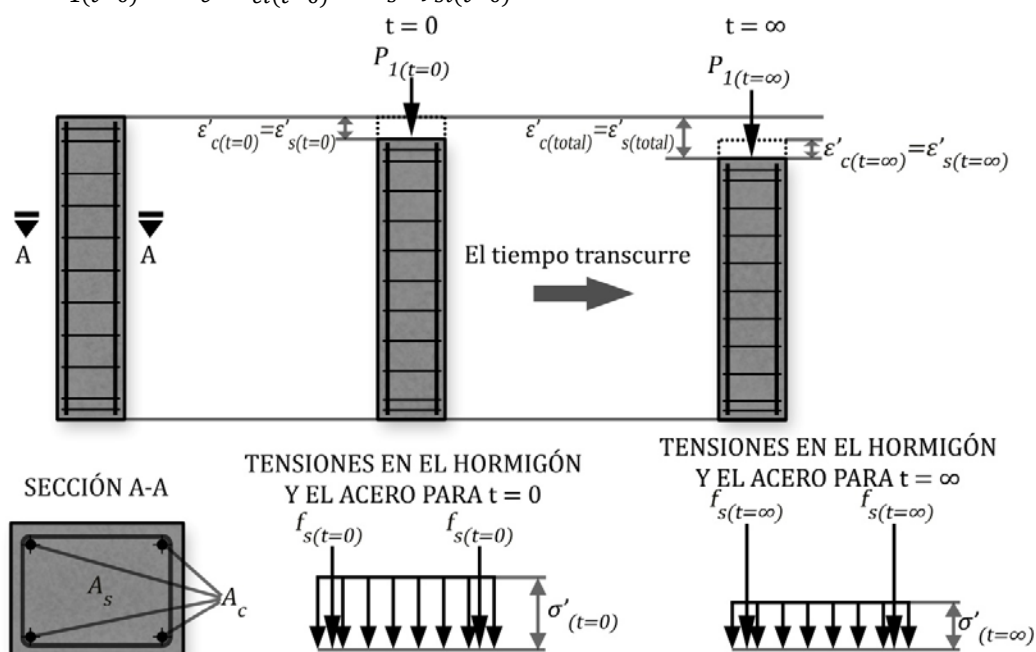


Figura 1.29 Efecto de la Fluencia en piezas de hormigón armado

Ahora bien, al cabo del tiempo ($t = \infty$) y sin variar la magnitud de la carga aplicada, cuando se ha alcanzado la deformación final de fluencia bajo la acción de la misma carga $P_{1(t=0)} = P_{1(t=\infty)}$, se incrementará la deformación ε'_{si} del acero y como resultado se incrementará su tensión: $f_{si(t=\infty)} > f_{si(t=0)}$, dando lugar a que el equilibrio de la sección al cabo del tiempo, satisfaga la ecuación:

$$P_{1(t=\infty)} = A_c \cdot \sigma'_{ci(t=\infty)} + A_s \cdot f_{si(t=\infty)}$$

Es evidente que la tensión en el hormigón ha de disminuir ya que aumentó en el acero. Quiere esto decir que ha tenido lugar una redistribución de las tensiones pasando el refuerzo a tomar más carga y a descargarse el hormigón, al menos mientras el acero no entre en fluencia pues a partir de este momento la redistribución de esfuerzo se invierte, el acero que no puede aportar más comienza a enviar al

hormigón cualquier incremento de la carga, hasta que el hormigón se agote y con ello la sección. En elementos a flexión, el efecto de la fluencia incrementa las flechas, sin embargo la presencia de refuerzo en la zona comprimida hace que esta flecha se reduzca por lo explicado anteriormente.

Definitivamente la retracción y la fluencia modifican sustancialmente las deformaciones en la sección, y generalmente, como actúan de manera simultánea tienden, a ser analizados de conjunto.

En una columna sometida a compresión ambos efectos incrementan la deformación del refuerzo, mientras que reduce la compresión del hormigón. En una viga ambos efectos se contraponen, por un lado, la retracción origina que la tensión del hormigón aumente en la zona comprimida, mientras que disminuye la tensión del acero. El efecto de la fluencia hace que la tensión en el hormigón de la zona comprimida disminuya y a su vez la tensión en el acero aumente.

1.7.6 PESO DEL HORMIGÓN ARMADO.

El peso de una pieza de hormigón armado viene dado por el peso del hormigón más el peso del refuerzo que se encuentran embebido dentro de la masa de hormigón. Considerando una unidad de volumen se comprende fácilmente que el peso total dependerá de la cuantía del refuerzo, del peso de los componentes del hormigón y de su compactación.

Las normas establecen diferencias en el peso del hormigón, y la Tabla 1.14 ofrece algunos valores indicativos de esta variable.

TABLA 1.14 Peso volumétrico o densidad de diferentes tipos de hormigón

Tipo de Hormigón	w_c (kN/m^3)
Ciclópeo	10 - 18
En Masa (Refuerzo nulo)	23
Armado con compactación normal	24
Armado con compactación mecánica intensa	25

El peso volumétrico del hormigón armado, es decir, su densidad, es de mucha importancia para estimar la carga muerta debido a peso propio.

1.7.7 LA ADHERENCIA.

La adherencia es quizá la cualidad más distintiva del hormigón reforzado con acero, la que permite hablar de un funcionamiento conjunto entre ambos materiales a pesar de que cada uno posea rasgos, propiedades y características diferentes, como se ha expresado en este Capítulo. Es la adherencia la causa fundamental de la compatibilización de deformaciones a nivel de sección, y cuando se avance dentro del texto en los modelos analíticos para el dimensionamiento de elementos de hormigón armado, se podrá corroborar cómo estos modelos reconocen como hipótesis, la adherencia perfecta entre el hormigón y el acero. Si esto no se cumpliera otros serían los modelos, como sucede por ejemplo en el caso del preesfuerzo con pretensado no adherente. De hecho, todo cuanto se haga en el caso del hormigón armado para evitar cualquier interface entre ambos materiales que pueda limitar la adherencia, es a favor del trabajo conjunto de ellos. La aplicación de pinturas inapropiadas al refuerzo

procurando su protección ante la corrosión, el descuido en la manipulación de las armaduras que conduzca a la aparición de películas grasientas en la superficie de las barras, etc., son situaciones que deben evitarse siempre.

Al final, ha de lograrse que el hormigón transfiera tensiones al acero sin deslizamiento relativo entre ambos, para evitar así las roturas frágiles del elemento, y asegurar que la adherencia pueda desempeñar sus dos roles principales: anclar eficazmente las barras de acero en la masa de hormigón, y asegurar una eficiente transmisión de los esfuerzos tangenciales que tienen lugar en todo el perímetro de la barra, como consecuencia de la variación experimentada por la tensión normal a su sección.

La adherencia tiene dos orígenes fundamentales: uno de naturaleza físico – química (asociada a las tensiones capilares que tienen lugar en la interface hormigón-acero), y otro mecánico. Esta última es la fuente más importante para asegurar una adecuada adherencia, y se vincula a la fricción natural que aparece entre dos superficies en contacto. Las irregularidades propias de la superficie de la barra (Figura 1.30), en las que se aloja la pasta de cemento, incrementan la resistencia al deslizamiento y mejoran la adherencia. Aun estando presente estas inevitables irregularidades en el caso de las barras lisas, lo cierto es que el encajamiento del cemento en ellas es reducido y reducido será también el agarre mecánico que tiene lugar, razón que limita la producción y empleo de estas barras.

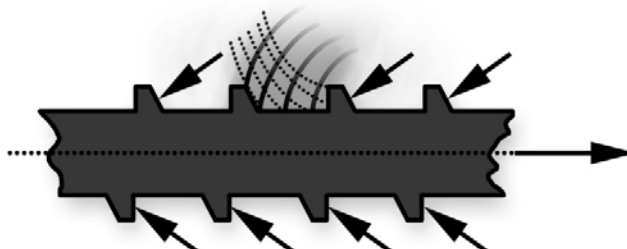


Figura 1.30 Efecto de cuña ofrecido por el hormigón situado entre corrugas

En el caso de las barras corrugadas, a más de mejorarse este rozamiento, un tercer efecto tiene lugar: la acción de acuñamiento que aparece cuando la pasta de mortero se aloja entre las corrugas, y una vez endurecida se convierte en un obstáculo mecánico ante el libre deslizamiento de la barra cuando se somete a tracción.

Cuando se estudien las disposiciones constructivas para detallar la armadura de refuerzo se profundizará en los modelos analíticos que permiten calcular las longitudes de anclaje de las barras de acero. Estas longitudes dependerán fundamentalmente de la adherencia que se desarrolle en la interface que tiene lugar entre el hormigón y el acero, requiriéndose menor longitud de anclaje cuanto mayor adherencia se desarrolle, lo que dependerá de numerosos factores, entre los que se señalan:

a) Tipo de solicitación en la barra

La tracción disminuye la adherencia con el hormigón en comparación con la compresión. Una barra traccionada tiende a disminuir su diámetro por efecto de Poisson, debilitándose la interface entre ambos materiales, reduciendo la adherencia y requiriendo mayor longitud de anclaje.

b) Calidad del hormigón

Cuanto mayor sea la calidad del hormigón más se mejora la adherencia. Los hormigones de superior calidad incrementan las tensiones moleculares y capilares en la interface, y a la vez

ofrecen mayor resistencia mecánica en el mecanismo de cuña que aparece alrededor de las corrugas.

c) Recubrimiento del acero

Al aumentar el hormigón cobaricéntrico a la barra de acero, lo que sucede cuando aumenta su recubrimiento, la tensión de adherencia se incrementa, por tal razón barras con recubrimientos estrictamente mínimos deben ser debidamente ancladas.

d) Calidad (Grado) del acero

Al incrementarse la calidad del acero la barra es capaz de resistir mayor carga antes del colapso y en consecuencia será mayor la disminución relativa de su diámetro por efecto de Poisson, disminuyendo la adherencia. Las barras G60 requieren mayor longitud de anclaje que las G40, a igualdad de las restantes condiciones.

e) Ubicación de la barra en la sección

El efecto gravitatorio de la masa de hormigón situada por debajo de una barra de acero que se encuentra embebida en esa masa, originará una fuerza que tiende a debilitar la interface hormigón-acero, es como si el hormigón “colgado” de la barra tiende a separarse más cuanto más pesa. Por eso, cuanto mayor sea la masa de hormigón situada por debajo de una barra más se debilitará la adherencia. De hecho algunos reglamentos definen dos Zonas: de Alta Adherencia y de Baja Adherencia. Se sitúan en zonas de baja adherencia aquellas barras debajo de las cuales existe una altura de hormigón mayor o igual a 30cm.

f) Revestimiento de la superficie de las barras de acero

Que se aplique o no algún revestimiento de protección a la superficie de las barras influirá en la adherencia. El empleo de pinturas a base de epoxy puede llegar a exigir hasta un 50% de incremento de la longitud de anclaje, como reflejo de la disminución de adherencia que tiene lugar.

g) Diámetro de la barra

Como la adherencia depende en lo fundamental de la cantidad de hormigón que rodee al acero, cuanto mayor sea el diámetro de la barra la superficie cobaricéntrica disminuye y más se debilita la adherencia. Por eso, barras de mayor diámetro, a igualdad de las restantes condiciones, requieren mayores longitudes de anclaje

h) Presencia de armadura transversal a la barra que se analiza

La armadura transversal ejerce un efecto mecánico que favorece la adherencia.

Por su importancia en el diseño de secciones de hormigón armado, el texto destina el Capítulo VIII para el estudio de la adherencia entre el hormigón y el acero, y el resto de los criterios de diseño que dependen de esta propiedad.

Ejercicio 1.1

En la Figura 1.31 se ilustra la elevación y la sección transversal de una viga prismática postesada que ya ha sido diseñada para garantizar las exigencias de la etapa de servicio y de resistencia. El cemento empleado es de endurecimiento normal y el hormigón posee una resistencia característica a los 28 días de $f_c' = 50\text{MPa}$. Se conocen además las siguientes condiciones derivadas del proceso constructivo de la viga:

- ✓ La viga se construye en una Planta de Prefabricación que garantiza un ambiente durante el curado de **10°C** y una humedad relativa **HR = 80%**.
- ✓ El tesado del acero se realizará a los **10 días** de hormigonada la viga.
- ✓ Concluido el tesado de los tendones, la viga entra en carga (acción de las cargas impuestas y sobrecarga), solo transcurrido los primeros **100 días**. Mientras transcurre este tiempo las condiciones ambientales continúan siendo las mismas: **10°C** y **HR = 80%**.
- ✓ El ambiente definitivo en que se encontrará el elemento, una vez que entre en carga pasados los primeros **100 días**, se modifica y empieza a ser de **20°C** y **HR = 50%**.

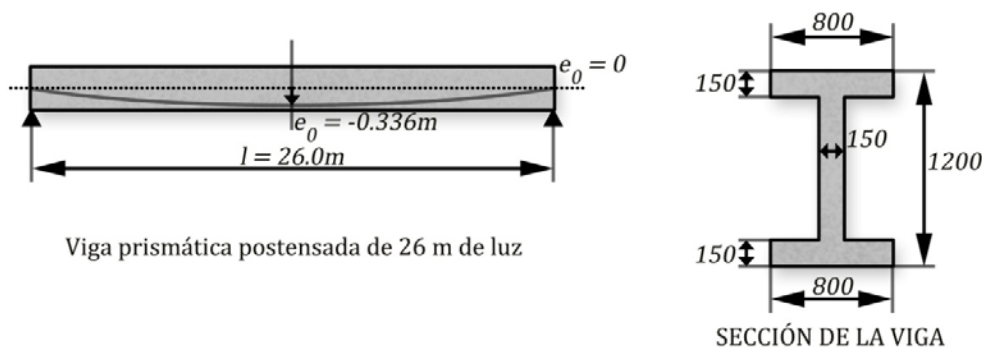


Figura 1.31: Ejercicio 1,1

- a) Para la **Etapa 1** que se define desde que la viga se construye hasta que transcurren los primeros 100 días durante los cuales aun la viga no entra en carga:
 - a.1) Determine la **deformación debida a la fluencia** si la tensión normal a la sección de hormigón debida al pretensado inicial y al peso propio es igual a $f_{cp[1]} = 12.4 \text{ MPa}$.
 - a.2) Determine la **deformación debida a la retracción**.
- b) Para la **Etapa 2** que comienza a partir del día 100 de construida la viga cuando la viga entra en carga, y hasta tiempo infinito:
 - b.1) Determine la **deformación debida a la fluencia** si la tensión normal a la sección de hormigón debida al pretensado efectivo y a la carga total es igual a $f_{cp[2b]} = 11.6 \text{ MPa}$.
 - b.2) Determine la **deformación debida a la retracción**.

Ambas deformaciones deben ser evaluadas para calcular, por ejemplo, la pérdida diferida que experimenta la fuerza de pretensado, debido a ambos fenómenos. Considere que la pérdida de tensión en el acero previamente estirado debido a la deformación de fluencia, puede expresarse mediante la ley:

$$\Delta f_s^c = n_p \cdot \varphi(t, t_o) f_{cp}$$

Cálculos y discusión

Se conoce que estas deformaciones dependen del tiempo y especialmente del ambiente (temperatura y humedad relativa) que rodean al elemento. Existen modelos simplistas para evaluarlas y modelos más refinados basados en una sólida investigación a nivel de laboratorio. Lo más deseado es seguir un modelo que reconozca el proceso evolutivo de la pieza desde su elaboración hasta la puesta en obra,

que será el que aquí se describa. Esta razón es la que justifica que se distinguen las dos etapas que fueran definidas:

Etapas 1: Desde el tesado y hasta la entrada en carga de la viga.

Como estas deformaciones se están procurando para evaluar la pérdida de tensión del acero previamente estirado, y el tesado se realiza a los 10 días de construida la viga, se tendrá $t_r = 10$ y $t = 100$. En este período el elemento se mantiene a una humedad relativa (HR) del 80% y a una temperatura de 10°C.

Etapas 2: Luego de la entrada en carga de la viga y hasta tiempo infinito (Ejercicio Propuesto).

Transcurridos los primeros 100 días y hasta tiempo infinito, la humedad relativa (HR) pasa a ser del 50%, y la temperatura de 20°C.

En ambas etapas se aplican las mismas expresiones, sólo que los coeficientes varían en dependencia de las condiciones que rodeen a la pieza.

A) EVALUACIÓN DE LAS DEFORMACIONES DIFERIDAS DENTRO DE LA ETAPA 1

La singularidad de esta etapa es que la temperatura es diferente de 20°C y por tanto se imponen las correcciones por temperatura que se estudiaron en §1.3.1 y §1.3.2. No obstante, el problema se simplifica porque durante los 90 días posteriores al tesado, la temperatura, aunque diferente de 20°C, es constante e igual a 10°C.

A.1) Cálculo del Coeficiente de Fluencia: $\varphi(t, t_o)$

Se trata de resolver la ecuación

$$\varphi(t, t_o) = \varphi_o \cdot \beta_c(t, t_o)$$

Siendo:

$$\varphi_o = \varphi_{HR} \cdot \beta_{(f'_{cm})} \cdot \beta_{(t_o)}$$

$$\beta_{(f'_{cm})} = \frac{16.8}{\sqrt{f'_{cm}}} = \frac{16.8}{\sqrt{50+8}} = \mathbf{2.20} \quad (\text{No depende de las correcciones})$$

$$\beta_{(t_o)} = \frac{1}{0.1 + (t_o)^{0.2}} \quad (\text{Depende de la corrección de } t_o)$$

$$\beta_c(t, t_o) = \left[\frac{(t-t_o)}{\beta_H + (t-t_o)} \right]^{0.3} \quad (\text{Depende de las correcciones de } t_o \text{ y } \beta_H)$$

Como la temperatura en el momento en que se realiza el tesado es 10°C, diferente de 20°C, es necesario realizar las siguientes correcciones:

- **Corrección por temperatura durante el período de curado y el tipo de cemento.**

$$t_o = t_r \left[1 + \frac{9}{2 + (t_r)^{1.2}} \right]^\alpha \geq 0.5 \text{ días}$$

$$t_r = \sum_{i=1}^{i=n} (\Delta t_i) \cdot e^{-\left[\frac{4000}{273+T(\Delta t_i)} - 13.65 \right]} = (10) \cdot e^{-\left[\frac{4000}{273+10^\circ\text{C}} - 13.65 \right]} = 6.16 \text{ días}$$

$\alpha=0$ Se trata de un cemento de endurecimiento normal

$$\therefore t_o = 6.16 \left[1 + \frac{9}{2 + (6.16)^{1.2}} \right]^0 = \mathbf{6.16 \text{ días}} \geq 0.5 \text{ días}$$

Además:

$$\beta_{(t_o)} = \frac{1}{0.1 + (6.16)^{0.2}} = \mathbf{0.65}$$

- Corrección por temperatura durante el período de aplicación de la carga (*temperatura constante y distinta de 20°C*).

Sustituir el coeficiente φ_{HR} por $\varphi_{HR,T}$

$$\varphi_{HR,T} = e^{0.015(T-20)} + (\varphi_{HR} - 1)e^{0.015\sqrt[5]{(T-20)^6}}$$

$$\varphi_{HR} = 1 + \frac{100 - HR}{9.9\sqrt[3]{e_f}}$$

$$e_f = 2A_c/P_c$$

Si se analiza la sección transversal de la viga se puede comprobar que:

$A_c = 375 \cdot 10^3 \text{ mm}^2$ (área de la sección) y $P_c = 5.3 \cdot 10^3 \text{ mm}$ (perímetro de la sección).

$$\therefore e_f = \frac{2(375 \cdot 10^3)}{(5.3 \cdot 10^3)} = 141.5 \text{ mm}$$

$$\therefore \varphi_{HR} = 1 + \frac{100 - 80}{9.9\sqrt[3]{141.5}} = 1.39$$

$$\therefore \varphi_{HR,T} = e^{0.015(10-20)} + (1.39 - 1)e^{0.015\sqrt[5]{(10-20)^6}} = \mathbf{1.36}$$

Sustituir el coeficiente β_H por β_{HT}

$$\beta_{HT} = \beta_H \cdot \beta_T$$

$$\beta_H = 1.5e_f[1 + (0.012HR)^{18}] + 250 = 1.5(141.5)\{1 + [0.012(80)]^{18}\} + 250$$

$$= 564$$

$$\beta_H \leq 1500$$

$$\beta_T = e^{\left(\frac{1500}{273+T} - 5.12\right)} = e^{\left(\frac{1500}{273+10} - 5.12\right)} = 1.20$$

$$\therefore \beta_{HT} = (564)(1.20) = \mathbf{676.8}$$

Luego de las correcciones ya se puede evaluar:

$$\varphi_o = (1.36)(2.20)(0.65) = \mathbf{1.94}$$

$$\beta_c(t, t_o) = \beta_c(100, 6.2) = \left[\frac{(100 - 6.2)}{676.8 + (100 - 6.2)} \right]^{0.3} = \mathbf{0.53}$$

Y finalmente ya puede determinarse mediante el producto:

$$\varphi(t, t_o) = \varphi(100, 6.2)(1.94)(0.53) = \mathbf{1.03}$$

A.2) Cálculo de la deformación debida a la Retracción: $\varepsilon_{cs}(t, t_r)$

Como se trata de una temperatura distinta de 20°C, teniendo en cuenta la corrección que debe aplicarse, esta deformación se determina mediante la expresión:

$$\varepsilon_{cs}(t, t_r) = \varepsilon_{cs}(0) \cdot \beta_s(t - t_r)$$

Evaluación del coeficiente $\varepsilon_{cs}(0)$

$$\varepsilon_{cs}(0) = (\beta_{rT}) \cdot \beta_{HR} [160 + \beta_{sc}(90 - f'_{cm(28)})] 10^{-6}$$

$$f'_{cm(28)} = f'_c + 8 = 50 + 8 = 58 \text{ MPa}$$

$$\beta_{rT} = 1 + \left(\frac{8}{103 - HR} \right) \left(\frac{T - 20}{40} \right) = 1 + \left(\frac{8}{103 - 80} \right) \left(\frac{10 - 20}{40} \right) = \mathbf{0.913}$$

$$\beta_{sc} = \mathbf{5} \text{ (Valor correspondiente a cementos de endurecimiento normal o rápido)}$$

$$\beta_{HR} = -1.55 \left[1 - \left(\frac{HR}{100} \right)^3 \right] \quad \text{para } 40\% < HR < 99\%$$

$$\therefore \beta_{HR} = -1.55 \left[1 - \left(\frac{80}{100} \right)^3 \right] = -0.7564$$

$$\varepsilon_{cs}(0) = (0.913) \cdot (-0.7564) [160 + (5)(90 - 58)] 10^{-6} = -2.21 \cdot 10^{-4}$$

Evaluación del coeficiente $\beta_s(t - t_r)$

$$\beta_s(t - t_r) = \sqrt{\frac{(t - t_r)}{\alpha_{rt} + (t - t_r)}}$$

$$\alpha_{rt} = (0.035e_f^2) e^{-0.06(T-20)}$$

$$\therefore \alpha_{rt} = (0.035e_f^2) e^{-0.06(T-20)} = 0.035(141.5)^2 \cdot e^{-0.06(10-20)} = 1\,277$$

$$\beta_s(t - t_r) = \beta_s(100 - 10) = \sqrt{\frac{(100 - 10)}{1\,277 + (100 - 10)}} = 0.261$$

Finalmente se tendrá:

$$\varepsilon_{cs}(t, t_r) = \varepsilon_{cs}(100, 10) = (-2.21 \cdot 10^{-4})(0.261) = -5.77 \cdot 10^{-5}$$

El sentido físico de este resultado permite asegurar que dentro de esta Etapa, y debido sólo al fenómeno de la retracción, el elemento experimentará un acortamiento de 1.5mm. En efecto:

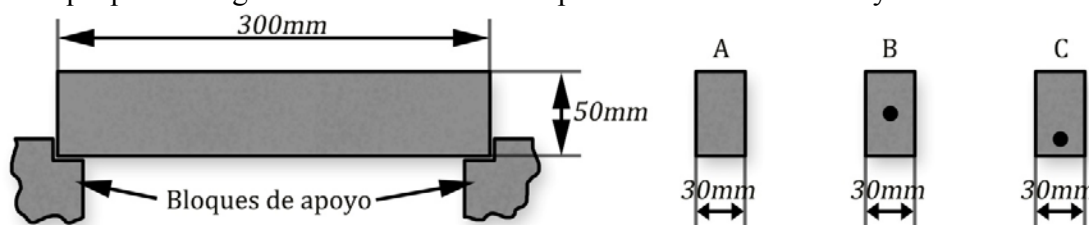
$$\Delta l_{cs(Etapa\ 1)} = \varepsilon_{cs}(t, t_r) \cdot l_o = (-5.77 \cdot 10^{-5})(26) = 0.0015m = 1.5mm$$

Como el acero pretensado está adherido al hormigón y debidamente anclado al elemento, experimentará ese mismo acortamiento, lo que se traduce en una **pérdida de tensión** (Δf_s^{cs}), sólo debido a la retracción, aproximadamente igual a:

$$\Delta f_s^{cs} = E_p \cdot \varepsilon_{cs}(t, t_r) = (2 \cdot 10^5)(-5.77 \cdot 10^{-5}) \approx 11.5MPa$$

EJERCICIOS PROPUESTOS

- 1) Señale las principales **fortalezas** y **debilidades** del hormigón simple. Enjuícielas críticamente y proponga algunas acciones que permitan atenuar las debilidades señaladas.
- 2) Construya en su casa tres piezas prismáticas de pequeño porte de hormigón, todas de **300mm** de longitud y con una sección rectangular de **30mm x 50mm**. A una de las piezas (**A**) no le coloque ningún tipo de refuerzo, a la segunda (**B**) colóquese una barra de alambroón de 3mm (puede ser sustituido por el mismo material con que se construyen los percheros) coincidiendo con el eje de la pieza, mientras a la tercera (**C**) colóquese un refuerzo similar pero desplazado hacia la altura inferior de la sección, aproximadamente a 50mm de la cara inferior. Apoye las tres piezas, por ejemplo, sobre dos bloques (con una longitud de apoyo de al menos 25mm) y aplique una carga centrada a cada una hasta llevarlas al colapso. En la figura 1.32 se muestran las secciones de dichas piezas. Concluido los tres ensayos describa cualitativamente la forma de fallo (súbito o paulatino), el patrón de agrietamiento y la magnitud de la carga que originó el colapso en cada una. Investigue las razones que pueden argumentar las diferencias apreciadas en los tres ensayos.

**Figura 1.32: Ejercicio propuesto 2**

- 3) ¿Por qué la armadura que se emplea en hormigón armado se le llama “**pasiva**” mientras que “**activa**” a la que se utiliza en hormigón pretensado?
- 4) Investigue los edificios de hormigón más altos del mundo y muy especialmente las singularidades del Edificio Focsa, considerado una de las Siete Maravillas de la Ingeniería cubana.
- 5) Investigue la densidad de diferentes materiales de los más empleados en la construcción (madera, acero, plástico, suelo, etc.) y compárelos con la densidad del hormigón. ¿Se justifica afirmar que el “elevado peso muerto del hormigón” es una de sus principales debilidades?
- 6) Conocer la influencia sobre la resistencia del hormigón de su edad en el momento en que se carga es importante, por ejemplo, para definir el momento más conveniente en que puede desencofrarse una placa con el interés de reutilizar lo más pronto posible la madera. Identifique Ud. otras razones de carácter práctico que revelen la importancia de conocer la influencia de las restantes variables estudiadas (velocidad de aplicación de las cargas sobre la probeta de hormigón durante el ensayo, velocidad con que se incrementan las deformaciones que sufre el hormigón y calidad del hormigón) sobre la resistencia del hormigón.
- 7) ¿Por qué bajas relaciones a/c conducen a resistencias más elevadas del hormigón? ¿Qué le sucede a la laborabilidad del hormigón cuando disminuye la relación a/c ?
- 8) En la Tabla 1.15 se ofrece un conjunto de valores de deformación a compresión ε'_c que experimenta el hormigón a compresión. Suponiendo que $f'_c = 30\text{MPa}$:
 - a) Determine la tensión σ'_c que corresponde a cada uno, atendiendo a las leyes constitutivas que refieren los investigadores que se indican en la propia Tabla. Revise estas leyes en la Tabla 1.2.

- b) Represente en un mismo sistema cartesiano ε'_c vs. σ'_c las curvas que resultan de cada ley.
 c) Compare cualitativamente las curvas obtenidas y extraiga las conclusiones que corresponden.

TABLA 1.15 Ejercicio 8

ε'_c	σ'_c					
	Hognest ad	Rüsch	Kabala (larga duració n)	Desayi- Krishna n	Collins (corta duració n)	Collins (larga duració n)
0.000						
0.0002						
0.0004						
0.0006						
0.0008						
0.0010						
0.0012						
0.0016						
0.0018						
0.0020						
0.0022						
0.0024						
0.0026						
0.0028						
0.0030						
0.0035						
0.0040						

NOTA: Puede utilizar un libro de EXCEL o una hoja de MathCad para determinar los valores de σ'_c .

- 9) Ud. calculó la losa de entrepiso de su vecino y definió, para la carga muerta y de servicio total, el espesor de dicha losa y el espaciamiento del acero considerando una resistencia del hormigón $f'_c = 25MPa$. Luego comprobó que si actuara sólo el peso propio de la losa y una carga de ejecución de aproximadamente $0.6 kN/m^2$, es suficiente que el hormigón alcance una resistencia $f'_c = 12MPa$. Transcurridos los primeros siete días de construida la losa, su vecino le consulta la posibilidad de desencofrar. ¿Qué Ud. le sugeriría? Justifique su respuesta.
- 10) Su vecino se encuentra construyendo su vivienda de muros de albañilería y losa de hormigón armado para la solución del entrepiso y la cubierta. Formúlese diferentes preguntas que él pudiera realizarle cuyas respuestas dependen mucho del conocimiento consciente de los fenómenos de **retracción** y **fluencia**, lo mismo cualitativa que cuantitativamente. Elabore las respuestas que mejor se ajusten a las preguntas que pueda formularse.

BIBLIOGRAFÍA CONSULTADA

1. Calavera, José. **“Proyecto y cálculo de estructuras de hormigón”**. Tomos I y II. INTEMAC, S.A. España. 1999.
2. Marí, A.: **“Análisis de estructuras de hormigón armado y pretensado”**. Lecciones para un Curso de Posgrado. Universidad Politécnica de Barcelona. 1986.
3. Medina Torri F.; Ruiz Alejo L. **“Hormigón Estructural 1”** Editorial Pueblo y Educación 1991. La Habana. Cuba
4. Murcia V., Juan y otros: **“Hormigón Armado y Pretensado II”**. Universidad Politécnica de Cataluña. 1994.
5. Nilson A.H, Winter G.: **“Diseño de Estructuras de Concreto”**. Mc Graw – Hill. Edición 11. México D.F. 1997
6. Jiménez M., P. y otros: **“Hormigón Armado”**. Edición 14 (basada en la EHE y ajustada al Código Modelo y al Eurocódigo). Editorial Gustavo Gilo. S.A. Barcelona. España. 2000.
7. EHE: **“Instrucción de Hormigón Estructural”**. Serie Normativa. Ministerio de Fomento. Secretaría General Técnica. España. 2008.
8. ACI 318-05: **“Reglamento para las Construcciones de Concreto Estructural”**. EE.UU. 2005.
9. NC 7: 2002 **“Barras de acero para refuerzo de hormigón. Especificaciones”**

CAPÍTULO 2

Comportamiento de secciones de hormigón armado y pretensado ante solicitaciones normales

2.1. INTRODUCCIÓN. PRINCIPIOS DE CÁLCULO

El comportamiento de los elementos estructurales de hormigón armado o pretensado, interpretado mediante el estudio del comportamiento teórico de sus secciones, se basa en dos principios fundamentales reconocidos por los reglamentos y documentos normativos:

- Asegurar el equilibrio estático de la sección, igualando la solicitación exterior actuante con aquellas otras que, como respuesta, originan los esfuerzos interiores que tienen lugar tanto en el hormigón como en las barras de refuerzo.
- Garantizar la compatibilidad de deformaciones entre el acero y el hormigón a nivel de sección, siempre que se asegure adherencia perfecta entre ambos materiales.

Como el primero de estos dos principios refiere esfuerzos (tensiones) mientras el segundo deformaciones, se requiere considerar en la solución el juego de ecuaciones constitutivas de los materiales (llamadas también ecuaciones físicas), que se encargan de relacionar precisamente tensión con deformación mediante leyes del tipo (σ vs ϵ); el procedimiento es sencillo, mediante un desarrollo iterativo se fija una deformación a cualquier nivel de la sección, se determinan las tensiones correspondientes en cada material a través de las ecuaciones físicas que se definan para cada uno (hormigón y acero), y establecer finalmente el equilibrio interior de la sección.

Definitivamente ante la acción de la solicitación actuante, cualquiera sea su tipo, la sección responde para garantizar el equilibrio (acciones activas equilibradas por acciones reactivas), lo que para el caso de las solicitaciones normales, entendiéndose como tal a aquellas acciones que originan sólo tensiones normales a la sección, el equilibrio quedaría expresado de la manera siguiente:

$$\sum \text{Fuerzas Normales} = 0$$

$$\sum \text{Momento} = 0$$

En resumen, la predicción del comportamiento de secciones de hormigón armado o pretensado se sustenta en la solución de un problema clásico de Resistencia de Materiales, que consiste en dar respuesta a:

LA ESTÁTICA: Mediante la relación entre fuerzas externas e internas para garantizar el equilibrio de la sección y con él, el equilibrio del elemento. Se le denomina ECUACIONES DE EQUILIBRIO.

DESPLAZAMIENTO:

- ♦ Campo de los corrimientos $\begin{cases} u & \text{corrimiento lineal en la dirección del eje } x \\ v & \text{corrimiento lineal en la dirección del eje } y \\ w & \text{corrimiento lineal en la dirección del eje } z \end{cases}$
- ♦ Estado deformacional $\{\varepsilon_x, \varepsilon_y, \varepsilon_z$
- ♦ Ecuaciones geométricas (relación entre deformación unitaria y desplazamiento)

$$\begin{cases} \varepsilon_x = du/dx, & \varepsilon_y = dv/dy, & \varepsilon_z = dw/dz & \text{(lineales)} \\ \gamma_{xy} = du/dy + dv/dx, & \gamma_{xz} = du/dz + dw/dx, & \gamma_{yz} = dv/dz + dw/dy \end{cases}$$
- ♦ Ecuaciones de compatibilidad: compatibilidad de deformaciones en una sección.

En este Capítulo se estudiará el comportamiento de secciones de hormigón reforzadas tanto con armadura ordinaria pasiva (hormigón armado), como con armadura activa (pretesa) de alto límite elástico (hormigón pretensado), para el caso particular de las siguientes solicitaciones normales:

- **Tracción axial o centrada** (adecuado este estudio para establecer los modelos analíticos que permitan luego diseñar o revisar los elementos comúnmente llamados “**tensores**” que aparecen, por ejemplo, en el cordón inferior de armaduras de nudos articulados con cargas nodales, o el que puede disponerse para tomar los empujes de un arco, etc.).
- **Compresión axial o centrada** (apropiado su estudio para modelar analíticamente los elementos conocidos como “**columnas**” que aparecen, por ejemplo, en el cordón superior de las mismas armaduras de nudos articulados con cargas nodales, o en columnas propiamente dichas de edificios en los que pueda asegurarse que la carga que se entregue a cualquier sección se haga sin excentricidad alguna, etc.)
- **Flexión simple o pura** (la flexión simple representa la solicitación predominante en vigas, losas, escaleras, pantalla de los muros de contención, plato de las cimentaciones, etc.)

No se incluye en este Capítulo el comportamiento frente a **solicitaciones tangenciales de corte o torsión** pues se ha preferido hacerlo dentro de los Capítulos que tratarán estas solicitaciones.

2.2. COMPATIBILIDAD DE DEFORMACIONES

El estudio de la compatibilidad de las deformaciones que experimentan el hormigón y el acero bajo cualquier estadio de carga, exige reconocer la manera en que la sección llega a deformarse. Cuando se trata de esfuerzos que se originan perpendicularmente a la sección transversal del elemento que se analiza, los ensayos han confirmado que para determinados rangos de la relación (*luz/peralto*), la sección al deformarse preserva su planeidad, es decir, no experimenta alabeo alguno. Si se trata de esfuerzos normales que actúan axialmente entonces la sección experimenta un desplazamiento paralelo a su estado original, pero conservando su configuración recta. Ya cuando los esfuerzos se descentran o se trata de la acción de un momento flector, la sección al deformarse gira, pero conservando también su

configuración plana. Luego se regresará a esta idea que representa una de las hipótesis básicas para estudiar las situaciones de resistencia límite en el caso de las solicitaciones normales.

Se reconoce que la adherencia (§ 1.7.7) es la encargada de garantizar que el acero y el hormigón se comporten de manera que ambos materiales aseguren una compatibilización de sus deformaciones a nivel de sección, es decir, asegurar que a nivel de la fibra en la que el hormigón está en contacto con el acero, los dos materiales igualan sus deformaciones. Si la adherencia no se garantizara, entonces existiría un deslizamiento relativo entre ambos materiales que daría lugar a deformaciones no compatibles, y a sensibles modificaciones de los modelos que interpretan el comportamiento del mecanismo de trabajo del hormigón estructural.

Tal es el caso, por ejemplo, del pretensado no adherente, o de una viga de hormigón que se ha decidido reforzar encapsulando la armadura de refuerzo en tubos plásticos que impidan el contacto directo entre ambos materiales. Si este acero encapsulado está debidamente anclado en sus extremos, es cierto que se logra compatibilidad, pero a nivel global de la pieza y no a nivel de sección, comportándose entonces el elemento más como un arco atirantado que como una viga, perdiéndose la respuesta en flexión.

En este epígrafe se abordarán los aspectos que se derivan del trabajo conjunto acero- hormigón fundamentado en el principio de compatibilidad de deformaciones, y se derivarán las ecuaciones que confirman esta compatibilidad cuando la sección modifica su posición original al recibir la acción de las diferentes solicitaciones normales que serán estudiadas.

2.2.1 BREVE RESEÑA PARA LA COMPRENSIÓN DEL HORMIGÓN PRETENSADO ADHERENTE

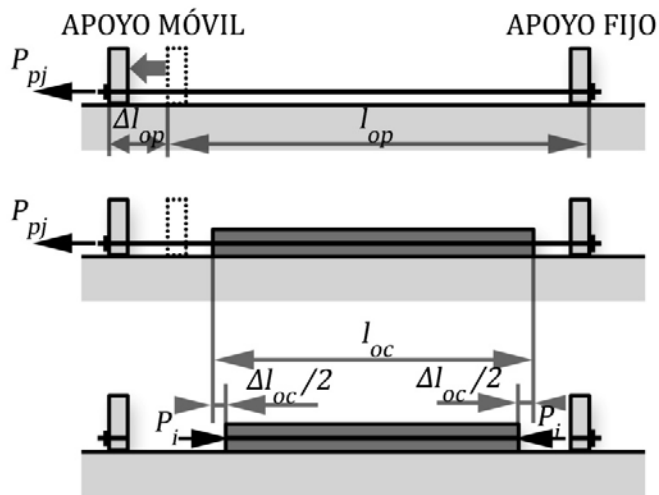
En la Introducción del Capítulo I se describió la esencia del hormigón pretensado como una técnica que introduce precompresiones a la sección de hormigón con el interés de eliminar o atenuar las tracciones que puede originar luego la carga exterior. Se distinguen dos procedimientos generales que se siguen para su aplicación: el pretesado y el postesado¹. Sólo como ilustración de la idea rectora del pretensado, la Figura 2.1 refiere el segundo de estos procedimientos: el pretesado.

Para ejecutarlo se construyen bancos de tesado que poseen dos apoyos rígidos en cada uno de sus extremos, y contra estos apoyos es que se ancla la armadura por medio de aditamentos especiales (aparatos de anclaje) que impiden el deslizamiento del acero una vez estirado. Frecuentemente uno de los apoyos es fijo mientras el otro, que es móvil, se va desplazando cuando es accionado desde un sistema mecánico propio de la técnica para introducir la tensión en el acero.

Como el acero se halla anclado a los apoyos, el desplazamiento de uno de ellos se traduce en un alargamiento del propio acero y por tanto en la introducción de un esfuerzo de tracción en él; el proceso se desarrolla de forma continua hasta tanto se alcance la tensión inicial estipulada en el proyecto, esfuerzo que no llega a sobrepasar el límite de proporcionalidad del acero para mantenerlo en un estado elástico que asegure proporcionalidad entre tensión y deformación (Figura 2.1a). De esta

¹ El pretensado, como técnica, puede ser clasificado de diversas maneras. Una de ellas es atendiendo al momento en que se estira el acero respecto del momento en que se vacía el hormigón. Si el estiramiento mecánico que se introduce a la armadura es previo a la colocación del hormigón, se está en el caso del **pretesado** (la losa Spiroll responde a esta tecnología de pretensado). Sin embargo, si el proceso se invierte y primero se coloca el hormigón en los moldes, previendo antes disponer conductos por los que luego se colocaría el acero a estirar, y sólo una vez que haya alcanzado el hormigón la resistencia conveniente es que se procede a colocar, estirar y anclar la armadura de acero, se estaría recurriendo a la técnica del **postesado**. La primera es más cercana a la construcción fabril, es decir, al prefabricado, la segunda a la construcción in situ.

manera queda preparado el banco para recibir posteriormente el hormigón, vertido directamente en moldes previamente dispuestos, o siguiendo un proceso de extrusado que es también habitual en esta técnica (Figura 2.1b).



- Acero debidamente anclado a ambos apoyos y comienza a desplazarse el apoyo móvil, apareciendo una tensión en el acero.
- Concluido el tesado, y una vez que el acero haya alcanzado la tensión deseada, se vacía el hormigón.
- Cuando el hormigón adquiere la resistencia requerida, se corta el acero y se transfiere su fuerza al hormigón. El acero se encuentra traccionado y el hormigón comprimido.

Figura 2.1 Ilustración del proceso secuencial asociado a la técnica de pretensado.

Colocado el hormigón y transcurrido el tiempo necesario para que alcance la resistencia que le permita resistir la fuerza de compresión que le será transferida, se corta el acero (Figura 2.1c) que de inmediato procura recuperar su longitud inicial lo que es impedido parcialmente por el anclaje². El acortamiento parcial que tiene lugar se convierte en una fuerza de compresión sobre el hormigón (P_i), y de hecho en una prueba de carga para él. Repárese en las siguientes dos observaciones asociadas a ese instante: primero, la fuerza que se transfiere al hormigón no es precisamente la que se aplicara al acero durante el tesado, pues durante los procesos de estiramiento y transferencia tuvieron lugar ciertas pérdidas de tensión, de manera que si se estira aplicando la fuerza P_{pj} , cuando tiene lugar las pérdidas iniciales resultará la fuerza $P_i < P_{pj}$; segundo, el hormigón experimenta un acortamiento instantáneo Δl_{oc} que, producto de hallarse el acero adherido a él, por compatibilidad experimentará ese mismo acortamiento, perdiendo tensión. Como no existe carga exterior aun, el acero traccionado y el hormigón comprimido se auto equilibran. Transcurrido el tiempo se van produciendo otras pérdidas de tensión³ (llamadas pérdidas diferidas), y la fuerza de tracción en el acero continúa disminuyendo hasta que llega a estabilizarse y convertirse en fuerza efectiva o permanente de pretensado (P_e), fuerza que ha de mantener pre comprimido “indefinidamente” al hormigón, es decir:

² En el caso del pretensado el anclaje del acero es esencialmente diferente al postesado. Si bien en este último se emplean aditamentos mecánicos de anclaje comercializados bajo diferentes patentes, en pretensado el anclaje final se logra mediante un mecanismo de cuña que se forma por el aumento del diámetro del acero que tiene lugar en una longitud de transferencia dada. Al cortarse el acero, por efecto de Poisson es que aumenta su diámetro.

³ Son varias las razones que originan pérdidas de tensión en la armadura pretensada previamente estirada. En general algunas son iniciales, es decir, tienen lugar durante el propio momento de tesado (pérdida por fricción debidas a las curvaturas intencional o accidental que presenta el perfil de los tendones en el caso del postesado; pérdida por asentamiento, penetración o deslizamiento de las cuñas en los anclajes durante la transferencia; pérdida por acortamiento elástico del hormigón, etc.), mientras otras, llamadas diferidas, tienen lugar con el paso del tiempo, especialmente intensas en los primeros meses a partir de la transferencia de la fuerza de pretensado (retracción del hormigón, fluencia debido a la acción permanente del pretensado, relajación del acero, etc.)

$$P_{pj} \xrightarrow{(-\text{Pérdidas Iniciales})} P_i \xrightarrow{(-\text{Pérdidas Diferidas})} P_e$$

En el momento en que comienza a actuar la carga exterior sobre el elemento que se estudia, la acción interior⁴ que ella genera estaría actuando sobre una sección que ya experimentó un corrimiento o un giro producido por el pretensado transferido, y en la medida en que la acción interior va incrementando su magnitud, el acero va alargándose o acortándose según su efecto sobre él; con lo primero aumenta su tensión y con lo segundo disminuye, y podrá llegar a disminuir tanto que llegue a perder toda la tensión inicial, lo que resulta poco deseado.

Si para cada escalón de carga (i) a la fibra de hormigón situada al mismo nivel del acero le corresponde una deformación igual a ε_{ci} (tracción) o ε'_{ci} (compresión), entonces esa misma deformación tendrá lugar en el acero producto de la adherencia, y se adicionaría a la inicial originada por el pretensado.

En definitiva, las ecuaciones de compatibilidad de las deformaciones se escriben para tres momentos singulares dentro del proceso descrito: *antes de la transferencia del pretensado al hormigón*⁵; *en el mismo instante de la transferencia y, finalmente, durante la etapa de carga*. Para ello se adoptará el siguiente convenio de signo: se impondrá el signo positivo (+) a las deformaciones de tracción, mientras que el negativo (-) a las de compresión.

2.2.2 ESTUDIO DE LA TRACCIÓN AXIAL. GENERALIDADES.

Un elemento estructural sometido a la acción de una carga de tracción sufrirá un alargamiento que se traduce en un cambio en su longitud inicial (l_o). Como en este epígrafe se estudia el caso en que la acción externa se localiza precisamente en el baricentro plástico de la sección, cada sección del elemento experimentará un corrimiento paralelo a su posición original sin perder su planeidad, y tratándose de un elemento de hormigón reforzado con acero, la deformación que experimentan ambos materiales tienen que ser de igual magnitud, como se observa en la Figura 2.2.

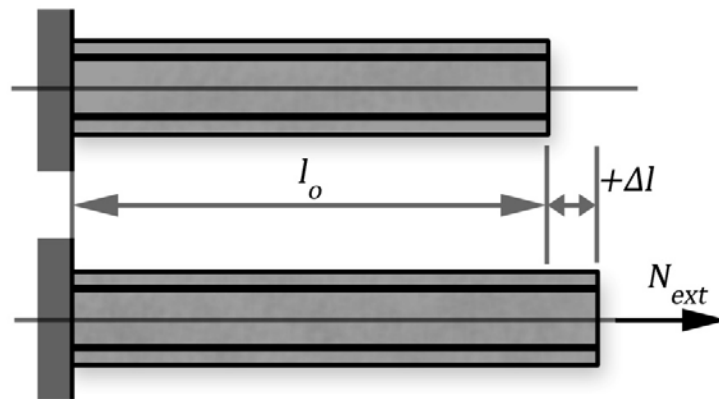


Figura 2.2 Corrimiento experimentado por una sección solicitada a tracción axial

⁴ Puede tratarse de una **Tracción** (N_{ext}), una **Compresión** (N'_{ext}) o un **Momento Flector** (M)

⁵ En realidad este momento no es de importancia a los fines del cálculo en hormigón pretensado, sin embargo, se incluye aquí para destacar un instante cualitativamente singular durante el estudio del comportamiento.

Producto de la adherencia, el corrimiento Δl (alargamiento en este caso) experimentado por el elemento frente a la carga exterior N_{ext} , induce iguales deformaciones longitudinales unitarias ($\varepsilon = \Delta l / l_o$) en ambos materiales.

2.2.2.1 COMPATIBILIDAD DE DEFORMACIONES EN SECCIONES DE HORMIGÓN ARMADO

Cuando se trata de hormigón armado la armadura de refuerzo es pasiva y su deformación inicial es nula, el acero se activa sólo a partir de la acción de la carga externa. En consecuencia el alargamiento Δl que experimenta la pieza bajo la incidencia de la carga externa N_{ext} , origina deformaciones longitudinales en el hormigón y el acero iguales y compatibles producto de encontrarse ambos materiales perfectamente adheridos. Esta compatibilidad puede quedar escrita de la manera siguiente:

$$\varepsilon_{ci} = \varepsilon_{si} = + \Delta l_i / l_o$$

Siendo ε_{ci} y ε_{si} las deformaciones unitarias que tienen lugar en el hormigón y el acero, respectivamente. El signo más se ha reservado para indicar que se trata de una deformación de elongación, es decir, originada por la tracción.

2.2.2.2 COMPATIBILIDAD DE DEFORMACIONES EN SECCIONES DE HORMIGÓN PRETENSADO

EN EL INSTANTE INMEDIATO ANTERIOR A LA TRANSFERENCIA: figura 2.3

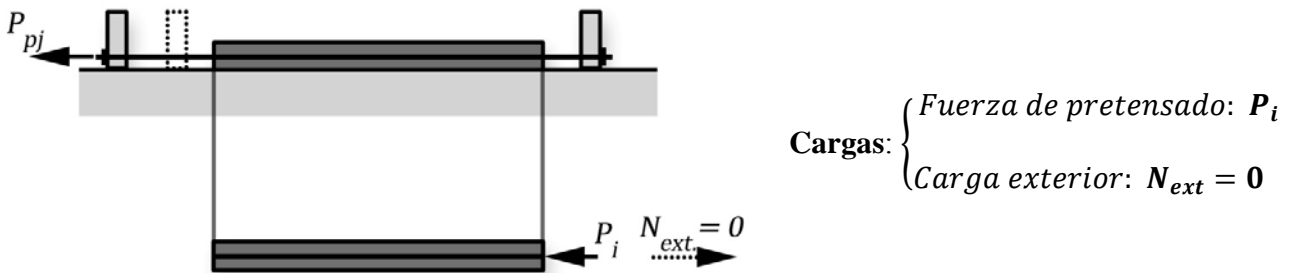


Figura 2.3 Deformación experimentada por la pieza en el instante anterior a la transferencia

$$\text{Deformaciones: } \begin{cases} \text{HORMIGÓN: } \varepsilon_{ci} = 0 \\ \text{ACERO: } \varepsilon_{pi} = + \frac{\Delta l_p}{l_{op}} = + \frac{P_i}{E_p A_p} \end{cases}$$

En realidad en este instante no puede hablarse de compatibilidad, pues no se ha transferido aun el pretensado.

EN EL INSTANTE INMEDIATO POSTERIOR A LA TRANSFERENCIA: figura 2.4

$$\text{Cargas: } \begin{cases} \text{Fuerza de pretensado: } P_i \\ \text{Carga exterior: } N_{ext} = 0 \end{cases}$$

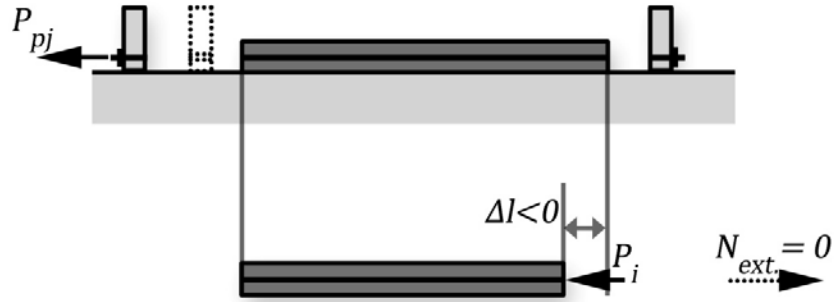


Figura 2.4 Deformación experimental por la pieza en el instante posterior a la transferencia

Deformaciones:

$$\begin{cases} \text{HORMIGÓN: } \varepsilon'_{c(o)} = f(P_i) = \Delta l / l_o < 0 \quad (\text{Originada por el pretensado transferido}) \\ \text{ACERO: } \varepsilon_p = \varepsilon_{pi} + \varepsilon_{pc} = + \frac{P_i}{E_p A_p} + \varepsilon_{pc} \end{cases}$$

Y por compatibilidad $\varepsilon_{pc} = -\varepsilon'_{c(o)}$

ETAPA DE CARGA Y LUEGO DE RECUPERADO EL ACORTAMIENTO QUE ORIGINÓ EL PRETENSADO: figura 2.5

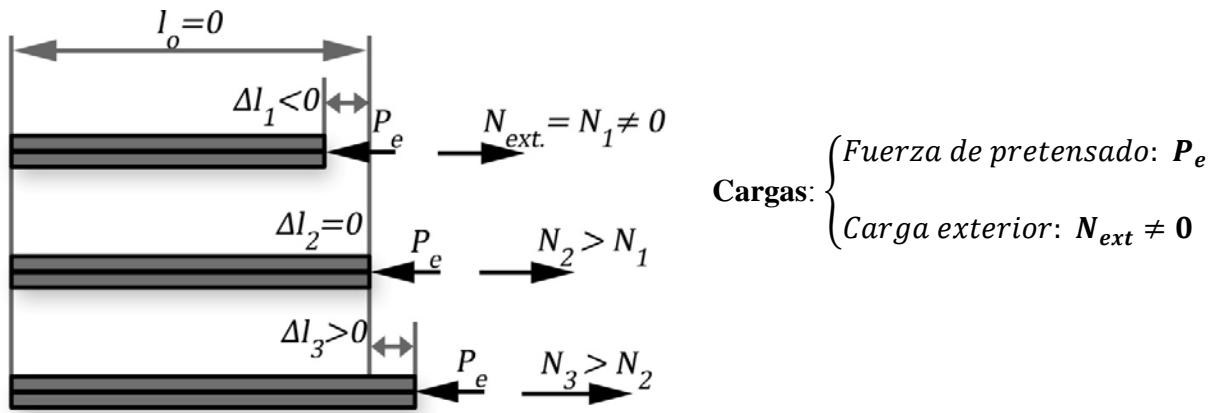


Figura 2.5 Deformación experimental por la pieza mientras se carga exteriormente

Para el tercer escalón de carga, es decir, para $N_{ext} = N_3$, que ya rebasa el acortamiento inicial experimentado por la pieza al transferirse el pretensado, se tiene:

$$\text{Deformaciones: } \begin{cases} \text{HORMIGÓN: } \varepsilon_c = + \Delta l / l_o \quad (\text{Originada por la carga exterior}) \\ \text{ACERO: } \varepsilon_p = \varepsilon_{pe} + \varepsilon_{pc} = + \frac{P_e}{E_p A_p} + \varepsilon_{pc} \end{cases}$$

Y por compatibilidad $\varepsilon_{pc} = +\varepsilon_c$

Aun cuando en las Figuras 2.3, 2.4 y 2.5 se ha esquematizado el caso del pretensado, cuando se trate del postesado adherente el tratamiento es análogo al descrito anteriormente. Sin embargo en el

pretensado no adherente ya no se pueden utilizar las mismas ecuaciones de compatibilidad que acaban de escribirse a nivel de sección, sino que la compatibilidad es global y habría que considerarla a nivel de todo elemento, y no de sección.

2.2.3 ESTUDIO DE LA COMPRESIÓN AXIAL

Tratándose ahora de una carga exterior N'_{ext} que comprime axialmente al elemento este sufrirá un acortamiento Δl que modifica también su longitud inicial (l_o), sin embargo, como la acción externa se aplica en el baricentro plástico, la sección experimentará un corrimiento paralelo a su posición original, como mismo sucedió para la tracción axial, y la deformación longitudinal unitaria que provoca la carga externa en ambos materiales tiene que ser de igual magnitud a causa de la adherencia. La Figura 2.6 ilustra este hecho.

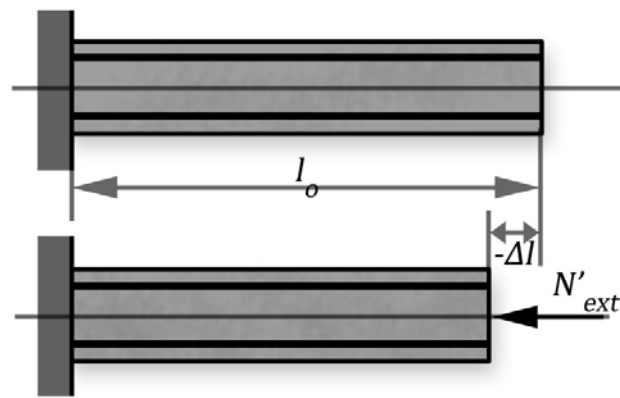


Figura 2.6 Corrimiento experimentado por una sección solicitada a tracción axial

El acortamiento que experimenta el elemento cuando se le somete a la carga N'_{ext} provoca deformaciones longitudinales iguales tanto en el hormigón como en el acero, pues ambos materiales, al estar adheridos, experimentarán el mismo corrimiento Δl que tuvo lugar en el elemento. Aquí también se distinguirán los casos de hormigón reforzado con armadura pasiva (armado), y con armadura activa (pretensado).

2.2.3.1 COMPATIBILIDAD DE DEFORMACIONES EN SECCIONES DE HORMIGÓN ARMADO

Refiriéndose al hormigón armado, la armadura de refuerzo no posee deformación previa alguna y sólo se deformará bajo la acción de la carga externa N'_{ext} . Para este caso la compatibilidad de las deformaciones se escribe de la manera siguiente: $\epsilon'_{ci} = \epsilon'_{si} = -\Delta l_i / l_o$

El signo negativo, como ya se indicara, refiere una deformación de acortamiento, es decir, causada por la compresión.

2.2.3.2 COMPATIBILIDAD DE DEFORMACIONES EN EL CASO DE SECCIONES DE HORMIGÓN PRETENSADO

Aunque los análisis numéricos que se realizan más adelante lo confirmarán, es evidente que el pretensado se convierte en una carga que consume parte de la capacidad resistente de la sección cuando se aplica a elementos que estarán sometidos luego a compresión axial, y más aun, su efecto va

cediendo en la medida en que crece la carga exterior pues con ella se origina un acortamiento en el acero que disminuye su tensión inicial.

EN EL INSTANTE INMEDIATO ANTERIOR A LA TRANSFERENCIA: figura 2.7

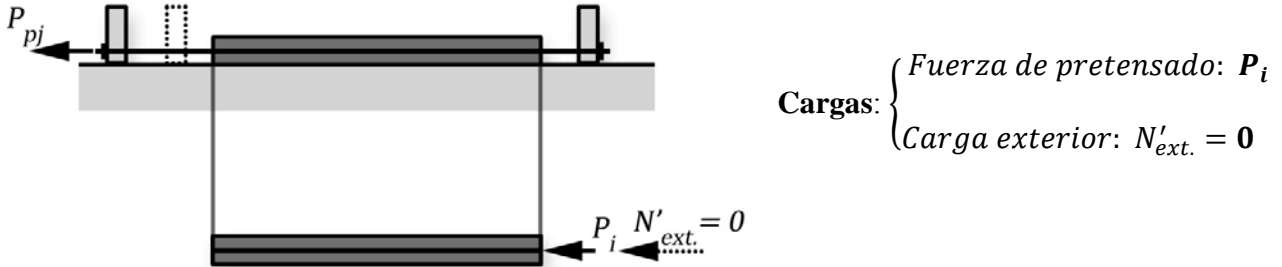


Figura 2.7 Deformación experimentada por la pieza en el instante anterior a la transferencia

Deformaciones: $\begin{cases} \text{HORMIGÓN: } \varepsilon'_{ci} = 0 \\ \text{ACERO: } \varepsilon_{pi} = +\frac{\Delta l_p}{l_{op}} = +\frac{P_i}{E_p A_p} \end{cases}$

Tampoco aquí se puede hablarse de compatibilidad, pues no se ha transferido aun el pretensado.

EN EL INSTANTE INMEDIATO POSTERIOR A LA TRANSFERENCIA: figura 2.8

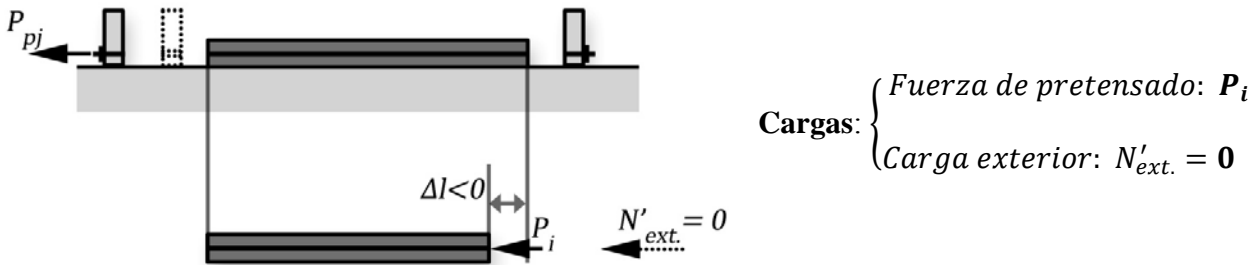
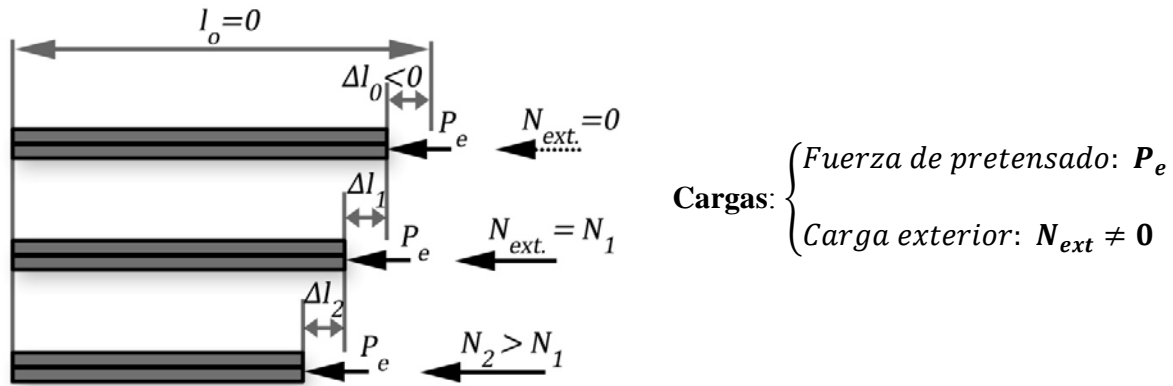


Figura 2.8 Deformación experimentada por la pieza en el instante posterior a la transferencia

Deformaciones:

$$\begin{cases} \text{HORMIGÓN: } \varepsilon'_{c(o)} = f(P_i) = \Delta l / l_o < 0 \quad (\text{Originada por el pretensado transferido}) \\ \text{ACERO: } \varepsilon_p = \varepsilon_{pi} + \varepsilon_{pc} = +\frac{P_i}{E_p A_p} + \varepsilon_{pc} \end{cases}$$

Y por compatibilidad $\varepsilon_{pc} = -\varepsilon'_{c(o)}$

ETAPA DE CARGA: figura 2.9**Figura 2.9 Deformación experimentada por la pieza en el instante de la transferencia**

$$\text{Deformaciones: } \begin{cases} \text{HORMIGÓN: } \varepsilon'_c = -\Delta l / l_o \quad (\text{Originada por la carga exterior}) \\ \text{ACERO: } \varepsilon_p = \varepsilon_{pe} + \varepsilon_{pc} = +\frac{P_e}{E_p A_p} + \varepsilon_{pc} \end{cases}$$

Y por compatibilidad $\varepsilon_{pc} = -\varepsilon'_c$

$$\therefore \varepsilon_p = +\frac{P_e}{E_p A_p} - \varepsilon'_c$$

La última ecuación que refiere la deformación del acero ε_p en el estado en carga, confirma que la carga externa de compresión pudiera llegar a anular el efecto del pretensado, lo que sucedería cuando se iguale la deformación de acortamiento que origina dicha carga y la deformación efectiva asociada al pretensado una vez que han tenido lugar las pérdidas todas ($\varepsilon_{pe} = \varepsilon'_c$). A partir de ese instante la pieza funcionaría de manera análoga a una de hormigón armado.

2.2.4 ESTUDIO DE LA FLEXIÓN SIMPLE

Aun cuando la flexión representa una sollicitación que origina esfuerzos normales a la sección como las dos anteriores, el tipo de deformación que experimenta la sección es cualitativamente diferente, pues las secciones al deformarse no lo hacen paralelamente a sus posiciones originales, a pesar de que siga considerándose que no pierden su planeidad.

En efecto, bajo la acción de momentos flectores la pieza se flexa, es decir, adopta una elástica que sigue una ley curva, debido a que una zona de ella se acorta mientras la otra zona se alarga. Considerando una rebanada de longitud dx , tomada en la viga que se muestra en la Figura 2.10, la zona comprimida, en este caso la superior, se acorta, mientras que la zona traccionada, la inferior, se alarga, quedando la rebanada deformada como se indica en la propia figura.

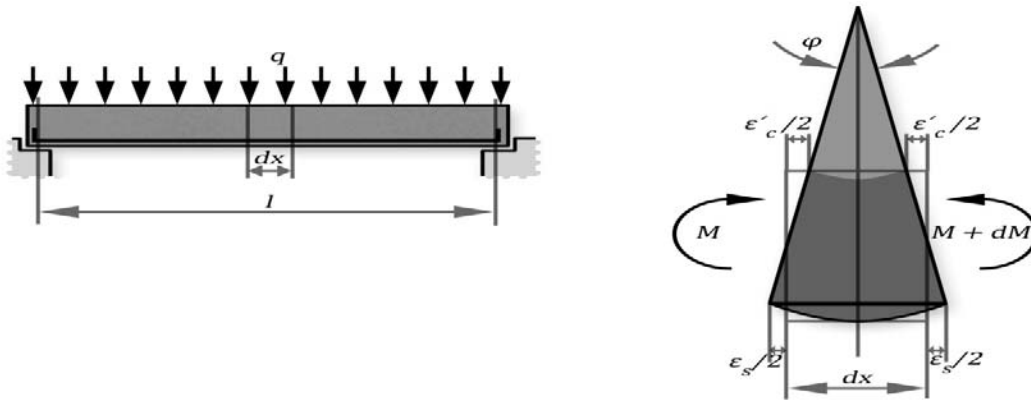


Figura 2.10 Deformación de una rebanada diferencial de un elemento de hormigón armado o pretensado, sometido a flexión.

Sin embargo, es costumbre representar las deformaciones unitarias que tienen lugar en todas las fibras de la sección por medio del llamado diagrama deformacional que se indica en la Figura 2.11. Este diagrama sólo es representativo de las deformaciones de dicha sección, y a pesar de ser el que se utiliza en la práctica para escribir las ecuaciones de compatibilidad, en realidad la deformación ocurre como se ilustra en la Figura 2.10. Mientras se cumplan determinadas relaciones entre la luz y el peralte de la sección⁶, la sección que es plana antes de deformarse (estado deformacional de referencia m-m) continuará siéndolo luego de deformada, es decir, sólo gira (n-n), de tal manera que:

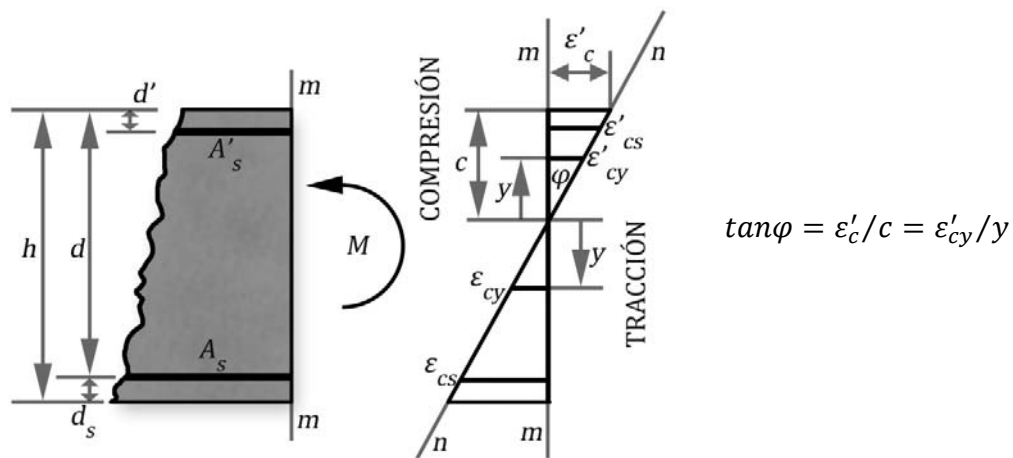


Figura 2.11 Estado deformacional de la sección genérica m-m cuando se somete al momento flector M.

Como se trata de ángulos de giro o curvaturas muy pequeñas, entonces:

$$\begin{aligned} \tan \varphi &= \varphi \\ \therefore \varepsilon'_{cy} &= \pm(\varphi \cdot y) \end{aligned}$$

Y como ya se estableció, corresponde el signo (+) a la tracción, mientras que el signo (-) a la compresión.

⁶ El límite a partir del cual se acepta la planeidad de la sección al deformarse es algo controversial pues son diversos los valores que reconocen los investigadores. A lo largo de todo el texto se fijará esta frontera en una relación del tipo $l/h \geq 2$.

2.2.4.1 COMPATIBILIDAD DE DEFORMACIONES EN SECCIONES DE HORMIGÓN ARMADO

Se analiza la situación de un hormigón reforzado con acero pasivo y cuando el momento flector M hace girar la sección, el acero adherido experimentará una deformación (ε_s ó ε'_s si se trata de una elongación o un acortamiento, respectivamente), debiendo cumplirse que esta deformación sea igual a la que experimenta la fibra de hormigón que se sitúa al mismo nivel de la armadura (ε_{cs} ó ε'_{cs}), es decir, la compatibilidad queda escrita de la manera siguiente:

$$\varepsilon_s = \varepsilon_{cs} \quad (\text{Para la armadura situada en zona de tracción})$$

$$\varepsilon'_s = \varepsilon'_{cs} \quad (\text{Para la armadura situada en zona de compresión})$$

Como la sección al deformarse se mantiene plana, se originan triángulos semejantes en el esquema que representa su estado deformacional (Figura 2.11), en los cuales pueden escribirse las siguientes razones de proporcionalidad:

$$\frac{\varepsilon'_c}{c} = \frac{\varepsilon_{cs}}{d-c} \quad \Rightarrow \quad \varepsilon_{cs} = \left(\frac{d-c}{c}\right) \varepsilon'_c \quad (\text{ZONA EN TRACCIÓN})$$

$$\frac{\varepsilon'_c}{c} = \frac{\varepsilon'_{cs}}{c-d'} \quad \Rightarrow \quad \varepsilon'_{cs} = \left(\frac{c-d'}{c}\right) \varepsilon'_c \quad (\text{ZONA EN COMPRESIÓN})$$

Y mediante el cumplimiento de la compatibilidad pueden ser determinadas las deformaciones que tienen lugar en las armaduras de refuerzo a partir de las que corresponden a la fibra de hormigón situadas a su nivel. En efecto:

$$\text{PARA ARMADURAS EN TRACCIÓN:} \quad \varepsilon_s = \varepsilon_{cs} \quad \Rightarrow \quad \varepsilon_s = \left(\frac{d-c}{c}\right) \varepsilon'_c$$

$$\text{PARA ARMADURAS EN COMPRESIÓN:} \quad \varepsilon'_s = \varepsilon'_{cs} \quad \Rightarrow \quad \varepsilon'_s = \left(\frac{c-d'}{c}\right) \varepsilon'_c$$

2.2.4.2 COMPATIBILIDAD DE DEFORMACIONES EN SECCIONES DE HORMIGÓN PRETENSADO

Cuando se trata del pretensado el acero ha sido estirado (deformado) previo a la acción de las cargas exteriores. Si continúa representándose por ε_{pe} a la deformación efectiva del acero asociada a la carga de tesado una vez desarrolladas todas las pérdidas de tensión, entonces la deformación que origina la carga exterior se adicionará o sustraerá a este valor en dependencia de la posición de la armadura en la sección, es decir, que la carga exterior, en este caso el momento flector M , lo alargue o lo acorte. Se tendrá entonces:

$$\text{PARA ARMADURAS EN TRACCIÓN:} \quad \varepsilon_p = \varepsilon_{pe} + \varepsilon_{cs} \quad \Rightarrow \quad \varepsilon_p = \varepsilon_{pe} + \left(\frac{d-c}{c}\right) \varepsilon'_c$$

$$\text{PARA ARMADURAS EN COMPRESIÓN:} \quad \varepsilon_p = \varepsilon_{pe} - \varepsilon'_{cs} \quad \Rightarrow \quad \varepsilon_p = \varepsilon_{pe} - \left(\frac{c-d'}{c}\right) \varepsilon'_c$$

Una generalización de todo cuanto se ha presentado para las tres solicitaciones normales que se han analizado, permite concluir con la siguiente aseveración:

$$\begin{array}{l} \text{DEFORMACIÓN DEL} \\ \text{ACERO PRETENSADO} \\ \text{BAJO LA CARGA EXTERNA} \end{array} = \begin{array}{l} \text{DEFORMACIÓN PREVIA DEL} \\ \text{ACERO ASOCIADA AL TESADO} \end{array} \pm \begin{array}{l} \text{DEFORMACIÓN PROVOCADA} \\ \text{POR LA CARGA EXTERNA} \end{array}$$

O sea, para el i -ésimo estado de carga: $\varepsilon_{pi} = \varepsilon_{pe} \pm \varepsilon_{ci}$

Si se anula el primer término del miembro derecho de esta última ecuación, y además se hace $\varepsilon_{pi} = \varepsilon_{si}$, resultaría la compatibilidad de deformaciones correspondiente al hormigón armado, es decir, el hormigón armado puede modelarse como un caso particular del pretensado cuando $\varepsilon_{pe} = 0$.

2.3 ECUACIONES FÍSICAS DEL HORMIGÓN Y EL ACERO

El Capítulo I ofreció varios modelos para representar las ecuaciones físicas del hormigón entre los que resaltan el diagrama parabólico de Collins, el diagrama parábola-rectángulo de Rüsçh y el diagrama parabólico-lineal de Hognestad. Cada uno ofrece una representación apropiada del comportamiento del hormigón cuando se somete a esfuerzos de compresión axial, y la mayor diferencia se registra a partir de la deformación que corresponde a la máxima tensión que se alcanza durante el ensayo. Por demás, a cada uno de los modelos tratados corresponde una ley matemática que representa la ecuación física o constitutiva del material.

Otro tanto sucede para el acero, a pesar de que durante los ensayos a tracción de este material se obtienen relaciones tensión vs. deformación que refieren un rango plástico precedido de un rango de respuesta elástica, con sus diferencias a partir del tipo de acero que se trate (natural o de alto límite elástico), los Reglamentos tienden a ofrecer leyes simplificadas que en general son de tipo bilineal (una primera recta con una pendiente que coincide con el módulo de deformación longitudinal del material, y que refiere su comportamiento elástico hasta el momento en que alcanza la deformación de fluencia, y una segunda recta de pendiente nula a partir de esta deformación).

Leyes de este tipo con sus correspondientes ecuaciones constitutivas, son las que serán empleadas para estudiar el comportamiento de elementos de hormigón armado y pretensado frente a las solicitaciones normales más generales y frecuentes que pueden presentarse.

2.4. COMPORTAMIENTO DE SECCIONES FRENTE A SOLICITACIONES NORMALES

El tema no se refiere al estudio experimental de piezas bajo diferentes solicitaciones, lo que resultaría muy útil y a la vez un instrumento de inestimable valor para confirmar lo que en realidad será expuesto. En los términos que aquí se consideran, el estudio del comportamiento se refiere al análisis numérico que permita construir diagramas *Carga vs. Corrimiento* para los casos de las solicitaciones axiales (tracción y compresión), o diagramas *Momento vs. Curvatura* para el caso de la flexión. Este análisis responde a un modelo analítico que exige resolver, como invariantes, el sistema conformado por las llamadas ecuaciones de campo, a saber:

- Ecuaciones de equilibrio a nivel de sección
- Ecuaciones de compatibilidad de las deformaciones (aceptando adherencia perfecta entre hormigón y acero)
- Ecuaciones físicas o constitutivas de los materiales (hormigón y acero)

Estas últimas ecuaciones son las que permiten relacionar tensiones con deformaciones y su diversidad (considérese todo cuanto se ha visto para las leyes σ'_c vs. ϵ'_c del hormigón) conduce a diferentes soluciones para las curvas de comportamiento que se deseen construir.

Sea cual fuere la solicitación que se analice e incluso con independencia de que se considere el caso del hormigón armado o pretensado, se puede establecer un procedimiento para deducir las curvas de comportamiento que resulta aplicable a todas las situaciones que se van a presentar, a saber:

Caso 1: Tracción Axial en hormigón armado (**Ejercicio 2,1**)

Caso 2: Tracción Axial en hormigón pretensado (**Ejercicio 2,2**)

Caso 3: Compresión Axial en hormigón armado (**Ejercicio 2,3**)

Caso 4: Compresión Axial en hormigón pretensado (**Ejercicio 2,4**)

Caso 5: Flexión Simple en hormigón armado (**Ejercicio 2,7**)**Caso 6:** Flexión Simple en hormigón pretensado (**Ejercicio 2,9**)

El **procedimiento** sugiere identificar inicialmente los intervalos de deformación en los que la respuesta de ambos materiales (hormigón y acero) no modifica su cualidad, además de los puntos singulares que caracterizan el comportamiento en la intersección de dos intervalos vecinos. Luego se sigue un proceso iterativo dentro de cada intervalo en el que para cada iteración (desde $i=1$ hasta $i=n$) se ha de obrar de la manera siguiente:

- Fijar una deformación unitaria (ε_{ci}) para el hormigón atendiendo al intervalo o punto singular que se desee analizar.
- Recurrir a la ecuación de compatibilidad de las deformaciones para determinar la deformación unitaria en el acero (ε_{si})
- Comprobar si el acero está o no en fluencia ($\varepsilon_{si} \stackrel{?}{\geq} \varepsilon_y$)
- Determinar la tensión del acero atendiendo a su ley constitutiva: $f_{si} = g_1(\varepsilon_{si})$
- Determinar, a partir de las condiciones de equilibrio, el valor de la acción externa que originó la deformación fijada:

ESFUERZOS AXIALES: $N_i = f(C_{ci}, T_{si})$, es decir: $N_i = g_2(\varepsilon_{ci})$

$$\text{FLEXIÓN:} \begin{cases} C_{ci} = \sum T_{si} \\ M_i = C_{ci} \cdot z_{ci} = \sum (T_{si} \cdot z_{si}) \end{cases} \quad \text{Siendo } M_i = g_3(\varepsilon_{ci})$$

- Determinar el corrimiento (en el caso de esfuerzos axiales) o curvatura (en el caso de la flexión) que experimenta la sección para la deformación fijada:

ESFUERZOS AXIALES: $(\Delta l_i = \varepsilon_{ci} \cdot l_o)$

FLEXIÓN: $(\varphi_i = \varepsilon_{ci} / c_i)$

- Anotar las coordenadas del punto perteneciente a la curva de comportamiento para esta iteración:

ESFUERZOS AXIALES: $(\Delta l_i; N_i)$

FLEXIÓN: $(\varphi_i; M_i)$

- Repetir este mismo proceso para un nuevo valor de (ε_{ci}). Se obtendrán así tantos puntos del diagrama de comportamiento como iteraciones se realicen, y la unión de estos puntos representa la curva de comportamiento que se está investigando.

Los ejemplos numéricos que se incluirán en este apartado presuponen, todos, las leyes constitutivas que se ilustran en la Figura 2.12. Las ecuaciones que corresponden a estas leyes se exponen en las Tablas 2.1, 2.2 y 2.3 para el hormigón a compresión y tracción, para el acero ordinario y para el acero pretensado, respectivamente.

Lo mismo la Figura 2.12c que la Tabla 2.3 definen la ley constitutiva del acero pretensado, gráfica y analíticamente, y lo hacen mediante un diagrama bilineal simplificado que modifica la deformación de fluencia de este refuerzo.

problema, aunque no debe preocupar pues compromete poco la veracidad de los resultados que se obtengan.

TABLA 2.1 Ecuaciones constitutivas del hormigón a compresión y tracción

		LEYES DE Tensión	MÓDULO DE DEFORMACIÓN
HORMIGÓN	COMPRESIÓN (Ley parabólica en todo el rango de deformación)	$\sigma'_c = k_3 f'_c \left[2 \left(\frac{\varepsilon'_c}{\varepsilon_o} \right) - \left(\frac{\varepsilon'_c}{\varepsilon_o} \right)^2 \right]$ CORTA DURACIÓN: $k_3 = 1.0$ LARGA DURACIÓN: $k_3 = 0.80$	$E_c = 4700 \sqrt{f'_c}$ $E_c = 4700 \sqrt{30}$
	TRACCIÓN (Ley lineal en todo el rango de deformación)	$\sigma_c: \begin{cases} E_c \varepsilon_c & \text{para } \varepsilon_c < 0.0001 \\ 0 & \text{para } \varepsilon_c \geq 0.0001 \end{cases}$	$E_c = 25\,740\text{ MPa}$

TABLA 2.2 Ecuaciones constitutivas del acero ordinario a tracción y compresión.

		LEYES DE Tensión	MÓDULO DE DEFORMACIÓN
ACERO ORDINARIO	COMPRESIÓN (Ley bilineal)	$f'_s: \begin{cases} E'_s \varepsilon'_s & \text{para } \varepsilon'_s < \varepsilon_y \\ f_y & \text{para } \varepsilon_y \leq \varepsilon'_s \leq \varepsilon'_{cmax} \end{cases}$	$E_s = 2 \cdot 10^5\text{ MPa}$ $\varepsilon_y = f_y / E_s$
	TRACCIÓN (Ley bilineal)	$f_s: \begin{cases} E_s \varepsilon_s & \text{para } \varepsilon_s < \varepsilon_y \\ f_y & \text{para } \varepsilon_y \leq \varepsilon_s \leq 0.01 \end{cases}$	

TABLA 2.3 Ecuaciones constitutivas del acero pretensado a tracción y compresión.

		LEYES DE Tensión	MÓDULO DE DEFORMACIÓN
ACERO PRETENSADO	COMPRESIÓN (Ley bilineal)	$f'_{ps}: \begin{cases} E_p \varepsilon'_{ps} & \text{para } \varepsilon'_{ps} < \varepsilon_{py} \\ f_{py} & \text{para } \varepsilon_{py} \leq \varepsilon'_{ps} \leq (\varepsilon_{pe} + \varepsilon'_{cmax}) \end{cases}$	$E_p = 2 \cdot 10^5\text{ MPa}$ $\varepsilon_{py} = f_{py} / E_p$ $\varepsilon_{pe} = \frac{f_{pe}}{E_p} = \frac{P_e}{A_p E_p}$
	TRACCIÓN (Ley bilineal)	$f_{ps}: \begin{cases} E_p \varepsilon_{ps} & \text{para } \varepsilon_{ps} < \varepsilon_{py} \\ f_{py} & \text{para } \varepsilon_{py} \leq \varepsilon_{ps} < \varepsilon_{pu} \end{cases}$	

2.5 CASO DE LA TRACCIÓN AXIAL

Los elementos sometidos a **tracción axial**, debido a la limitada capacidad del hormigón a tracción, se evitan de hormigón simple por la incuestionable fragilidad de su fallo. Más bien se conciben o de barras de acero aisladas, o se refuerza el hormigón con acero. Este acero puede ser lo mismo pasivo que activo según sea el tensor de hormigón armado o de hormigón pretensado. A continuación se

exponen dos ejemplos que procuran ilustrar el procedimiento propuesto para definir el comportamiento de los tensores para ambos tipos de refuerzo.

2.5.1 TENSOR DE HORMIGÓN ARMADO

Ejercicio 2.1

La Figura 2.13 muestra un tensor de hormigón armado que se destina a tomar los empujes del arco que funciona como elemento estructural principal en la cubierta de una nave industrial. En la propia figura se indican las dimensiones de la sección transversal de dicho tensor, y el refuerzo longitudinal que se ha dispuesto en él, correspondiente a 4 barras No.16 con un área cada una igual a 199mm^2 (Véase la Tabla 1.10). Se decide emplear un hormigón de $f'_c = 30\text{MPa}$ y acero G40 (Ver Figura 2.14b)

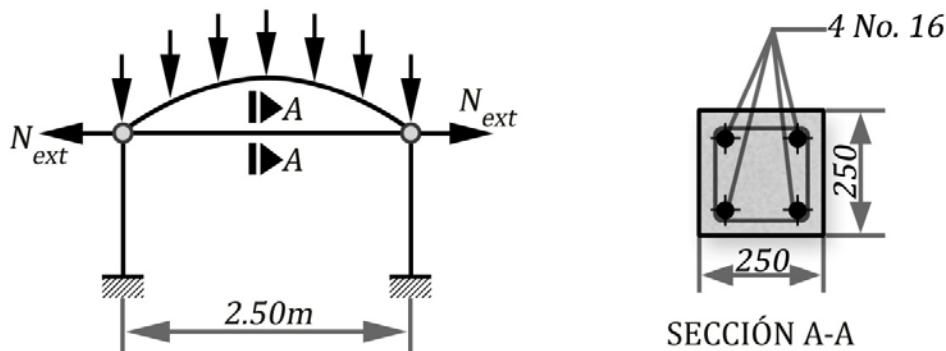


Figura 2.13 Tensor de hormigón armado para tomar los empujes del arco.

Cálculos y discusión

En este ejemplo los puntos notables son los siguientes:

PUNTO A: Cuando la carga exterior es nula.

PUNTO B: Instante inmediato anterior al inicio de la fisuración.

PUNTO C: Instante inmediato posterior a la fisuración.

PUNTO D: Momento en que se inicia la fluencia del acero.

PUNTO E: Cuando se alcanza la deformación máxima que se desee considerar.

Mientras los intervalos:

PRIMER INTERVALO: [PUNTO A - PUNTO B] \leadsto Hormigón traccionado sin fisurarse

SEGUNDO INTERVALO: [PUNTO B - PUNTO C] \leadsto Hormigón fisurado y fuera del mecanismo resistente de la sección, pero aun el acero no ha entrado en fluencia.

TERCER INTERVALO: [PUNTO D - PUNTO E] \leadsto Hormigón plenamente fisurado y el acero rebasando la deformación de fluencia, y hasta que la pieza alcanza la máxima deformación.

El segundo intervalo puede analizarse de dos maneras: despreciando la contribución del hormigón ya fisurado y aceptando que toda la carga que actúe a partir de iniciarse la fisuración es tomada sólo

por el acero, o incluyendo el efecto rigidizador que produce el hormigón entre fisuras⁷ sobre la armadura. Antes de aplicar el procedimiento general descrito en § 2.4, se fijarán para las ecuaciones de campo que se involucran en la solución del modelo analítico en este ejemplo:

1. Ecuación de Compatibilidad de las deformaciones

$\varepsilon_{si} = \varepsilon_{ci}$ (Se trata de un tensor de hormigón armado y el acero sólo se deforma cuando lo hace la carga externa, de ahí su carácter pasivo)

2. Ecuaciones Constitutivas de los materiales

A partir de lo que se define en las Tablas 2.4 y 2.5 se adoptan las leyes tensión-deformación que corresponden a la tracción, tanto para el hormigón como para el acero:

HORMIGÓN:

$$\sigma_{ci} = \begin{cases} E_c \varepsilon_{ci} = (4700\sqrt{30}) \cdot \varepsilon_{ci} \cong 25\,740 \cdot \varepsilon_{ci} & \text{para } \varepsilon_{ci} < 0.0001 \text{ (No Fisurado)} \\ 0 & \text{para } \varepsilon_{ci} \geq 0.0001 \text{ (Fisurado)} \end{cases}$$

$$\text{ACERO: } f_{si} = \begin{cases} E_s \varepsilon_{si} = (200\,000) \varepsilon_{si} & \text{para } \varepsilon_{si} < \varepsilon_y \\ f_y = 300\text{MPa} = 300\text{ N/mm}^2 \text{ (G40)} & \text{para } \varepsilon_y \leq \varepsilon_{si} \leq \varepsilon_{su} \end{cases}$$

$$\text{Siendo: } \varepsilon_y = \frac{f_y}{E_s} = \frac{300\text{MPa}}{200\,000\text{MPa}} = 0.0015 \quad \text{y} \quad \varepsilon_{su} = 0.01$$

Como en este elemento ni el acero ni el hormigón trabajarán a compresión, se obvian las ecuaciones constitutivas para este tipo de esfuerzo.

3. Ecuación de Equilibrio en la sección

La Figura 2.14 ilustra el estado deformado que produce la carga externa para la iteración genérica i , y las acciones reactivas que tienen lugar, tanto en el hormigón como en el acero. Resultarán entonces las siguientes ecuaciones de equilibrio:

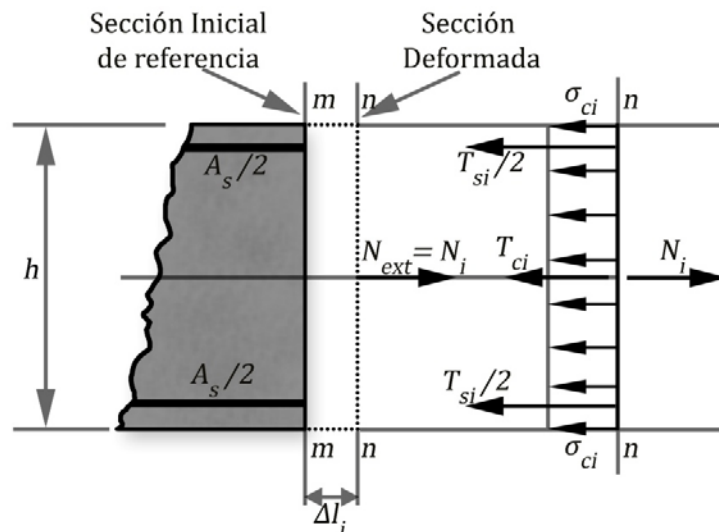


Figura 2.14 Cuerpo libre de la sección deformada $n-n$ para el estado de carga i -ésimo.

⁷ Este efecto posee mayor influencia durante el análisis de la etapa de servicio del elemento, no tanto para situaciones próximas al agotamiento. Se reconoce en la literatura con el nombre de "tension-stiffening" y una de las vías para considerarlo es modificar la ley constitutiva de la armadura, procedimiento que puede ser consultado en otros trabajos del autor.

$$\text{ANTES DE LA FISURACIÓN: } \sum F_{horiz.} = 0 \Rightarrow N_i = T_{ci} + T_{si} = \sigma_{ci}A_c + f_{si}A_s$$

$$N_i = (E_c \varepsilon_{ci})A_c + (E_s \varepsilon_{ci})A_s = (E_c A_c + E_s A_s) \varepsilon_{ci}$$

$$\text{DESPUÉS DE LA FISURACIÓN}^8: \sum F_{horiz.} = 0 \Rightarrow N_i = T_{si} = f_{si}A_s$$

Para este ejemplo se tiene:

$$A_c = bh = (250\text{mm})^2 = 625 \cdot 10^2 \text{mm}^2$$

$$A_s = 4a_b = 4(199\text{mm}^2) = 796\text{mm}^2$$

A) Análisis del Punto A.

A este punto, caracterizado por una carga exterior nula, le corresponde una deformación unitaria también nula, es decir: $\varepsilon_{c1} = 0$

a.1) Ecuación de compatibilidad de las deformaciones: $\varepsilon_{s1} = \varepsilon_{c1} = 0$

a.2) Ecuaciones constitutivas de los materiales

$$\text{HORMIGÓN: Para } \varepsilon_{c1} = 0 \Rightarrow \sigma_{c1} = 25\,740(\varepsilon_{c1}) = 0$$

$$\text{ACERO: Para } \varepsilon_{s1} < \varepsilon_y \text{ (Acero sin fluir)} \Rightarrow f_{s1} = E_s \varepsilon_{s1} = 0$$

a.3) Ecuación de equilibrio

$$\sum F_{horiz.} = 0 \Rightarrow N_1 = T_{c1} + T_{s1} \Rightarrow N_1 = \sigma_{c1}A_c + f_{s1}A_s$$

Combinando las ecuaciones de campo se demuestra que:

$$N_1 = 0$$

$$\Delta l_1 = \varepsilon_{c1} \cdot l_o = 0.00\text{mm}$$

$$\text{PUNTO A} \sim (\Delta l_1; N_1) \equiv (0.00\text{mm}, 0.00\text{kN})$$

B) Análisis del Punto B.

Se trata ahora de analizar lo que acontece en el instante anterior a la fisuración del hormigón, es decir, cuando aun este material forma parte del mecanismo resistente de la sección. Como la fisuración es inminente se evaluará para la deformación máxima que puede alcanzar el hormigón antes de fisurarse: $\varepsilon_{c2} = \varepsilon_{cmax} \lesssim 10^{-4}$

b.1) Ecuación de compatibilidad de las deformaciones: $\varepsilon_{s2} = \varepsilon_{c2} = 10^{-4}$

b.2) Ecuaciones constitutivas de los materiales

$$\text{HORMIGÓN: Para } \varepsilon_{c2} \lesssim 0.0001 \text{ (Hormigón No Fisurado)}$$

$$\Rightarrow \sigma_{c2} = 25\,740(10^{-4}) \cong 2.57 \text{ N/mm}^2$$

$$\text{ACERO: Para } \varepsilon_{s2} < \varepsilon_y \text{ (Acero sin fluir)}$$

$$\Rightarrow f_{s2} = E_s \varepsilon_{s2} = (2 \cdot 10^5 \text{ N/mm}^2)(10^{-4}) = 20 \text{ N/mm}^2$$

b.3) Ecuación de equilibrio

$$\sum F_{horiz.} = 0 \Rightarrow N_2 = P_{cr} = T_{c2} + T_{s2} \Rightarrow N_2 = \sigma_{c2}A_c + f_{s2}A_s$$

Al ordenar y evaluar las ecuaciones de campo se llega a demostrar que:

$$N_2 = P_{cr} = (2.57 \text{ N/mm}^2)(625 \cdot 10^2 \text{mm}^2) + (20 \text{ N/mm}^2)(796 \text{mm}^2)$$

$$= 176\,545 \text{ N} \cong 177 \text{ kN}$$

$$\Delta l_2 = \varepsilon_{c2} \cdot l_o = (10^{-4})(2500\text{mm}) = 0.25\text{mm}$$

$$\text{PUNTO B} \sim (\Delta l_2; N_2) \equiv (0.25\text{mm}, 177\text{kN})$$

⁸ La ecuación que se indica corresponde al caso en que se desprecia la contribución del hormigón entre fisuras una vez que se produce la fisuración, lo que sucede en este ejemplo a partir de la deformación unitaria $\varepsilon_{cmax} = 0.0001$ (véase la Figura 2.14 A)

C) Análisis del Punto C.

Un instante posterior a la fisuración este material se desconecta del mecanismo resistente de la sección aunque las ecuaciones constitutivas siguen siendo las mismas. Como lo que se pretende es analizar ese instante se debe considerar nuevamente $\varepsilon_{c3} = 10^{-4}$

c.1) Ecuación de compatibilidad de las deformaciones: $\varepsilon_{s3} = \varepsilon_{c3} \approx 10^{-4}$

c.2) Ecuaciones constitutivas de los materiales

HORMIGÓN: Para $\varepsilon_{c3} \geq 0.0001$ (*Hormigón Fisurado*)

$$\Rightarrow \sigma_{c3} = 0$$

ACERO: Para $\varepsilon_{s3} < \varepsilon_y$ (*Acero sin fluir*)

$$\Rightarrow f_{s3} = E_s \varepsilon_{s3} = (2 \cdot 10^5 \text{ N/mm}^2)(10^{-4}) = 20 \text{ N/mm}^2$$

c.3) Ecuación de equilibrio

$$\sum F_{\text{horiz.}} = 0 \Rightarrow N_3 = T_{s3} \Rightarrow N_3 = f_{s3} A_s$$

Combinando también las ecuaciones de campo se demuestra que:

$$N_3 = (20 \text{ N/mm}^2)(796 \text{ mm}^2) = 15\,920 \text{ N} \approx \mathbf{16 \text{ kN}}$$

$$\Delta l_3 = \varepsilon_{c3} \cdot l_o = (10^{-4})(2500 \text{ mm}) = \mathbf{0.25 \text{ mm}}$$

$$\text{PUNTO C} \sim (\Delta l_3 ; N_3) \equiv (\mathbf{0.25 \text{ mm} , 16 \text{ kN}})$$

D) Análisis del Punto D.

Ya fisurado plenamente el hormigón y deseando analizar el instante en el que la armadura de acero comienza a fluir, se tendrá $\varepsilon_s = \varepsilon_y = 0.0015$

d.1) Ecuación de compatibilidad de las deformaciones: $\varepsilon_{s4} = \varepsilon_{c4} = 0.0015$

d.2) Ecuaciones constitutivas de los materiales

HORMIGÓN: Para $\varepsilon_{c4} > 0.0001$ (*Hormigón Fisurado*) $\Rightarrow \sigma_{c4} = 0$

ACERO: Para $\varepsilon_{s4} = \varepsilon_y$ (*Acero comenzando a fluir*) $\Rightarrow f_{s4} = f_y = 300 \text{ N/mm}^2$

d.3) Ecuación de equilibrio

$$\sum F_{\text{horiz.}} = 0 \Rightarrow N_4 = T_{s4} \Rightarrow N_4 = f_{s4} A_s$$

Y a partir de conjugar las ecuaciones de campo se demuestra que:

$$N_4 = (300 \text{ N/mm}^2)(796 \text{ mm}^2) = 238\,800 \text{ N} \approx \mathbf{239 \text{ kN}}$$

$$\Delta l_4 = \varepsilon_{c4} \cdot l_o = (0.0015)(2500 \text{ mm}) = \mathbf{3.75 \text{ mm}}$$

$$\text{PUNTO D} \sim (\Delta l_4 ; N_4) \equiv (\mathbf{3.75 \text{ mm} , 239 \text{ kN}})$$

E) Análisis del Punto E.

A partir de la entrada en fluencia del acero su tensión permanece constante y por tanto también la fuerza que entrega al equilibrio, modificándose sólo su deformación. Es decir, siempre que se garantice la fluencia del acero, a partir de ella, a carga constante, se experimenta un incremento progresivo de la deformación que es precisamente el rasgo fundamental de la ductilidad que se alcanza cuando el acero fluye. Procurando analizar el instante en el que se alcanza la deformación máxima, y fijándola en $\varepsilon_{c5} = \varepsilon_{su} = 0.01$, se tendrá:

e.1) Ecuación de compatibilidad de las deformaciones: $\varepsilon_{s5} = \varepsilon_{c5} = 0.01$

e.2) Ecuaciones constitutivas de los materiales

HORMIGÓN: Para $\varepsilon_{c5} >> 0.0001$ (*Hormigón Fisurado*) $\Rightarrow \sigma_{c5} = 0$

ACERO: Para $\varepsilon_{s5} > \varepsilon_y$ (*Acero fluyendo*) $\Rightarrow f_{s5} = f_y = 300 \text{ N/mm}^2$

e.3) Ecuación de equilibrio

$$\sum F_{\text{horiz.}} = 0 \Rightarrow N_5 = T_{s5} \Rightarrow N_5 = f_{s5} A_s$$

Y a partir de la conjugación de las ecuaciones de campo se llega a:

$$N_5 = (300 \text{ N/mm}^2)(796 \text{ mm}^2) = 238\,800 \text{ N} \cong \mathbf{239 \text{ kN}}$$

$$\Delta l_5 = \varepsilon_{c5} \cdot l_o = (0.01)(2500 \text{ mm}) = \mathbf{25 \text{ mm}}$$

$$\mathbf{PUNTO E \rightsquigarrow (\Delta l_5 ; N_5) \equiv (25 \text{ mm} , 239 \text{ kN})}$$

Puede observarse que en este ejemplo es suficiente analizar sólo las coordenadas de los puntos notables, sin recurrir al análisis de los intervalos. La razón es evidente: si las leyes constitutivas de los materiales son ambas lineales (hormigón y acero en tracción) en todo el rango de deformación que se analiza, bastaría con unir las coordenadas de los puntos notables mediante líneas rectas, para definir así la ley de comportamiento de la pieza.

En efecto, las leyes de variación que rigen el equilibrio de la sección dentro de cada intervalo se exponen a continuación:

PRIMER INTERVALO $[0 \leq \varepsilon_{ci} < 0.0001]$ (Zona no fisurada)

La ecuación $N_i = g_2(\varepsilon_{ci})$ que rige el equilibrio dentro de este intervalo corresponde a una línea recta de la forma ($y = m_1 x + b$), o sea, una recta que pasa por el origen al ser $b = 0$ y respondiendo a la ley:

$$N_i = [160\,875 \cdot 10^4 + 2 \cdot 10^5 A_s] \varepsilon_{ci} \quad : \quad \begin{cases} N_i \rightarrow y \\ \varepsilon_{ci} \rightarrow x \\ [160\,875 \cdot 10^4 + 2 \cdot 10^5 A_s] = m_1 \end{cases}$$

De manera que dos iteraciones son suficientes para analizar este intervalo. La primera correspondiente al punto notable **A** ($\varepsilon_{c1} = 0$), mientras la segunda a una deformación que sea un infinitesimal menor a la que se inicia la fisuración, que corresponde numéricamente al punto notable **B**.

SEGUNDO INTERVALO $[0.0001 \leq \varepsilon_{ci} < 0.0015]$ (Existe fisuración y el acero está sin fluir)

Ya dentro de este intervalo el hormigón se ha fisurado y su contribución a nivel de sección es nula. La ecuación que gobierna el equilibrio continúa respondiendo a una línea recta que también pasa por el origen, pero de pendiente menor a la recta del primer intervalo ($y = m_2 x$), indicando que la sección ha perdido rigidez debido precisamente a la fisuración del hormigón.

$$N_i = f_{si} A_s = (E_s A_s) \cdot \varepsilon_{ci} : \begin{cases} N_i \rightarrow y \\ \varepsilon_{ci} \rightarrow x \\ E_s A_s = 2 \cdot 10^5 A_s = m_2 \end{cases}$$

Dos iteraciones serían también suficientes para fijar esta recta. La primera de ellas para ($\varepsilon_{c3} = 0.0001$), proyectando definir lo que sucede a una deformación un infinitesimal mayor a dicho valor, es decir, ocurrida ya la fisuración (punto notable **C**); mientras que la segunda a una deformación un infinitesimal inferior a la que se inicia la fluencia, que numéricamente correspondería al punto notable **D**.

TERCER INTERVALO $[0.0015 \leq \varepsilon_{ci} \leq 0.01]$ (Zona de fluencia del acero)

En este intervalo, para una cuantía de acero fija, la fuerza N_i no varía, pues no varía la tensión del acero (f_y), y el hormigón ya no aporta al equilibrio, sin embargo, variará la elongación Δl_i que

experimenta el elemento con la variación de la deformación que se considere en la iteración. La ecuación que gobierna al equilibrio continúa siendo la de una línea recta, ahora de pendiente nula ($m_3 = 0$), es decir, del tipo ($y = b$), siendo b el intercepto con el eje N_i ó (y):

$$N_i = f_y A_s \quad : \quad \begin{cases} N_i \rightarrow y \\ \text{Independiente de } \varepsilon_{ci}(x) \\ m_3 = 0 \\ f_y A_s = b \end{cases}$$

La curva de comportamiento para este tensor se dibuja en la Figura 2.15.

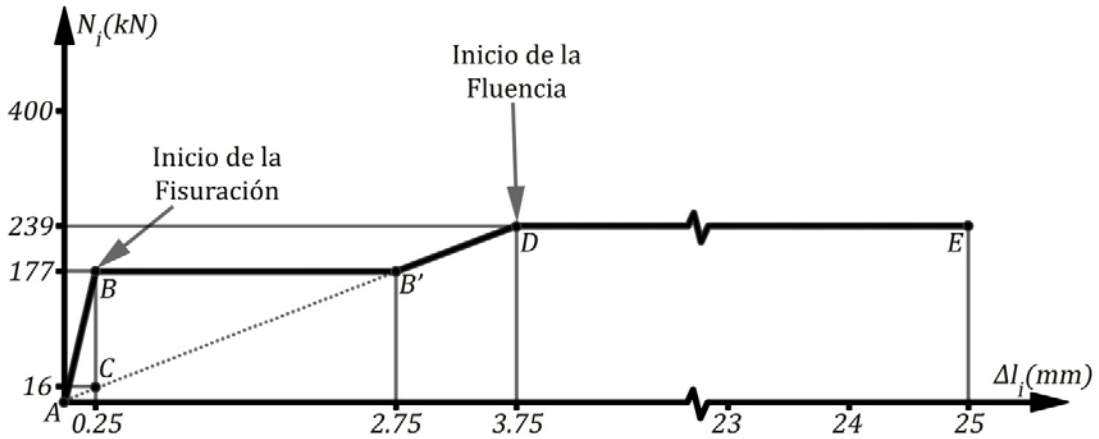


Figura 2.15 Diagramas de Comportamiento a tracción para el tensor de HA. Ejercicio 2.1

En realidad al iniciarse la fisuración la carga no cae súbitamente de los 177kN a los 16kN que corresponden a los puntos B y C, respectivamente. Lo que sucede es una rápida redistribución interna de tensiones tal que la carga que deja de tomar el hormigón inmediatamente después de fisurarse, se transmite al acero, conllevando a un repentino incremento de su deformación bajo la carga de fisuración (P_{cr}), que es la causa del desplazamiento súbito del punto B al B'. A este último corresponde un desplazamiento que se evalúa de la manera siguiente:

Instante de la Fisuración: $P_{cr} = 177kN$

Instante posterior a la Fisuración:

$$P_{cr} = f_s A_s = E_s \varepsilon_s A_s \Rightarrow \varepsilon_s = \frac{P_{cr}}{E_s A_s} = \frac{177 \cdot 10^3}{(2 \cdot 10^5 N/mm^2)(796mm^2)} = 0.0011$$

Atendiendo a la compatibilidad de las deformaciones en ese instante:

$$\varepsilon_{cr} = \varepsilon_s = \frac{\Delta l_{cr}}{l_o} \Rightarrow \Delta l_{cr} = (0.0011)(2500mm) = 2.75mm$$

De manera que las coordenadas del punto B' son:

$$\text{PUNTO B'} \sim (\Delta l_{cr}; P_{cr}) \equiv (2.75mm, 177kN)$$

Si se aplicara el procedimiento explicado a dos nuevos tensores en los que sólo se modifica la cuantía de acero y se mantienen como invariantes las restantes asignaciones que se definieron para el caso resuelto, los resultados que se obtendrían se resumen en la Tabla 2.4, mientras que las curvas de comportamiento que a ellos corresponden se ilustran en la Figura 2.16. Las nuevas cuantías de refuerzo fueron las siguientes:

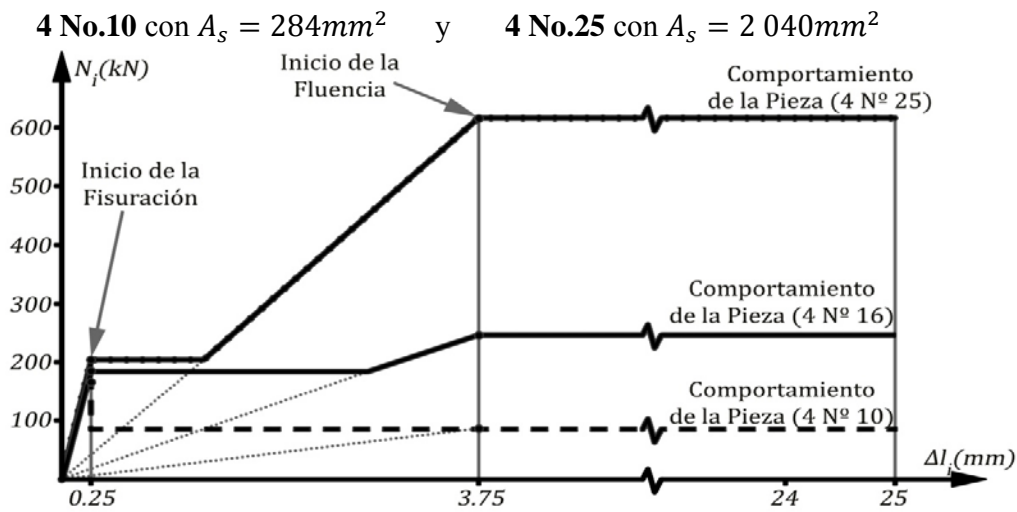


Figura. 2.16 Diagramas de Comportamiento a tracción para los tensores de hormigón armado.

TABLA 2.4 Ordenadas de los puntos singulares en las curvas de comportamiento de tres tensores de hormigón armado ignorando la contribución del hormigón a tracción y el efecto “tension – stiffening”.

		Tensor A	Tensor B	Tensor C	
		4 No.10 $A_s = 284mm^2$ $\rho = 0.0045$	4 No.16 $A_s = 796mm^2$ $\rho = 0.0127$	4 No.25 $A_s = 2\,040mm^2$ $\rho = 0.0326$	
Punto Singular	ε_{ci}	$(\Delta l_i, N_i)$ (mm, kN)			Observación
A	0.0000	(0 , 0)	(0 , 0)	(0 , 0)	Carga exterior nula
B	0.0001	(0.25 , 167)	(0.25 , 177)	(0.25 , 202)	Instante inmediato anterior al inicio de la fisuración
C	0.0001	(0.25 , 5.7)	(0.25 , 16)	(0.25 , 40.8)	Instante inmediato posterior al inicio de la fisuración
D	0.0015	(3.75 , 85.2)	(3.75 , 239)	(3.75 , 612)	Instante en que se inicia la fluencia del acero
E	0.0100	(25 , 85.2)	(25 , 239)	(25 , 612)	Instante en que se alcanza la máxima deformación en el acero

Representando ρ la cuantía geométrica expresada por la razón $\rho = A_s/A_c$, es decir, la relación del área total de acero en tracción y el área de hormigón de la sección.

Un análisis de los resultados permite arribar a las siguientes conclusiones:

- 1) La carga que provoca la fisuración (P_{cr}) es prácticamente independiente de la cantidad de refuerzo presente en la sección. Obsérvese que haber incrementado siete veces la cantidad de acero, sólo incrementó en 1.2 veces la carga que provoca la fisuración del tensor ($A_s = 284mm^2 \rightarrow P_{cr} = 167kN$; $A_s = 2040mm^2 \rightarrow P_{cr} = 202kN$). De ahí que para determinar la carga que origina la

fisuración en los tensores de hormigón armado pueda aceptarse, en forma aproximada, que el refuerzo es nulo dando lugar a una ecuación simplificada de la forma ($P_{cr} = f_{ct}A_c$), que en este caso tomaría el valor:

$$P_{cr} = 0.33\sqrt{30} \cdot (62\,500\text{mm}^2) = 113\,000\text{N} \approx \mathbf{113\text{kN}},$$

Lo cual constituye una aproximación aceptable.

- 2) El elemento antes de la fisuración posee una rigidez mayor. Esto significa que a iguales incrementos de carga en la etapa anterior a la fisuración, se registrará menor deformación. Obsérvese cómo es mayor la pendiente del diagrama de comportamiento antes de la fisuración, que después de ella, en cualquiera de los tres casos estudiados.
- 3) Una vez iniciada la fisuración tiene lugar una redistribución de tensiones a nivel de sección. El hormigón sale del mecanismo resistente y de inmediato transmite su carga al acero, si este es suficiente. En los elementos B y C, en los que esto sucede, cuando se produce la fisuración la fuerza que deja de tomar el hormigón a tracción es resistida inmediatamente por el refuerzo, mientras que en el elemento A la carga que toma el hormigón en el instante mismo de la fisuración no puede ser tomada por el refuerzo, ocurriendo un fallo súbito o brusco del elemento. Se concluye que se requiere un refuerzo mínimo que sea capaz de tomar la fuerza que libera el hormigón al fisurarse. Tal refuerzo mínimo es especificado por las normas y reglamentos para el cálculo del hormigón, y se calcula como $A_s = \frac{N_{max}}{f_y}$.

La problemática del tensor A se refleja en la figura 2.17, donde se incluyen, además, las tres leyes siguientes: *contribución del hormigón al equilibrio antes de la fisuración*, *contribución exclusiva del acero* y finalmente, *el comportamiento de la pieza que incluye la suma de ambas contribuciones*. Obsérvese que tiene lugar un fallo frágil para cargas superiores a la que fisura la sección de hormigón..

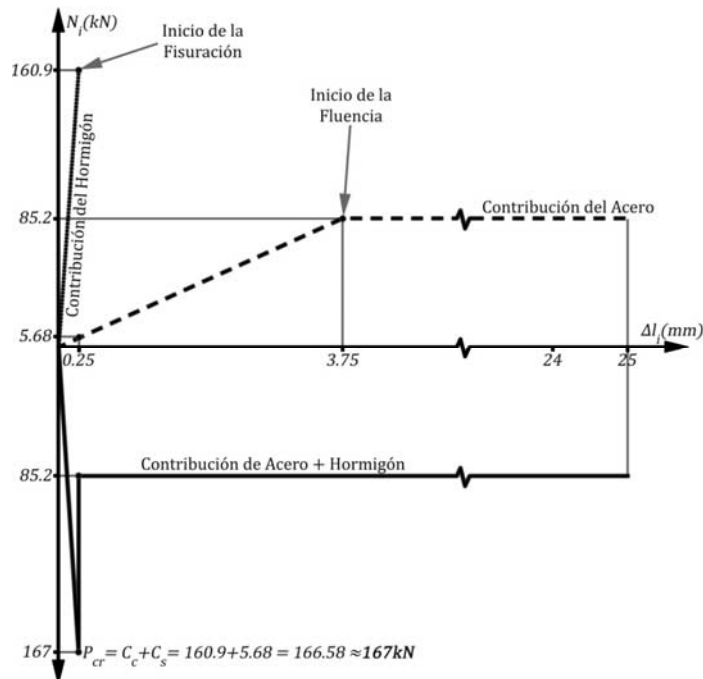


Figura: 2.17 Contribución del hormigón y el acero en el tensor A reforzado con 4 barras No.10

En el estudio que acaba de realizarse para los elementos sometidos a tracción se ha supuesto que al producirse la fisuración todo el hormigón “desaparece”, sin embargo, en realidad el hormigón entre fisuras continuará trabajando de conjunto con el acero rigidizándolo y contribuyendo a que las deformaciones no sean tan grandes como las que supuestamente han sido calculadas anteriormente. Este efecto se conoce como "rigidez por tracción" o efecto “tension – stiffening”.

En la Figura 2.18 se muestra la curva de comportamiento teórica que se obtiene cuando se ha despreciado la favorable contribución del hormigón no fisurado, y la curva que pudiera registrarse durante un ensayo en el que este efecto está inexorablemente presente, denominada “comportamiento real”.

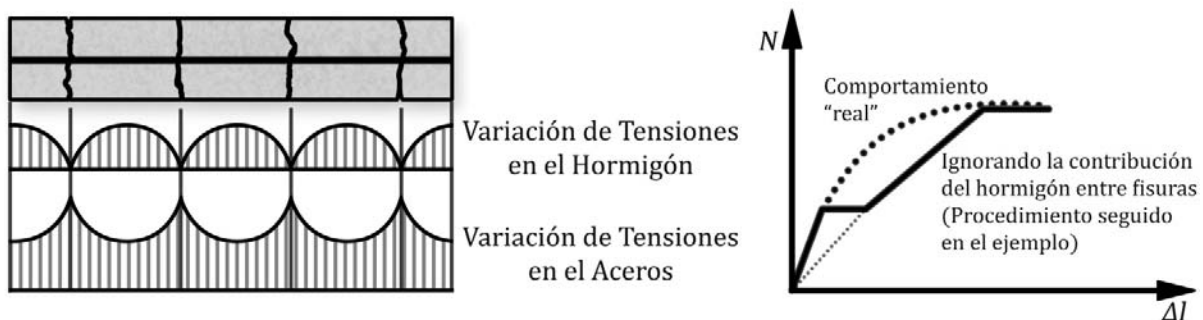


Figura: 2.18 Variación del comportamiento bajo el efecto rigidizador del hormigón entre fisuras.

Obsérvese cómo la curva referida al comportamiento “real” posee mayor pendiente a partir de la fisuración pero aun en los rangos de la carga de servicio, mientras que próximo a la carga última ambas curvas tienden a coincidir. La conclusión es que el efecto rigidizador del hormigón no fisurado es marcado para la etapa de servicio, reconociendo una mayor rigidez de la pieza y en consecuencia menores deformaciones. Ya para las situaciones próximas a los límites de resistencia este efecto es prácticamente despreciable y puede ser ignorado en los cálculos.

2.5.2 TENSOR DE HORMIGÓN PRETENSADO

Ejercicio 2.2

Se trata ahora de construir la curva de comportamiento del mismo tensor encargado de tomar los empujes del arco que se analizara anteriormente, pero sustituyendo el acero ordinario por otro de alto límite elástico cuya ley constitutiva se ilustra en la Tabla 2.3 y la Figura 2.14c. Se trata ahora de un acero con un área total $A_p = 10\text{cm}^2$ y un límite convencional de fluencia igual a $f_{py} = 1\,600\text{MPa}$. Se propone realizar el análisis para las dos situaciones que se definen a continuación, ambas aceptando que la carga exterior es de corta duración:

- El acero es estirado previo a la actuación de la carga exterior de manera que una vez se hayan originado todas las pérdidas, la tensión permanente que introdujo dicho tesado es $f_{pe} = 900\text{MPa}$.
- El acero se dispone sin tensión previa alguna (pasivo) ($\varepsilon_{pe} = 0$).

Evidentemente que el segundo caso es similar al que se resolviera anteriormente para el hormigón armado, sólo que se ha dispuesto ahora un acero con distinta área y de mayor resistencia, mientras que el primero es ya el caso del tensor pretensado. Los estados de carga que se asocian a esta última situación son dos: pretensado en vacío y pretensado en carga. El primero se refiere a la actuación

exclusiva de la carga de pretensado sobre la pieza, mientras el segundo a la acción combinada del pretensado y la carga exterior. En cuanto a la carga de pretensado y producto de las pérdidas de tensión que experimenta el acero previamente estirado, es necesario distinguir entre la fuerza de pretensado transferida (P_i) y la fuerza de pretensado efectiva (P_e), y como lo que se desea es estudiar el comportamiento bajo pretensado permanente, estos dos estados de carga pueden resumirse de la manera siguiente:

$$\begin{aligned} \text{PRETENSADO EN VACÍO:} & \left\{ \begin{array}{l} \text{Pretensado} \left\{ \begin{array}{l} \text{Instante de la transferencia: } P_i \Rightarrow \varepsilon_{pi} \\ \text{Luego de las pérdidas: } P_e \Rightarrow \varepsilon_{pe} \end{array} \right. \\ \text{Carga exterior} \rightarrow N_{ext} = 0 \end{array} \right. \\ \text{PRETENSADO EN CARGA:} & \left\{ \begin{array}{l} \text{Pretensado} \rightarrow P_e \text{ (Efectivo)} \\ \text{Carga exterior} \rightarrow N_{ext} \neq 0 \end{array} \right. \Rightarrow (\varepsilon_p = \varepsilon_{pe} + \varepsilon_{pc}) \end{aligned}$$

Aceptando que una vez desarrolladas todas las pérdidas la tensión permanente de pretensado es $P_e \approx 0.56f_{py}$, entonces el acero corresponde una deformación que ha de determinarse a partir de su ecuación constitutiva, es decir, como $f_{pe} = 0.56(1600\text{MPa}) \approx 900\text{MPa} < f_{py}$, entonces:

$$\varepsilon_{pe} = \frac{f_{pe}}{E_p} = \frac{900\text{MPa}}{2 \cdot 10^5\text{MPa}} = 0.004$$

En este apartado se resolverá el caso correspondiente a la situación (B) y se obvia el procedimiento para la situación (A) por su analogía con los casos que fueron resueltos en § 2.4.1.2, aunque se indicarán también los resultados que se obtienen una vez resuelto.

Cálculos y Discusión para la variante correspondiente al Tensor pretensado (A)

De acuerdo al procedimiento que se explicara en la Sección § 2.4.1.2, inicialmente deben ser identificados los intervalos y los puntos notables de la curva de comportamiento que se desea construir. Para ello se impone un análisis previo que permita definir con sano juicio los momentos más significativos de este estudio, asistido de la Figura 2.19 que ilustra el cuerpo libre del hormigón y el acero pretensado antes de la actuación de la carga exterior.



Figura: 2.19 Cuerpo libre del hormigón y el acero pretensado cuando no actúa carga exterior

Mientras esto sucede, el autoequilibrio de la sección se alcanza con el acero a tracción (producto del estiramiento inicial a que fue sometido), y el hormigón a compresión, luego que la pieza experimenta

el acortamiento al transferirse el pretensado. Este acortamiento irá revirtiéndose cuando la carga externa comience a actuar.

Ya actuando la carga exterior, en este caso una tracción centrada, el acero incrementa su deformación sobre tensionándose, mientras el hormigón se descomprime, es decir, va revirtiéndose progresivamente el acortamiento que experimentó hasta pasar por un instante en que la pieza recupera su longitud inicial ($\Delta l = 0$).

A partir de ahí el elemento comienza a traccionarse hasta llegar a producirse la fisuración del hormigón para dejar de contribuir al mecanismo resistente en la sección. Incrementos ulteriores de la carga pueden provocar la entrada en fluencia del acero.

En resumen, el mayor acortamiento que experimenta el hormigón es cuando la carga exterior es nula, luego existirá una carga exterior que devuelve la longitud inicial a la pieza, y a partir de ahí los incrementos de la carga originarán primeramente la fisuración del hormigón, y más tarde la fluencia del acero. Quedan así identificados los siguientes puntos notables e intervalos de la curva de comportamiento:

PUNTO A: Cuando la carga exterior es nula y el pretensado efectivo⁹ ($\Delta l < 0$).

PUNTO B: Instante en que la carga exterior revierte el acortamiento que produjo el pretensado trasferido ($\Delta l = 0$).

PUNTO C: Instante inmediato anterior al inicio de la fisuración ($\Delta l > 0$).

PUNTO D: Instante inmediato posterior a la fisuración ($\Delta l > 0$).

PUNTO E: Instante en que se inicia la fluencia del acero ($\Delta l > 0$).

PUNTO F: Cuando se alcanza la deformación máxima en la armadura de acero ($\Delta l > 0$).

Al igual que sucediera en el ejemplo que se resolviera para el tensor de hormigón armado, puede esperarse que sea también suficiente analizar sólo las coordenadas de los puntos notables, sin recurrir al análisis de los intervalos. La razón es la misma: las leyes constitutivas de los materiales, a partir del momento en que el hormigón entra en tracción, son ambas lineales en el rango de deformación que se analiza, por lo que bastaría con unir las coordenadas de los puntos notables mediante líneas rectas.

Sin embargo, en el intervalo **[A-B]** esta afirmación no es exactamente cierta pues el hormigón se encuentra trabajando realmente a compresión y su ley constitutiva ya deja de ser lineal para pasar a ser del tipo $\sigma'_{ci} = 1000f'_c[\varepsilon'_{ci} - 250(\varepsilon'_{ci})^2]$. Por tanto, los puntos notables A y B deberían ser unidos en realidad por medio de una ley no lineal. Si se deseara definir con mayor precisión cómo es el comportamiento preciso entre estos dos puntos, bastaría con analizar dentro de este intervalo dos o tres iteraciones más, a las que correspondan deformaciones entre $(-0.000398 \leq \varepsilon'_{ci} \leq 0)$. El límite $\varepsilon'_{ci} = -0.000398$ se demuestra durante el análisis del Punto A. En resumen, aparecen también en este caso los siguientes intervalos:

PRIMER INTERVALO: [PUNTO A - PUNTO B] \leadsto Hormigón comprimido

SEGUNDO INTERVALO: [PUNTO B - PUNTO C] \leadsto Hormigón traccionado sin fisurarse

⁹ En realidad durante el diseño o revisión de este elemento se debe analizar mejor el instante de la transferencia, es decir, considerando que la fuerza de pretensado es P_t en lugar de P_e , que sería lo más desfavorable para el hormigón. Sin embargo, a los efectos del comportamiento que se estudia es atinado referirse al pretensado efectivo.

TERCER INTERVALO: [PUNTO D - PUNTO E] \sim Hormigón fisurado y fuera del mecanismo resistente de la sección, pero aun el acero no ha entrado en fluencia.

CUARTO INTERVALO: [PUNTO E: PUNTO F] \sim Hormigón plenamente fisurado y el acero rebasando su deformación de fluencia, y hasta que alcanza su máxima deformación

A) Análisis del Punto A.

Corresponde a este punto una **carga exterior nula** a pesar de la deformación unitaria de acortamiento ε'_{c1} que experimenta el hormigón bajo el efecto del pretensado efectivo. Para asegurar bajo estas condiciones el autoequilibrio de la sección deben desarrollarse sendas fuerzas interiores de igual magnitud y dirección, pero de sentido contrario: en el hormigón comprimido (C_c) y en el acero traccionado (T_p). La intención ha de ser encontrar el valor de la deformación (ε'_{c1}) que asegure esta condición.

a.1) Ecuación de compatibilidad de las deformaciones: $\varepsilon_{pc(1)} = \varepsilon'_{c1}$

De manera que la deformación total en el acero vendrá dada por: $\varepsilon_{p1} = \varepsilon_{pe} + \varepsilon_{pc(1)} = \varepsilon_{pe} + \varepsilon'_{c1}$

A pesar de que en vacío la pieza se acorta y el acero disminuye su deformación, se ha sumado a ε_{pe} la deformación ε'_{c1} por tratarse de una suma algebraica en la que el autoequilibrio definirá el signo de esta deformación.

a.2) Ecuaciones constitutivas de los materiales

HORMIGÓN: (como se trata de un hormigón sometido a tensiones de compresión, se debe seleccionar la ecuación constitutiva correspondiente a este esfuerzo)¹⁰

$$\sigma'_{c1} = k_3 f'_c \left[2 \left(\frac{\varepsilon'_{c1}}{\varepsilon_o} \right) - \left(\frac{\varepsilon'_{c1}}{\varepsilon_o} \right)^2 \right] \quad \text{Siendo } k_3 = 1.0 \text{ al considerarse la carga exterior de corta duración}$$

$$\text{Para } \varepsilon_o = 0.002, \text{ entonces } \sigma'_{c1} = 1000 f'_c [\varepsilon'_{c1} - 250(\varepsilon'_{c1})^2]$$

ACERO: Como ha de esperarse que cuando se alcance el autoequilibrio de las fuerzas interiores la deformación total en el acero es inferior a la de fluencia ($\varepsilon_{p1} < \varepsilon_{py}$), entonces:

$$f_{p1} = E_p \varepsilon_{p1} = E_p (\varepsilon_{pe} + \varepsilon'_{c1})$$

a.3) Ecuación de equilibrio

$$\sum F_{horiz.} = 0 \quad \Rightarrow \quad N_1 = C_{c1} + T_{p1} = 0 \quad \Rightarrow \quad \sigma_{c1} A_c + f_{p1} A_p = 0$$

(Autoequilibrio)

Combinando las ecuaciones de campo se demuestra que:

$$1000 f'_c [\varepsilon'_{c1} - 250(\varepsilon'_{c1})^2] A_c + [E_p (\varepsilon_{pe} + \varepsilon'_{c1})] A_p = 0$$

Sustituyendo:

$f'_c = 30 \text{ MPa}$, $A_c = 625 \cdot 10^2 \text{ mm}^2$, $E_p = 2 \cdot 10^5 \text{ MPa}$, $\varepsilon_{pe} = 0.0045$ y $A_p = 10 \cdot 10^2 \text{ mm}^2$, se llega a la ecuación:

$$468\,750(\varepsilon'_{c1})^2 - 2\,075(\varepsilon'_{c1}) - 0.9 = 0$$

¹⁰ Ver Tabla 2.4 y Figura 2.14 A

Resuelta esta ecuación se obtiene:

$$\varepsilon'_{c1(a)} \cong +0.0048 \text{ (TRACCIÓN)} \quad \text{y} \quad \varepsilon'_{c1(b)} \cong -0.000398 \text{ (COMPRESIÓN)}$$

Se debe adoptar el segundo resultado que refiere una deformación de compresión por su signo negativo. La comprobación del equilibrio de fuerza se verifica de la manera siguiente:

$$\begin{aligned} C_{c1} &= 1\,000 f'_c \left[\varepsilon'_{c1(b)} - 250(\varepsilon'_{c1(b)})^2 \right] A_c \\ &= 1\,000(30)[-0.000398 - 250(-0.000398)^2](625 \cdot 10^2) \\ C_{c1} &= -820\,502\text{N} \approx \mathbf{-820.5kN} \\ T_{p1} &= [E_p(\varepsilon_{pe} + \varepsilon'_{c1(b)})]A_p = 2 \cdot 10^5(0.0045 - 0.000398)10 \cdot 10^2 = 820\,400\text{N} \\ T_{p1} &\approx \mathbf{820.4kN} \\ \therefore N_1 &= C_{c1} + T_{p1} = -820.5\text{kN} + 820.4\text{kN} \cong \mathbf{0} \end{aligned}$$

En consecuencia el acortamiento que experimenta la pieza en este instante es:

$$\Delta l_1 = \varepsilon'_{c1} \cdot l_0 = 2500\text{mm}(-0.000398) \approx \mathbf{-1.0mm}$$

Las coordenadas del primer punto de la curva de comportamiento se escriben a continuación:

$$\text{PUNTO A} \rightsquigarrow (\Delta l_1 ; N_1) \equiv \mathbf{(-1.0mm, 0kN)}$$

La tensión a compresión del hormigón puede llegar a ser alta, y lo sería más si en lugar de adoptar como fuerza de pretensado la efectiva, se adopta la inicial, lo mismo que la caída que experimenta la tensión del acero. En efecto:

$$\begin{aligned} \sigma'_{c1} &= 30\,000[-0.000398 - 250(0.000398)^2] = \mathbf{-13.1MPa} \\ f_{p1} &= 2 \cdot 10^5(0.0045 - 0.000398) = \mathbf{820MPa} < 900MPa \end{aligned}$$

Nótese que la tensión de compresión que tiene lugar en el hormigón es del orden del 44% de su resistencia f'_c , de ahí que este estado puede llegar a constituir una prueba de carga para este material.

B) Análisis del Punto B.

Como se trata del instante en que $\Delta l = \Delta l_2 = 0$, entonces:

$$\text{b.1) Ecuación de compatibilidad de las deformaciones: } \varepsilon_{pc(2)} = \varepsilon'_{c2} = \Delta l_2 / l_0 = 0$$

$$\therefore \varepsilon_{p2} = \varepsilon_{pe} + \varepsilon_{pc(2)} = \varepsilon_{pe} < \varepsilon_{py}$$

b.2) Ecuaciones constitutivas de los materiales

$$\text{HORMIGÓN: Para } \varepsilon'_{c2} = 0 \Rightarrow \sigma'_{c2} = 0$$

$$\text{ACERO: Para } \varepsilon_{p2} < \varepsilon_{py}$$

$$\Rightarrow f_{p2} = E_p \varepsilon_{p2} = E_p(\varepsilon_{pe}) = (2 \cdot 10^5 \text{MPa})(0.0045) = 900\text{MPa}$$

$$\text{b.3) Ecuación de equilibrio: } \sum F_{\text{horiz.}} = 0 \Rightarrow N_2 = T_{c2} + T_{s2} \Rightarrow N_2 = \sigma_{c2} A_c + f_{s2} A_s$$

$$\therefore N_2 = f_{s2} A_s = (900 \text{N/mm}^2)(10 \cdot 10^2 \text{mm}^2) = 900 \cdot 10^3 \text{N} = \mathbf{900kN}$$

$$\text{PUNTO B} \rightsquigarrow (\Delta l_2 ; N_2) \equiv \mathbf{(0mm, 900kN)}$$

C) Análisis del Punto C.

Ya a partir del Punto B, es decir, dentro del intervalo [B-C], el hormigón se encuentra sometido a tensiones de tracción, debiéndose adoptar para él la ley constitutiva ante este tipo de esfuerzo. Además, para el Punto C, asociado precisamente al instante en que se origina la fisuración, se tendrá: $\varepsilon_{c3} = 10^{-4}$

c.1) Ecuación de compatibilidad de las deformaciones: $\varepsilon_{pc(3)} = \varepsilon_{c3} = 10^{-4}$

$$\therefore \varepsilon_{p3} = \varepsilon_{pe} + \varepsilon_{pc(3)} = 0.0045 + 0.0001 = 0.0046 < \varepsilon_{py}$$

c.2) Ecuaciones constitutivas de los materiales

HORMIGÓN: Para $\varepsilon_{ci} \lesssim 0.0001$ (*No Fisurado*)

$$\Rightarrow \sigma_{c3} = E_c \varepsilon_{c3} = (4700\sqrt{30})(10^{-4}) \cong 2.57 \text{ N/mm}^2$$

ACERO: Para $\varepsilon_{p3} < \varepsilon_{py}$

$$\Rightarrow f_{p3} = E_p \varepsilon_{p3} = (2 \cdot 10^5 \text{ N/mm}^2)(0.0046) = 920 \text{ N/mm}^2$$

c.3) Ecuación de equilibrio: $\sum F_{horiz.} = 0 \Rightarrow N_3 = \sigma_{c3} A_c + f_{s3} A_s$

A partir de la solución del sistema formado por las ecuaciones de campo se demuestra que:

$$N_3 = (2.57 \text{ N/mm}^2)(625 \cdot 10^2 \text{ mm}^2) + (920 \text{ N/mm}^2)(10 \cdot 10^2 \text{ mm}^2) = 1\,080\,625$$

$$\cong 1\,081 \text{ kN}$$

$$\Delta l_3 = \varepsilon_{c3} \cdot l_o = (10^{-4})(2\,500 \text{ mm}) = 0.25 \text{ mm}$$

$$\text{PUNTO C} \sim (\Delta l_3 ; N_3) \equiv (0.25 \text{ mm} , 1\,081 \text{ kN})$$

D) Análisis del Punto D.

Una vez fisurado el hormigón sólo el acero estará contribuyendo al equilibrio de la sección. Analizar el instante inmediato superior a la fisuración, exige considerar la misma deformación de la iteración anterior, es decir: $\varepsilon_{c4} = 10^{-4}$

d.1) Ecuación de compatibilidad de las deformaciones: $\varepsilon_{pc(4)} = \varepsilon_{c4} \gtrsim 10^{-4}$

$$\therefore \varepsilon_{p4} = \varepsilon_{pe} + \varepsilon_{pc(4)} = 0.0045 + 0.0001 = 0.0046 < \varepsilon_{py}$$

d.2) Ecuaciones constitutivas de los materiales

HORMIGÓN: Para $\varepsilon_{c4} \gtrsim 0.0001$ (*Fisurado*) $\Rightarrow \sigma_{c4} = 0$

ACERO: Para $\varepsilon_{p4} < \varepsilon_{py}$

$$\Rightarrow f_{p4} = E_p \varepsilon_{p4} = (2 \cdot 10^5 \text{ N/mm}^2)(0.0046) = 920 \text{ N/mm}^2$$

d.3) Ecuación de equilibrio:

$$\sum F_{horiz.} = 0 \Rightarrow N_4 = \sigma_{c4} A_c + f_{s4} A_s = f_{s4} A_s$$

$$N_4 = (920 \text{ N/mm}^2)(10 \cdot 10^2 \text{ mm}^2) = 920\,000 \text{ N} \cong 920 \text{ kN}$$

$$\Delta l_4 = \varepsilon_{c4} \cdot l_o = (10^{-4})(2\,500 \text{ mm}) = 0.25 \text{ mm}$$

$$\text{PUNTO D} \sim (\Delta l_4 ; N_4) \equiv (0.25 \text{ mm} , 920 \text{ kN})$$

E) Análisis del Punto E.

En el instante en que el acero comienza a fluir se ha de cumplir que $\varepsilon_{p5} = \varepsilon_{py} = 0.008$

e.1) Ecuación de compatibilidad de las deformaciones: $\varepsilon_{pc(5)} = \varepsilon_{c5}$

$$\varepsilon_{p5} = \varepsilon_{pe} + \varepsilon_{pc(5)} = 0.0045 + \varepsilon_{c5} = 0.008$$

$$\therefore \varepsilon_{c5} = 0.0035$$

e.2) Ecuaciones constitutivas de los materiales

HORMIGÓN: Para $\varepsilon_{c5} \gg 0.0001$ (*Fisurado*) $\Rightarrow \sigma_{c5} = 0$

ACERO: Para $\varepsilon_{p5} = \varepsilon_{py} \Rightarrow f_{p5} = f_{py} = 1\,600 \text{ N/mm}^2$

e.3) Ecuación de equilibrio: $\sum F_{horiz.} = 0 \Rightarrow N_5 = \sigma_{c5} A_c + f_{s5} A_s = f_{s5} A_s$

$$N_5 = (1\,600 \text{ N/mm}^2)(10 \cdot 10^2 \text{ mm}^2) = 1\,600\,000 \text{ N} \cong 1\,600 \text{ kN}$$

$$\Delta l_5 = \varepsilon_{c5} \cdot l_o = (0.0035)(2\,500 \text{ mm}) = 8.75 \text{ mm}$$

PUNTO E $\sim (\Delta l_5 ; N_5) \equiv (8.75mm, 1\ 600kN)$

F) Análisis del Punto F.

La deformación máxima no puede referirse a la que se asocie directamente al alargamiento máximo de la pieza, sino a la que puede alcanzar el acero, de lo contrario se estaría violentando la ecuación constitutiva de este material. En efecto, si se fija como deformación máxima, por ejemplo, el valor $(\varepsilon_{pu} = \varepsilon_{pe} + 0.01)$, se tendrá:

f.1) Ecuación de compatibilidad de las deformaciones: $\varepsilon_{pc(6)} = \varepsilon_{c6}$

$$\varepsilon_{p6} = \varepsilon_{pu} = \varepsilon_{pe} + 0.01 = 0.0045 + 0.01 = 0.0145$$

$$\therefore \varepsilon_{c6} = 0.01$$

f.2) Ecuaciones constitutivas de los materiales

HORMIGÓN: Para $\varepsilon_{c6} \gg 0.0001$ (Fisurado) $\Rightarrow \sigma_{c6} = 0$

ACERO: Para $\varepsilon_{p6} > \varepsilon_{py}$ ($0.0145 > 0.008$) $\Rightarrow f_{p6} = f_{py} = 1\ 600\ N/mm^2$

f.3) Ecuación de equilibrio:

$$\sum F_{horiz.} = 0 \Rightarrow N_6 = \sigma_{c6}A_c + f_{s6}A_s = f_{s6}A_s$$

Combinando las ecuaciones de campo se demuestra que:

$$N_6 = (1\ 600\ N/mm^2)(10 \cdot 10^2 mm^2) = 1\ 600\ 000N = 1\ 600kN$$

$$\Delta l_6 = \varepsilon_{c6} \cdot l_0 = (0.01)(2\ 500mm) 25mm$$

PUNTO F $\sim (\Delta l_6 ; N_6) \equiv (25mm, 1\ 600kN)$

Cálculos y Discusión para la variante correspondiente al Tensor no pretensado (B)

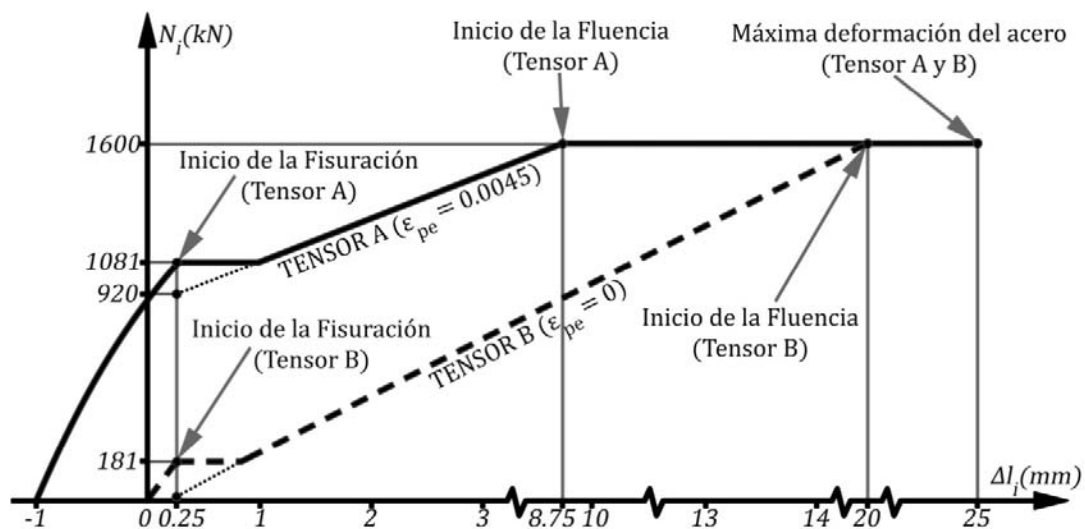
El procedimiento de solución para esta variante coincide con el que se siguió en el ejemplo de la sección § 2.4.1.1, y la Figura 2.20 y la Tabla 2.5 resumen los resultados finales de las dos variantes que se analizan en § 2.4.1.2: acero previamente estirado (A) y acero pasivo (B) ($\varepsilon_{pe} = 0$).

La interpretación de los resultados obtenidos permiten exponer las siguientes conclusiones:

- 1) La capacidad última de ambos tensores, que poseen un refuerzo de acero de igual área y calidad, no varía ($N_{max} = 1\ 600kN$). Esto significa que la capacidad resistente de la sección sólo depende del área y el grado del acero empleado, y es independiente de que el acero haya sido o no estirado previamente.
- 2) Existe un notable incremento de la carga que produce la fisuración en el tensor pretensado (Elemento A) en comparación con el de hormigón armado (Elemento B), o sea: $P_{cr(A)} > P_{cr(B)}$ y numéricamente ($1081kN \gg 181kN$). Esto hace que la respuesta del elemento tesado tenga un comportamiento elástico en un rango mucho mayor que el de su par. En otras palabras, el tensor pretensado posee mejores condiciones para soportar cargas elevadas de servicio sin que ocurra la fisuración, y esta interesante conclusión justifica que durante el diseño de los elementos pretensados en etapa de servicio se pueda recurrir a las expresiones de la mecánica clásica, deducidas para materiales homogéneos (el pretensado, que evita la fisuración, reproduce un material compuesto con mayor homogeneidad que el hormigón armado), isotrópicos y elásticos.

TABLA 2.5 Ordenadas de los puntos singulares en las curvas de comportamiento del tensor reforzado con acero de alto límite elástico pasivo y activo”.

		Tensor A ($\varepsilon_{pe} = 0.0045$) (HP) $A_p = 1\,000mm^2$	Tensor B ($\varepsilon_{pe} = 0.0000$) (HA) $A_p = 1\,000mm^2$	
Punto Singular	ε_{ci}	$(\Delta l_i, N_i)$ (mm , kN)		Observación
A	(HP) -0.000398	(-1.0 , 0)	-	Carga exterior nula
	(HA) 0.0000		(0 , 0)	
B	0.0000	(0 , 900)	(0 , 0)	Deformación de la pieza nula
C	0.0001	(0.25 , 1 081)	(0.25 , 181)	Instante inmediato anterior al inicio de la fisuración (P_{cr})
D	0.0001	(0.25 , 920)	(0.25 , 20)	Instante inmediato posterior al inicio de la fisuración
E	(HP) 0.0035	(8.75 , 1600)		Instante en que se inicia la fluencia del acero
	(HA) 0.008		(20 , 1 600)	
F	(HP) 0.0145	(36.25 , 1600)		Instante en que se alcanza la máxima deformación en el acero
	(HA) 0.01		(25 , 1 600)	

**Figura 2.20 Diagramas de Comportamiento a tracción para el tensor de hormigón pretensado y de hormigón armado equivalente.**

2.6 CASO DE LA COMPRESIÓN AXIAL

En este epígrafe se estudiará el comportamiento de secciones sometidas también a carga axial, pero ahora de compresión, hasta alcanzar la rotura. Se supondrá que las dimensiones del elemento analizado (longitud y sección) y sus condiciones de continuidad son tales que el efecto de la esbeltez es despreciable, y no llega a tener lugar la pérdida de estabilidad, es decir, se analizarán las llamadas columnas cortas o no esbeltas. Para explicar cómo definir la curva de comportamiento en estos elementos se analizará el ejemplo que se ilustra en la Figura 2.21.

Se adoptan las mismas leyes constitutivas para el hormigón y el acero que se establecieron en la Figura 2.12 y las Tablas 2.1, 2.2 y 2.3. El cálculo seguirá esencialmente el mismo proceso que se describiera en la metodología general explicada en § 2.4.

2.6.1 COLUMNA DE HORMIGÓN ARMADO

Ejercicio 2.3

Deducir la ley de comportamiento de la columna ilustrada en la Figura 2.23 reforzada con 4 barras No. 25 (25mm) que representa un área total de acero $A_s = 2\,040\text{mm}^2$. Se decide realizar el análisis para las dos siguientes situaciones:

- A) Comportamiento bajo cargas de corta duración.
- B) Comportamiento bajo cargas de larga duración.

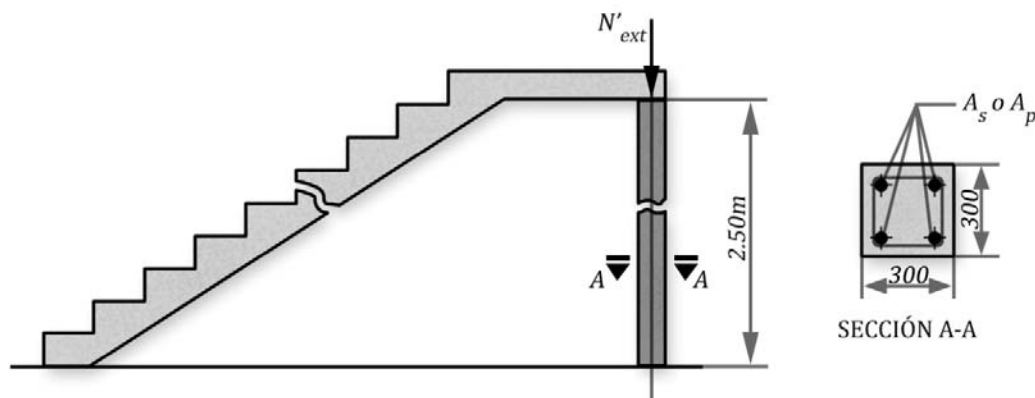


Figura 2.21 Detalle de la columna cuyo comportamiento a compresión axial. Ejercicio 2.3

Cálculos y Discusión para el caso de cargas de corta duración (Columna A)

Conforme al caso del tensor de hormigón armado resuelto en el **Ejercicio 2.1**, bajo la acción de una carga axial de compresión también la sección se deformará de manera que el corrimiento que experimentan todas sus fibras sea el mismo, resultando un estado deformacional que se traslada paralelamente así mismo de iteración en iteración. Por otro lado, como consecuencia de la adherencia que se desarrolla entre los dos materiales, al actuar la carga externa sus deformaciones deben asegurar la compatibilidad expresada mediante la igualdad ($\epsilon'_{ci} = \epsilon'_{si}$), y como el hormigón no estará sometido a tracción en momento alguno, no tendrá lugar la fisuración de tipo tensional, resultando notables en la ley de comportamiento los siguientes puntos:

PUNTO A: Cuando la carga exterior es nula ($\epsilon'_{c1} = \epsilon'_{s1} = 0$).

PUNTO B: Momento en que se inicia la fluencia del acero ($\epsilon'_{c2} = \epsilon'_{s2} = \epsilon_y = -0.0015$).

PUNTO C: Cuando se alcanza la deformación máxima que se desee analizar

$$(\varepsilon'_{c3} = \varepsilon'_{s3} = \varepsilon'_{cmax} = -0.004).$$

PRIMER INTERVALO: [PUNTO A: PUNTO B] \sim Acero sin fluir ($0 < \varepsilon'_{si} < \varepsilon_y$)

SEGUNDO INTERVALO: [PUNTO B: PUNTO C] \sim Acero en fluencia ($\varepsilon_y < \varepsilon'_{si} < \varepsilon_{su}$)

Si bien la ley constitutiva del acero es bilineal, la del hormigón es parabólica, en consecuencia la precisión para trazar la curva de comportamiento de la sección se asegura realizando varias iteraciones dentro de cada intervalo, tantas cuanto más precisión se desee alcanzar. La Tabla 2.6 resume los resultados que se obtienen luego de resolver las ecuaciones de campo para cada una de las nueve iteraciones que fueron realizadas.

$$\sigma'_{ci} = 1000f'_c[\varepsilon'_{ci} - 250(\varepsilon'_{ci})^2] = 30000[\varepsilon'_{ci} - 250(\varepsilon'_{ci})^2] \quad (\text{CORTA DURACIÓN})$$

En esta expresión se sustituye el valor absoluto de la deformación ε'_{ci} pues su signo negativo sólo indica que se trata de una compresión, y ya la ecuación de σ'_{ci} lo reconoce.

$$f'_{si} : \begin{cases} (2 \cdot 10^5)\varepsilon'_{si} & \text{para } \varepsilon'_{si} < 0.0015 \\ 300\text{MPa} & \text{para } 0.0015 \leq \varepsilon'_{si} \leq 0.004 \end{cases}$$

$$C'_{ci} = A_c \sigma'_{ci} = (300\text{mm} \cdot 300\text{mm}) \sigma'_{ci} = (9 \cdot 10^4) \sigma'_{ci} \quad \text{ó} \quad C'_{ci} = 90 \sigma'_{ci} \rightarrow \begin{cases} \sigma'_{ci} : \text{MPa} \\ C'_{ci} : \text{kN} \end{cases}$$

$$C'_{si} = A_s f'_{si} = (2\,040\text{mm}^2) f'_{si} \quad \text{ó} \quad C'_{si} = 2.04 f'_{si} \rightarrow \begin{cases} f'_{si} : \text{MPa} \\ C'_{si} : \text{kN} \end{cases}$$

$$N'_i = C'_{ci} + C'_{si}$$

$$\Delta l_i = l_o \varepsilon'_{ci} = (2500\text{mm}) \varepsilon'_{ci}$$

TABLA 2.6 Ordenadas de puntos, incluyendo los singulares, en las curvas de comportamiento de la columna de hormigón armado bajo cargas de corta duración.

PARA CARGAS DE CORTA DURACIÓN								
Iteración	Punto/Intervalo	$\varepsilon'_{ci} = \varepsilon'_{si}$	σ'_{ci} (MPa)	f'_{si} (MPa)	C'_{ci} (kN)	C'_{si} (kN)	N'_i (kN)	Δl_i (mm)
1	A	0.000	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0
2	[A ; B]	-0.0005	-13.1	-100	-1 179	-204	-1 383	-1.25
3		-0.0008	-19.2	-160	-1 728	-326	-2 054	-2.00
4		-0.0010	-22.5	-200	-2 025	-408	-2 433	-2.50
5	B	-0.0015	-28.1	-300	-2 529	-612	-3 141	-3.75
6	[B ; C]	-0.0020	-30.0	-300	-2 700	-612	-3 312	-5.00
7		-0.0025	-28.1	-300	-2 529	-612	-3 141	-6.25
8		-0.0030	-22.5	-300	-2 025	-612	-2 637	-7.50
9	C	-0.0040 ¹¹	0.0	-300	0.0	-612	-612	-10.0

¹¹ Se ha considerado esta deformación máxima durante el estudio del comportamiento y la razón es obvia: cuando el hormigón alcanza la deformación máxima que se fija para él, se agota plenamente (obsérvese en la Figura 2.14A su ley constitutiva) y ya no tiene posibilidades de redistribuir su carga al acero. Agotado el hormigón, se agota la sección.

La Figura 2.22 ilustra gráficamente la curva de comportamiento (*Curva A*) correspondiente al ejemplo desarrollado que, de acuerdo a la ley constitutiva que se adoptó para el hormigón, modela acertadamente el comportamiento que registraría un ensayo físico realizado bajo cargas de corta duración.

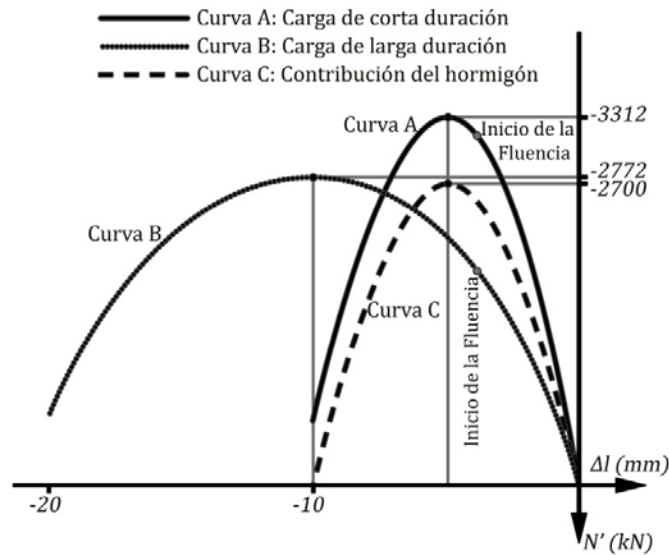


Figura: 2.22 Comportamiento de una sección de hormigón armado bajo cargas de compresión.

Cálculos y discusión para el caso de cargas de larga duración (Columna B)

Procurando analizar la influencia de la carga sostenida, se incluye en la misma Figura 2.22 el diagrama de comportamiento bajo cargas de acción prolongada (*Curva B*) obtenida básicamente por el mismo procedimiento anterior, pero considerando una variante de la ley parabólica sugerida por Collins como ecuación constitutiva del hormigón, en la que se considera $k_3 = 0.80$ y $\varepsilon_o = 0.004$, además de aceptar una deformación máxima $\varepsilon_{max} = 0.008$, es decir:

$$\sigma'_{ci} = k_3 f'_c \left[2 \left(\frac{\varepsilon'_{ci}}{\varepsilon_o} \right) - \left(\frac{\varepsilon'_{ci}}{\varepsilon_o} \right)^2 \right] = 0.8 f'_c \left[2 \left(\frac{\varepsilon'_{ci}}{0.004} \right) - \left(\frac{\varepsilon'_{ci}}{0.004} \right)^2 \right] = 1\,200 [\varepsilon'_{ci} - 125(\varepsilon'_{ci})^2]$$

Al mismo tiempo, para distinguir la marcada contribución del hormigón respecto del refuerzo cuando se trata de la compresión, se dibuja de forma aislada la ley que rige esta contribución para el caso de carga de acción breve (*Curva C*).

Un análisis de los resultados mostrados en las Tablas 2.6 y 2.7 y la cualidad que describe la Figura 2.22, permite arribar a las siguientes conclusiones:

- 1) Lo mismo para la carga de acción breve que para la sostenida, la máxima capacidad de la sección se registra para la deformación unitaria (ε_o), cuyos valores son 0.002 y 0.004, respectivamente. En consecuencia puede estimarse que **la máxima capacidad de un elemento comprimido se consigue cuando el hormigón alcanza una deformación igual a $\varepsilon'_c = \varepsilon_o = 0.002$** .
- 2) El acero alcanza su deformación de fluencia antes que la sección entregue su capacidad máxima de carga ($\varepsilon'_{si} = \varepsilon_y = 0.0015 < \varepsilon_o$). Esta conclusión justifica que los modelos de diseño para **elementos axialmente comprimidos**, o con marcado predominio de la compresión, bajo criterios

de resistencia límite, acepten que **en el estado límite de agotamiento el acero alcanza su tensión de fluencia, o sea: $f'_s = f_y$** , siempre que $f_y \lesssim 400MPa$.

- 3) Para todo el rango de deformaciones, incluyendo hasta la deformación máxima, ambos materiales forman parte del mecanismo resistente de la sección, es decir, **en elementos axialmente comprimidos la capacidad nominal de la sección (P_n) viene expresada por la suma de la contribución del hormigón y del acero: $P_n = C_c + C_s$.**

TABLA 2.7 Resultados para el caso de carga sostenida

PARES (N'_i ; Δl_i)		
$\varepsilon'_{ci} = \varepsilon'_{si}$	N'_i (kN)	Δl_i (mm)
0.0000	0.00	0.00
-0.0005	-710	-1.25
-0.0010	-1353	-2.50
-0.0015	-1928	-3.75
-0.0020	-2232	-5.00
-0.0040	-2772	-10.00
-0.0050	-2637	-12.50
-0.0060	-2232	-15.00
-0.0080	-612	-20.00

- 4) La carga mantenida provoca una disminución de la capacidad máxima debido a la menor contribución del hormigón (entre un 15% y un 20%). Por tal razón, como en los elementos que forman parte de una estructura real las cargas son esencialmente de acción prolongada, la capacidad del hormigón, expresada como función de su calidad f'_c , se disminuye en esa magnitud. Si se combina esta conclusión con las dos anteriores, y se toma en consideración lo que se expresa en la sección § 1.7.3, se puede formular prácticamente la ley que gobierna el diseño por estados límites de resistencia para los casos de compresión pura sin pérdida de estabilidad, a saber:

$$P_n = 0.85f'_cA_c + f_yA_s$$

- 5) Un incremento en la cantidad de acero o del área de hormigón, origina un incremento en la capacidad última de carga de la sección.
- 6) Las acciones de corta duración conducen a una ley de comportamiento más empinada, confirmando que frente a ellas la rigidez de la pieza es mayor.
- 7) En columnas la contribución del hormigón es significativamente alta pues toda la sección, o un elevado porcentaje de su superficie, como sucede en flexocompresión con predominio de la compresión, se haya comprimida, y el carácter pétreo de este material le confiere una elevada resistencia a los esfuerzos de compresión. Obsérvese en este ejemplo, que involucra una cuantía de refuerzo ($\rho = A_s/A_c \approx 2.3\%$), cuando se alcanza la capacidad nominal máxima bajo carga de acción breve, el hormigón entrega al equilibrio casi 4.5 más fuerza que la entrega el acero ($2700kN/612kN \approx 4.5$), lo que no sucedía en los tensores.

2.6.2 COLUMNA DE HORMIGÓN PRETENSADO

Ejercicio 2. 4

Procurando demostrar la ineptitud del pretensado cuando se aplica a elementos axialmente comprimidos se resolverá el mismo **Ejercicio 2,3** correspondiente a la columna de hormigón armado sometida a cargas de corta duración, del que se tomarán sus mismos datos de partida pero sustituyendo la armadura pasiva de acero ($A_s = 2\,040\text{mm}^2$) por un acero de alto límite elástico cuya superficie sea equivalente para asegurar la misma capacidad resistente en el instante de la fluencia, decisión que conduce a la siguiente conclusión:

$$A_s f_y = A_p f_{py} \Rightarrow A_p = A_s \frac{f_y}{f_{py}} = (2\,040\text{mm}^2) \frac{300\text{MPa}}{1\,600\text{MPa}} = 382\text{mm}^2$$

Cálculos y Discusión

En este ejercicio el análisis es sensiblemente igual al que se siguiera en el **Ejercicios 2,3**, con la diferencia de encontrarse deformado (estirado) el acero antes de que la carga exterior comience a actuar, y cuando esto suceda ($N'_{ext} > 0$), esta deformación va disminuyendo progresivamente ($\varepsilon_p = \varepsilon_{pe} - \varepsilon'_{pci}$), pero bajo la condición ($\varepsilon'_{ci} = \varepsilon'_{pci}$) debido a la compatibilidad que asegura la adherencia. Como se estudia la compresión axial, se refuerza la necesidad de disponer el acero pretensado de manera que la fuerza resultante coincida con el **c.g.c** de la sección de hormigón.

Resultan notables durante el estudio del comportamiento de la compresión en secciones pretensadas, los siguientes instantes:

PUNTO A: Cuando la carga exterior es nula y el pretensado el efectivo (ε_{pe}).

PUNTO B: Cuando se alcanza la deformación máxima en el hormigón ($\varepsilon'_{cmax} = 0.004$).

PRIMER INTERVALO: [A : B] \sim Hormigón comprimido y el acero trabajando a tensiones de tracción $f_{pe} \leq 900\text{MPa}$

Obsérvese que en este intervalo la carga externa se encargará de incrementar el acortamiento del elemento y con ello reducir progresivamente la tensión de pretensado al disminuir la deformación del acero adherido al hormigón. Por otro lado, como bajo carga de acción breve la máxima deformación de acortamiento que puede alcanzar el hormigón es 0.004, no se llegará nunca a las siguientes dos situaciones que resultarían singulares durante el estudio del comportamiento:

- Que el acero pierda toda su elongación inicial ($\varepsilon_p = 0$), o que incluso llegue a trabajar a compresión, lo que sí pudiera suceder si se considerase la situación de cargas de acción prolongada. En efecto, como $\varepsilon_{pe} = 0.0045$, la situación extrema para cargas instantáneas ($\varepsilon'_{cmax} = 0.004$) hace que el acero alcance la deformación ($\varepsilon_p = 0.0045 - 0.004 = 0.0005$), es decir, no llegaría nunca a perder toda la tensión que se introdujo durante el tesado. Sin embargo, si se tratase de cargas sostenidas, para las que el hormigón puede alcanzar una deformación máxima igual a $\varepsilon'_{cmax} = 0.008$, no sólo el acero pudiera perder toda su tensión previa, sino llegar incluso a trabajar a compresión ($\varepsilon_p = 0.0045 - 0.008 = -0.0035$).
- Que el acero alcance la fluencia. Como $\varepsilon_{pe} = 0.0045 < \varepsilon_{py}$ y la carga externa lo que origina es una reducción de esta deformación, no resulta posible la entrada en fluencia del acero.

Como se resuelve el caso de carga de acción breve se adopta como ecuación constitutiva del hormigón a compresión la siguiente ley: $\sigma'_{ci} = 30000[\varepsilon'_{ci} - 250(\varepsilon'_{ci})^2]$

A) Análisis del Punto A.

Tratándose de carga exterior nula, el análisis se reduce a encontrar aquella deformación unitaria ε'_{c1} que asegure el autoequilibrio en la sección.

a.1) Ecuación de compatibilidad de las deformaciones: $\varepsilon_{pc(1)} = \varepsilon'_{c1}$

$$\therefore \varepsilon_{p1} = \varepsilon_{pe} + \varepsilon_{pc(1)} = \varepsilon_{pe} + \varepsilon'_{c1}$$

a.2) Ecuaciones constitutivas de los materiales

HORMIGÓN: (hormigón sometido a tensiones de compresión)

$$\sigma'_{c1} = 1000f'_c[\varepsilon'_{c1} - 250(\varepsilon'_{c1})^2]$$

ACERO: $f_{p1} = E_p \varepsilon_{p1} = E_p(\varepsilon_{pe} + \varepsilon'_{c1})$

a.3) Ecuación de equilibrio

$$\sum F_{horiz.} = 0 \Rightarrow N'_1 = C_{c1} + T_{p1} = 0 \Rightarrow \sigma_{c1}A_c + f_{p1}A_p = 0$$

(Autoequilibrio)

Combinando las ecuaciones de campo se demuestra que:

$$1000f'_c[\varepsilon'_{c1} - 250(\varepsilon'_{c1})^2]A_c + [E_p(\varepsilon_{pe} + \varepsilon'_{c1})]A_p = 0$$

Y sustituyendo:

$f'_c = 30\text{MPa}$, $A_c = 900 \cdot 10^2\text{mm}^2$, $E_p = 2 \cdot 10^5\text{MPa}$, $\varepsilon_{pe} = 0.0045$ y $A_p = 382\text{mm}^2$ se llega a la ecuación:

$$6\,750\,000(\varepsilon'_{c1})^2 - 27\,764(\varepsilon'_{c1}) - 3.438 = 0$$

Cuya solución es:

$$\varepsilon'_{c1(a)} \cong +0.00423 \text{ (TRACCIÓN)} \quad \text{y} \quad \varepsilon'_{c1(b)} \cong -0.0001203 \text{ (COMPRESIÓN)}$$

Este último resultado, que representa una deformación de compresión, es la que debe adoptarse. La comprobación del equilibrio de fuerza se verifica de la manera siguiente:

$$\begin{aligned} C_{c1} &= 1\,000f'_c[\varepsilon'_{c1(b)} - 250(\varepsilon'_{c1(b)})^2]A_c \\ &= 1\,000(30)[-0.0001203 - 250(-0.0001203)^2](900 \cdot 10^2) \end{aligned}$$

$$C_{c1} = -334\,579\text{N} \approx -334.6\text{kN}$$

$$T_{p1} = [E_p(\varepsilon_{pe} + \varepsilon'_{c1(b)})]A_p = 2 \cdot 10^5(0.0045 - 0.0001203)(382) = 334\,609\text{N}$$

$$T_{p1} \approx 334.6\text{kN}$$

$$\therefore N'_1 = C_{c1} + T_{p1} = -334.6\text{kN} + 334.6\text{kN} = 0$$

A la deformación calculada corresponde un acortamiento igual a:

$$\Delta l_1 = \varepsilon'_{c(b)} \cdot l_o = 2500\text{mm}(-0.0001203) \cong -0.3\text{mm}$$

De manera que las coordenadas del primer punto de la curva de comportamiento son:

$$\text{PUNTO A} \sim (\Delta l_1; N'_1) \equiv (-0.3\text{mm}, 0\text{kN})$$

Repárese en la ligera caída que experimenta la tensión de la armadura y a la vez la baja tensión a que trabaja el hormigón en este instante:

$$f_{p1} = 2 \cdot 10^5(0.0045 - 0.0001203) = 876\text{MPa} < 900\text{MPa}$$

$$\sigma'_{c1} = 30000[-0.0001203 - 250(-0.0001203)^2] \cong -3.71\text{MPa} \ll 30\text{MPa}$$

Comparados estos dos últimos resultados con los que se obtuvieron para el tensor pretensado analizado en el Ejercicio 2,2, se observa menor caída de tensión en el acero y de esfuerzo en el hormigón. La justificación está en la menor cuantía de acero que se emplea en esta columna, en el orden de 4 veces menor:

$$\rho_{p(Tensor)} = \frac{A_p}{A_c} = \frac{1\,000\text{mm}^2}{625 \cdot 10^2\text{mm}^2} = 0.016 \quad ; \quad \rho_{p(Columna)} = \frac{A_p}{A_c} = \frac{382\text{mm}^2}{900 \cdot 10^2\text{mm}^2} = 0.0042$$

B) Análisis del Punto B.

Corresponde a la situación en que la carga externa acorta a la pieza hasta alcanzar una deformación en el hormigón igual a su máximo valor, es decir: $\varepsilon'_{c2} = -0.004$

b.1) Ecuación de compatibilidad de las deformaciones: $\varepsilon_{pc(2)} = -\varepsilon'_{c2} = -0.004$

$$\therefore \varepsilon_{p2} = \varepsilon_{pe} + \varepsilon_{pc(2)} = 0.0045 - 0.004 = 0.0005$$

b.2) Ecuaciones constitutivas de los materiales

HORMIGÓN: Para $\varepsilon'_{c2} = 0.004 \Rightarrow \sigma'_{c2} = 0\text{MPa}$

ACERO: Para $\varepsilon_{p2} < \varepsilon_{py}$, $f_{p2} = E_p \varepsilon_{p2} = (2 \cdot 10^5 \text{ N/mm}^2)(0.0005) = 100 \text{ N/mm}^2$

b.3) Ecuación de equilibrio:

$$\sum F_{horiz.} = 0 \Rightarrow N'_2 = C_{c2} + T_{s2} = P_2 \Rightarrow N'_2 = \sigma_{c2} A_c + f_{s2} A_s$$

Y ordenando las ecuaciones de campo se llega a obtener:

$$N'_2 = 0 + (100 \text{ N/mm}^2)(382\text{mm}^2) = 38.2 \cdot 10^3 \text{ N} = 38.2 \text{ kN}$$

$$\Delta l_2 = \varepsilon'_{c(2)} \cdot l_o = 2500\text{mm}(-0.004) = -10\text{mm}$$

$$\text{PUNTO B} \sim (\Delta l_2 ; N'_2) \equiv (-10\text{mm} , 38.2\text{kN})$$

La Tabla 2.8 recoge los resultados de aplicar el mismo procedimiento a otras deformaciones ubicadas dentro del intervalo [A : B].

TABLA 2.8 Ordenadas de puntos, incluyendo los singulares, en las curvas de comportamiento de la columna de hormigón pretensado.

	Punto	$\varepsilon'_{ci} = \varepsilon_{pci}$	$\varepsilon_{pi} = 0.0045 + \varepsilon_{pci}$	σ'_{ci} (MPa)	f_{pi} (MPa)	C_{ci} (kN)	T_{pi} (kN)	N'_i (kN)	Δl_i (mm)
1	A	$\dot{?}$ (-0.00012)	0.00438	-3.71	876	-334.6	3334.6	0.00	-0.30
2	[A ; B]	-0.0005	0.004	-13.13	800	-1181	306	-876	-1.25
3		-0.0008	0.0037	-19.20	740	-1728	283	-1445	-2.00
4		-0.0010	0.0035	-22.50	700	-2025	267	-1758	-2.50
5		-0.0015	0.003	-28.13	600	-2531	229	-2302	-3.75
6		-0.0020	0.0025	-30.00	500	-2700	191	-2509	-5.00
7		-0.0025	0.002	-28.13	400	-2531	153	-2378	-6.25
8		-0.0030	0.0015	-22.50	300	-2025	115	-1910	-7.50
9	B	-0.004	0.0005	0.00	100	0.00	38.2	38.2	-10.00

En la Figura 2.23 se han graficado los resultados obtenidos bajo carga de corta duración para la columna de hormigón pretensado, incluyendo la curva de comportamiento que se obtuviera en la

columna análoga de hormigón armado bajo las mismas condiciones de carga; a su vez la Tabla 2.9 resume los resultados obtenidos para las dos columnas. Recuérdese que ambas poseen idéntica longitud y sección transversal, además de cuantías de acero pasivo y activo que aseguran la misma carga de agotamiento.

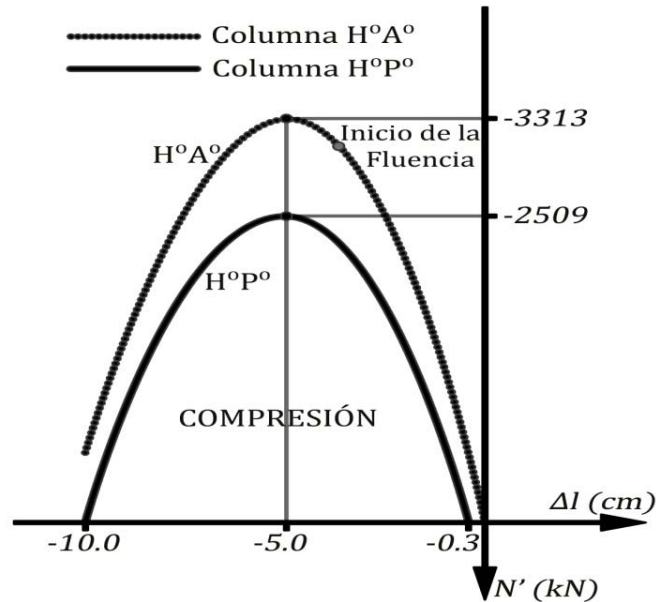


Figura 2.23 Comportamiento de las secciones de hormigón pretensado y armado bajo carga de compresión de acción breve.

TABLA 2.9 Resumen de las columnas de HA y HP bajo cargas de acción breve.

PARES (N_i' ; Δl_i)				
	HA		HP	
$\varepsilon'_{ci} = \varepsilon'_{si}$	N_i' (kN)	Δl_i (mm)	N_i' (kN)	Δl_i (mm)
0.000	0.0	0.0		
-0.00012	No se evaluó		0.00	-0.30
-0.0005	-1 383	-1.25	-876	-1.25
-0.0008	-2 054	-2.00	-1 445	-2.00
-0.0010	-2 433	-2.50	-1 758	-2.50
-0.0015	-3 141	-3.75	-2302	-3.75
	Entrada en Fluencia			
-0.0020	-3 312	-5.00	-2 509	-5.00
-0.0025	-3 141	-6.25	-2378	-6.25
-0.0030	-2 637	-7.50	-1910	-7.50
-0.0040	-612	-10.0	38.2	-10.00

Analizando los resultados y la cualidad que resalta de la Figura 2.23, se extraen las siguientes conclusiones:

- 1) **El pretensado reduce la capacidad resistente en los elementos axialmente comprimidos**, es decir, consume parte de la capacidad resistente del hormigón en compresión. Esta capacidad que llegó a ser de **3 312 kN** en la columna de hormigón armado, se redujo a **2 509 kN** en la de hormigón pretensado, es decir, alrededor de un 25%.
- 2) Al igual que en la pieza de hormigón armado, **la capacidad máxima en una columna pretensada axialmente se alcanza para una deformación del hormigón igual a 0,002**.
- 3) Se deduce que **el pretensado no es eficiente en el caso de compresión centrada**, exceptuándose los casos en que la pieza durante su ejecución se vea sometida a flexión, como por ejemplo en pilotes, postes, etc.

2.7 COMPORTAMIENTO DE SECCIONES SOMETIDAS A FLEXIÓN

Sea la viga simplemente apoyada que se ilustra en la Figura 2.24 sometida a sendas cargas concentradas que se sitúan en el tercio medio de su luz, es decir, equidistantes a los apoyos y a una distancia $l/3$ entre ellas. Si se despreciara el peso propio de la viga se obtendrían diagramas de momento flector y cortante como los que se indican en la misma Figura.

Se observa que el momento flector es la única solicitación actuante en el tramo central de la viga y se dice que en dicho tramo todas las secciones están sometidas a flexión pura, ya que es la flexión la única acción que las solicita. Mientras tanto en los dos tramos laterales, además del momento flector, actúa una fuerza cortante, por lo que se dice que en ambos las secciones están sometidas a flexión simple.

Para el estudio del comportamiento se considerará el caso de la flexión pura cuyos resultados, con la introducción de ligeras modificaciones que serán comentadas en este mismo texto, son también generalizables a la flexión simple.

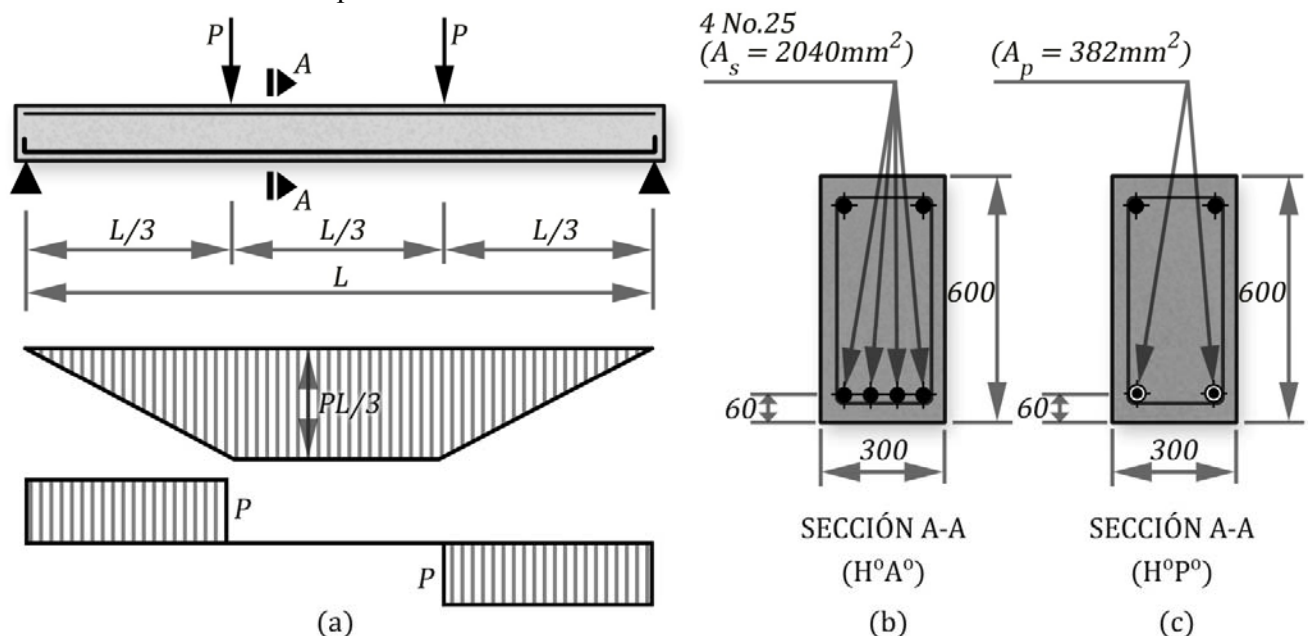


Figura 2.24 Viga simplemente apoyada. Sección de hormigón armado (b) y pretensado (c).

El estudio del comportamiento de secciones sometidas a flexión conviene expresarlo preferentemente mediante la relación (M vs φ), donde M representa la acción interior que produce en cada sección la carga externa, mientras φ la curvatura que experimenta la sección al deformarse para asegurar el equilibrio. De esta forma se puede analizar el comportamiento de la sección aislada sin tener en cuenta otras características del elemento tales como luz, tipo de carga, condiciones de apoyo, etc., que tendrían que considerarse si el comportamiento se expresara, por ejemplo, mediante la relación (P vs Δ) en la que P representa la carga actuante, y Δ la flecha que ella origina en un punto dado del elemento.

Para el estudio del comportamiento de esta tercera solicitación que se analiza, a pesar de originar estados deformacionales que dejan de ser paralelos a la sección inicial de referencia producto del giro que ella experimenta, no pierde vigencia el procedimiento general que fuera explicado en § 2.4.

2.7.1. SOLUCIÓN GENERAL DE LAS ECUACIONES DE EQUILIBRIO

Por otro lado, la flexión pura exige inexorablemente que exista en la sección una zona comprimida y otra traccionada, de manera que surja un par de fuerzas interiores encargado de equilibrar al momento flector que originó su giro, es decir, la línea neutra ha de ubicarse en el interior de la sección y, con mayor precisión, en la altura comprendida entre la fibra de máxima compresión, y el centroide de la armadura en tracción. Sin embargo, el procedimiento general aplicado ya al estudio de la Tracción y la Compresión debe ser completado pues no basta con fijar una deformación para cada iteración que desee realizarse; en efecto, si se fijara, por ejemplo, la deformación correspondiente a la fibra de máxima compresión, por ella pudieran girar infinitos estados deformacionales, pero se comprende que para una cuantía de acero en compresión definida (A'_s dato), sólo uno de ellos aseguraría el equilibrio de la sección y, ¿cuál ha de ser ese estado deformacional?

Sólo el modelo analítico que asegure el cumplimiento simultáneo del equilibrio de la sección y de la compatibilidad de las deformaciones, puede definirlo. Se comprende que al girar la sección no todas las fibras situadas en la altura comprimida poseen la misma deformación (Véase la Figura 2.11), lo que conduce a que no todas estarán sometidas a la misma tensión, y la relación entre ellas (σ'_c vs ε'_c) estará dependiendo de la ecuación constitutiva que se adopte para el hormigón a compresión. La determinación de la fuerza del hormigón en la altura comprimida, y también su posición, exigen una laboriosa evaluación si se recurre a la ley constitutiva que se propone en la Figura 2.14 o en la Tabla 2.4,

Un tercer elemento que dificulta el análisis es la forma de trabajo del acero (tracción o compresión) y la magnitud de su tensión. Lo primero depende de la posición de las armaduras que existan en la sección respecto de la línea neutra, y lo segundo de sus recubrimientos y también de la profundidad de la línea neutra que, como se dijera ya, es la principal incógnita del modelo analítico. En definitiva se trata de un proceso de prueba y error dentro de cada iteración durante el cual se suponen condiciones que luego el cálculo ratificará o exigirá su rectificación.

Para garantizar el equilibrio de las fuerzas actuantes y resistentes en la sección, se plantean las ecuaciones de equilibrio, con auxilio de la figura 2,25 que son:

El equilibrio de fuerzas,

$$\sum F_x = 0 \Rightarrow C_c + C_s - T_s = 0$$

Donde para el aporte del hormigón:

$$C_c = \int_{A_c} \sigma'_c \cdot dA'_c$$

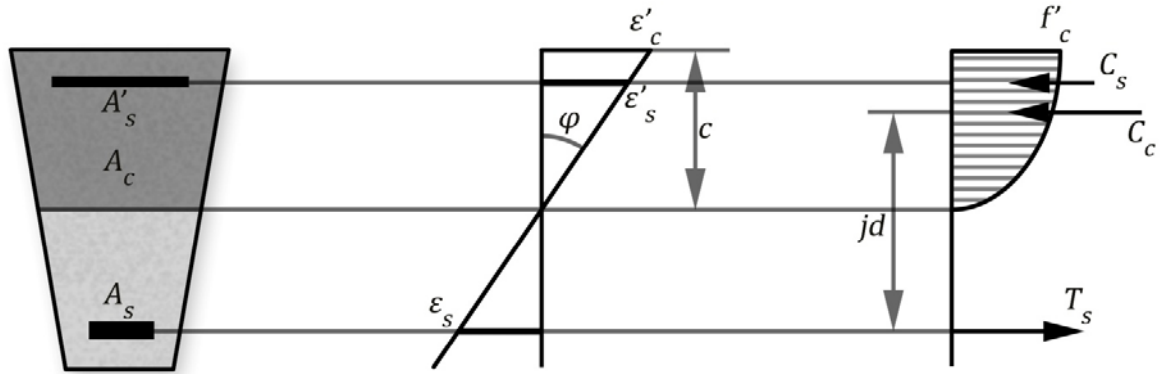


Figura 2,25: Ecuaciones de equilibrio. Sección general

Para los aceros dada lo concentrado de sus áreas, la distribución de esfuerzos en ésta carece de importancia práctica por lo que se considera.

$$T_s = \int_{A_s} f_s dA_s = A_s f_s$$

$$C_s = \int_{A'_s} f'_s dA'_s = A'_s f'_s$$

La ecuación de fuerzas quedaría finalmente,

$$\int_{A_c} \sigma'_c \cdot dA'_c + A'_s f'_s - A_s f_s = 0$$

El equilibrio de momentos, $\Sigma M = 0$, tomando en cuenta lo visto anteriormente y considerando el aporte del refuerzo como fuerzas concentradas:

$$\Sigma M = 0$$

$$M = \int_{A_c} \sigma'_c \cdot y \cdot dA'_c + A'_s f'_s y'_s + A_s f_s y_s$$

Donde:

$$\int_{A_c} \sigma'_c \cdot y \cdot dA'_c$$

momento estático del área comprimida del hormigón respecto a la línea neutra.

$$y_s, y'_s$$

brazos de las fuerzas T_s y C_s respectivamente

Aplicando estos conceptos a la **sección rectangular**, forma más común de sección transversal en elementos de Hormigón Armado, ya que el ancho es constante, el aporte del hormigón sería: (Figura 2,26)

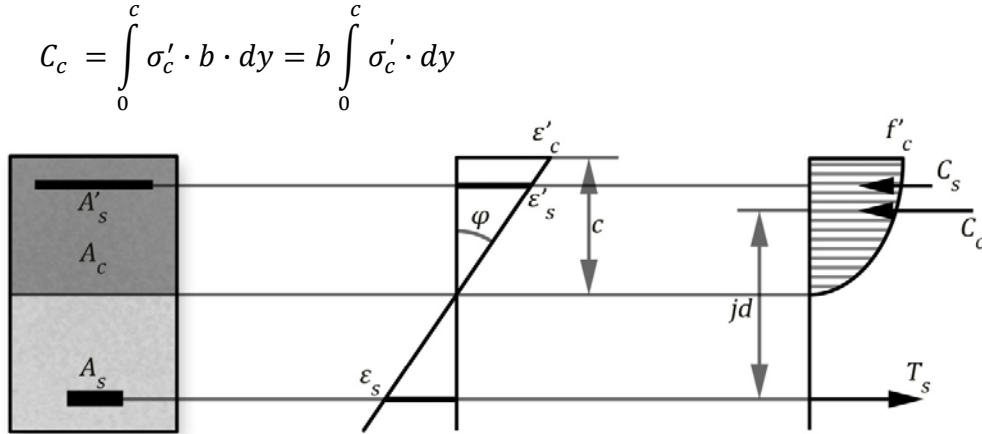


Figura 2,26: Ecuaciones de equilibrio. Sección rectangular

Tomando como modelo el diagrama **PARABÓLICO** considerando $\varepsilon_o = 0,002$ y cargas de corta duración

$$\sigma'_c = f'_c [2(500\varepsilon'_c) - (500\varepsilon'_c)^2] = 1000f'_c [\varepsilon'_c - 250(\varepsilon'_c)^2]$$

y poniendo σ'_c en función de y :

$$\varphi = \frac{\varepsilon'_c}{y} \Rightarrow \varepsilon'_c = \varphi \cdot y$$

$$\sigma'_c = 1000f'_c [\varphi \cdot y - (250\varphi^2) \cdot y^2]$$

Entonces:

$$C_c = \int_{A'_c} \sigma'_c \cdot dA'_c = b \int_0^c \sigma'_c \cdot dy = b \int_0^c 1000f'_c [\varphi \cdot y - (250\varphi^2) \cdot y^2] \cdot dy$$

De la misma forma para el momento estático:

$$C_c \cdot jd = \int_{A'_c} \sigma'_c \cdot y \cdot dA'_c = b \int_0^c \sigma'_c \cdot y \cdot dy = b \int_0^c 1000f'_c [\varphi \cdot y^2 - (250\varphi^2) \cdot y^3] \cdot dy$$

$$C_c \cdot jd = 1000f'_c b \int_0^c [\varphi \cdot y^2 - (250\varphi^2) \cdot y^3] \cdot dy$$

A continuación se ejemplifica el procedimiento para el siguiente ejercicio:

Ejercicio 2.5

Como parte del estudio del Comportamiento de una sección sometida a flexión positiva, obtenga el par ordenado (M, φ) correspondiente a una deformación a nivel de la fibra más comprimida igual a $\varepsilon'_c = 0.002$. Reconozca como ecuación constitutiva del hormigón el **diagrama parabólico de Collins para cargas de corta duración**, y desprecie la contribución del hormigón a tracción.

- a) Recorra a la ecuación constitutiva propuesta sin transformación, y determine la profundidad de la línea neutra correspondiente a la deformación fijada mediante un modelo analítico.
- b) Resuelva el problema del inciso anterior pero mediante una solución semi gráfica para obtener la posición de la línea neutra.

Suponga los siguientes datos para la sección de hormigón y su refuerzo:

SECCIÓN DE HORMIGÓN: $b = 30\text{cm}$, $h = 55\text{cm}$, $f'_c = 25\text{MPa}$

ACERO EN TRACCIÓN: $A_s = 40\text{cm}^2$, $d_s = 5\text{cm}$, $f_y = 300\text{MPa}$, $E_s = 2 \cdot 10^5\text{MPa}$

ACERO EN COMPRESIÓN: $A'_s = 20\text{cm}^2$, $d' = 5\text{cm}$, $f_y = 300\text{MPa}$, $E_s = 2 \cdot 10^5\text{MPa}$

Cálculos y Discusión

INCISO (A)

Análisis de la contribución a compresión del hormigón:

Ecuación constitutiva del hormigón según Collins: $\sigma'_c = k_3 f'_c (2\Omega - \Omega^2)$

$$\text{Carga de Corta Duración: } \begin{cases} k_3 = 1.0 \\ \epsilon_0 = 0.002 \end{cases} \Rightarrow \Omega = \epsilon'_c / \epsilon_0 = \epsilon'_c / 0.002 = 500\epsilon'_c$$

$$\therefore \sigma'_c = f'_c [2(500\epsilon'_c) - (500\epsilon'_c)^2] = 1000f'_c [\epsilon'_c - 250(\epsilon'_c)^2]$$

$$\text{Cambiando variable: } \varphi = \frac{\epsilon'_c}{y} \Rightarrow \epsilon'_c = \varphi \cdot y$$

$$\sigma'_c = 1000f'_c [\varphi \cdot y - (250\varphi^2) \cdot y^2]$$

$$C_c = \int_{A'_c} \sigma'_c \cdot dA'_c = b \int_0^c \sigma'_c \cdot dy = b \int_0^c 1000f'_c [\varphi \cdot y - (250\varphi^2) \cdot y^2] \cdot dy$$

$$C_c = 1000f'_c b \left[\varphi \int_0^c y dy - 250\varphi^2 \int_0^c y^2 \cdot dy \right] = 1000f'_c b (A - B)$$

$$A = \varphi \int_0^c y dy = \frac{\varphi}{2} \cdot (y^2|_c - y^2|_0) = \frac{\varphi}{2} c^2 = \frac{1}{2} \left(\frac{0.002}{c} \right) c^2 = (10^{-3})c$$

$$B = -250\varphi^2 \int_0^c y^2 dy = -\frac{250\varphi^2}{3} (y^3|_c - y^3|_0) = -\frac{250\varphi^2}{3} c^3$$

$$= -\frac{250}{3} \left(\frac{0.002}{c} \right)^2 c^3 = -\left(\frac{10^{-3}}{3} \right) c$$

$$C_c = 1000f'_c b \left(10^{-3}c - \frac{10^{-3}}{3}c \right) = 1000(25\text{MPa})(300\text{mm}) \left(\frac{2}{3} 10^{-3} \right) c$$

$$C_c = 5\,000c$$

Análisis de la contribución del acero a tracción:

Como se analiza una deformación cercana a la de agotamiento, se va a suponer que para el valor de " c " que se calcula, esta armadura fluye (luego debe comprobarse). Si es así, la fuerza con que entra al equilibrio es:

$$T_s = A_s f_y = (40 \cdot 10^2 \text{ mm}^2)(300 \text{ MPa}) = 1\,200\,000 \text{ N}$$

Análisis de la contribución del acero a compresión:

Se sospecha que para el valor de " c " que se está calculando esta armadura no fluye (luego debe comprobarse), en cuyo caso se debe considerar su ecuación constitutiva y la compatibilidad de las deformaciones a nivel de sección, es decir:

$$\text{Compatibilidad: } \frac{\varepsilon'_c}{c} = \frac{\varepsilon'_s}{c-d'} \Rightarrow \varepsilon'_s = \frac{\varepsilon'_c}{c} (c-d') = \varepsilon'_c \left(1 - \frac{d'}{c}\right)$$

$$\text{Ecuación Física: } f'_s = E_s \varepsilon'_s = E_s \varepsilon'_c \left(1 - \frac{d'}{c}\right) = (2 \cdot 10^5)(0.002) \left(1 - \frac{50}{c}\right) = 400 \left(1 - \frac{50}{c}\right)$$

$$C_s = A'_s f'_s = (20 \cdot 10^2)(400) \left(1 - \frac{50}{c}\right) = 800\,000 \left(1 - \frac{50}{c}\right) = 0.08 \cdot 10^7 - \frac{4 \cdot 10^7}{c}$$

Solución del equilibrio de fuerzas interiores:

$$\sum F_x = 0 \Rightarrow C_c + C_s - T_s = 0$$

$$5\,000c + \left(0.08 \cdot 10^7 - \frac{4 \cdot 10^7}{c}\right) - 1\,200\,000 = 0$$

$$c^2 - 80c - 8\,000 = 0$$

La solución de esta ecuación es: $c_1 = 138 \text{ mm}$ y $c_2 = -58 \text{ mm}$. La que posee sentido físico es la primera, y se convierte en la solución buscada si con ella se verifica que el acero en compresión no fluye, mientras que el de tracción sí:

$$\text{Para ambos aceros: } \varepsilon_y = f_y / E_s = 300 \text{ MPa} / 2 \cdot 10^5 \text{ MPa} = 0.0015$$

Acero en compresión: $\varepsilon'_s = \varepsilon'_c (1 - d'/c) = 0.002(1 - 50 \text{ mm} / 138 \text{ mm}) = 0.00127 < 0.0015$
¡No Fluye!

Acero en tracción: $\varepsilon_s = \varepsilon'_c [(d-c)/c] = 0.002[(500 \text{ mm} - 50 \text{ mm}) / 138 \text{ mm}] = 0.006 > 0.0015$ ¡Fluye!

Como las dos hipótesis que se consideraron para determinar " c " se satisfacen ($f'_s < f_y$ y $f_s = f_y$), el valor calculado se ratifica.

Evaluación del momento flector que origina la deformación fijada:

Se calculará tomando como referencia la posición de la línea neutra por la condición que impone el hormigón:

$$M = M_c + M_{A'_s} + M_{A_s}$$

$$M_c = \int_{A'_c} \sigma'_c y dA'_c = 1000 f'_c b \left[\varphi \int_0^{138} y^2 dy - 250 \varphi^2 \int_0^{138} y^3 \cdot dy \right]$$

$$M_c = 1000(25)(300) \left[\left(\frac{0.002}{138} \right) \left(\frac{138^3}{3} \right) - 250 \left(\frac{0.002}{138} \right)^2 \left(\frac{138^4}{4} \right) \right] = 59\,512\,500 \text{ N} \cdot \text{mm}$$

$$M_c \cong 59.5 \text{ kN} \cdot \text{m}$$

$$M_{A'_s} = C_s(c - d') = E_s \varepsilon'_s A_s (c - d') = (2 \cdot 10^5)(0.00127)(20 \cdot 10^2)(138 - 50) \\ = 44\,704\,000 N \cdot mm$$

$$M_{A'_s} \cong 44.7 kN \cdot m$$

$$M_{A_s} = T_s(d - c) = (40 \cdot 10^2)(300)(500 - 138) = 434\,400\,000 N \cdot mm$$

$$M_{A_s} \cong 434.4 kN \cdot m$$

$$M = 59.5 + 44.7 + 434.4 = 538.6 kN \cdot m$$

Evaluación de la curvatura asociada a la deformación fijada:

$$\varphi = \frac{\varepsilon'_c}{c} = \frac{0.002}{138} = 1.45 \cdot 10^{-5} \text{ rad/mm}$$

$$\text{Coordenadas del punto: } (M, \varphi) \equiv (538.6 kN \cdot m, 1.45 \cdot 10^{-5} \text{ rad/mm})$$

INCISO (B)

La solución analítica para la determinación de la línea neutra es laboriosa por la incertidumbre que se tienen a cerca de la tensión de trabajo de las armaduras. Sin embargo, esta solución puede evadirse si se recurre a un proceso que se apoya en determinar la fuerza total en compresión y en tracción **para dos valores arbitrarios de la línea neutra**, luego representar en un sistema cartesiano de (*Fuerza vs. "c"*), a escala, los valores de $(C_c + C_s)$ y (T_s) que se obtienen para los dos valores de "c" que se fijaron, y finalmente unir los puntos extremos mediante una línea recta, aceptando que la variación de ambas fuerzas entre los dos valores de "c" considerados es lineal. Entonces en la intercepción de las rectas que definen la ley de variación de dichas fuerzas, se halla la solución de "c". A continuación se aplica este procedimiento al mismo ejemplo, imponiendo los siguientes valores para la profundidad de la línea neutra: $c_1 = 150mm$ y $c_2 = 100mm$

Para $c_1 = 150mm$

$$\varphi_1 = \frac{\varepsilon'_c}{c_1} = \frac{0.002}{150} = 1.33 \cdot 10^{-5}$$

Análisis de la contribución a compresión del hormigón:

$$A = \frac{\varphi}{2} c^2 = \frac{1.33 \cdot 10^{-5}}{2} (150)^2 = 0.15$$

$$B = \frac{250\varphi^2}{3} c^3 = -\frac{250}{3} (1.33 \cdot 10^{-5})^2 (150)^3 = 0.05$$

$$C_c = 1000 f'_c b (A - B) = 1000 (25 MPa) (300 mm) (0.15 - 0.05) = 750\,000 N = 750 kN$$

Análisis de la contribución del acero a compresión:

Compatibilidad:

$$\frac{\varepsilon'_c}{c} = \frac{\varepsilon'_s}{c - d'} \Rightarrow \varepsilon'_s = \varphi (c - d') = (1.33 \cdot 10^{-5}) (150 - 50) = 0.00133 < \varepsilon_y$$

Ecuación Física:

$$f'_s = E_s \varepsilon'_s = (2 \cdot 10^5) (0.00133) = 266.7 MPa$$

$$C_s = A'_s f'_s = (20 \cdot 10^2) (266.7) = 533\,333 N \approx 533.3 kN$$

Análisis de la contribución del acero a tracción:

Compatibilidad:

$$\frac{\varepsilon'_c}{c} = \frac{\varepsilon_s}{d - c} \Rightarrow \varepsilon_s = \frac{\varepsilon'_c}{c} (d - c) = \varphi (d - c) = (1.33 \cdot 10^{-5}) (500 - 150) = 0.0047 > \varepsilon_y$$

$$\therefore T_s = A_s f_y = (40 \cdot 10^2 \text{ mm}^2)(300 \text{ MPa}) = 1\,200\,000 \text{ N} = \mathbf{1\,200 \text{ kN}}$$

Verificación del equilibrio:

$$C_c + C_s = 750 \text{ kN} + 533.3 \text{ kN} = \mathbf{1\,283.3 \text{ kN}}$$

$$T_s = \mathbf{1\,200 \text{ kN}}$$

Como $(C_c + C_s) > T_s$, para la segunda iteración se debe disminuir el valor de "c"

Para $c_2 = 100 \text{ mm}$

$$\varphi_1 = \frac{\varepsilon'_c}{c_1} = \frac{0.002}{100} = 2 \cdot 10^{-5}$$

Análisis de la contribución a compresión del hormigón:

$$A = \frac{\varphi}{2} c^2 = \frac{2 \cdot 10^{-5}}{2} (100)^2 = 0.10$$

$$B = \frac{250 \varphi^2}{3} c^3 = -\frac{250}{3} (2 \cdot 10^{-5})^2 (100)^3 = \frac{0.10}{3}$$

$$C_c = 1000 f'_c b (A - B) = 1000 (25 \text{ MPa}) (300 \text{ mm}) \left(0.10 - \frac{0.10}{3} \right) = 500\,000 \text{ N} = \mathbf{500 \text{ kN}}$$

Análisis de la contribución del acero a compresión:**Compatibilidad:**

$$\frac{\varepsilon'_c}{c} = \frac{\varepsilon'_s}{c - d'} \Rightarrow \varepsilon'_s = \varphi (c - d') = (2 \cdot 10^{-5}) (100 - 50) = 0.001 < \varepsilon_y$$

Ecuación Física:

$$f'_s = E_s \varepsilon'_s = (2 \cdot 10^5) (0.001) = 200 \text{ MPa}$$

$$C_s = A'_s f'_s = (20 \cdot 10^2) (200) = 400\,000 \text{ N} \approx \mathbf{400 \text{ kN}}$$

Análisis de la contribución del acero a tracción:**Compatibilidad:**

$$\frac{\varepsilon'_c}{c} = \frac{\varepsilon_s}{d - c} \Rightarrow \varepsilon_s = \frac{\varepsilon'_c}{c} (d - c) = \varphi (d - c) = (2 \cdot 10^{-5}) (500 - 100) = 0.008 > \varepsilon_y$$

$$\therefore T_s = A_s f_y = (40 \cdot 10^2 \text{ mm}^2)(300 \text{ MPa}) = 1\,200\,000 \text{ N} = \mathbf{1\,200 \text{ kN}}$$

Verificación del equilibrio:

$$C_c + C_s = 500 \text{ kN} + 400 \text{ kN} = \mathbf{900 \text{ kN}}$$

$$T_s = \mathbf{1\,200 \text{ kN}}$$

Representación en el sistema (Fuerza vs. "c") en la figura 2,27

Compárese el resultado obtenido mediante este procedimiento y el que se obtuviera analíticamente en el inciso anterior; se comprenderá entonces la fortaleza de esta solución que no exigió solucionar la ecuación de segundo grado en "c", como tampoco incluir la incertidumbre acerca de la entrada en fluencia de las armaduras. A partir de aquí la solución es similar a la que se dio en el Inciso A.

Para $c_1 = 139 \text{ mm}$

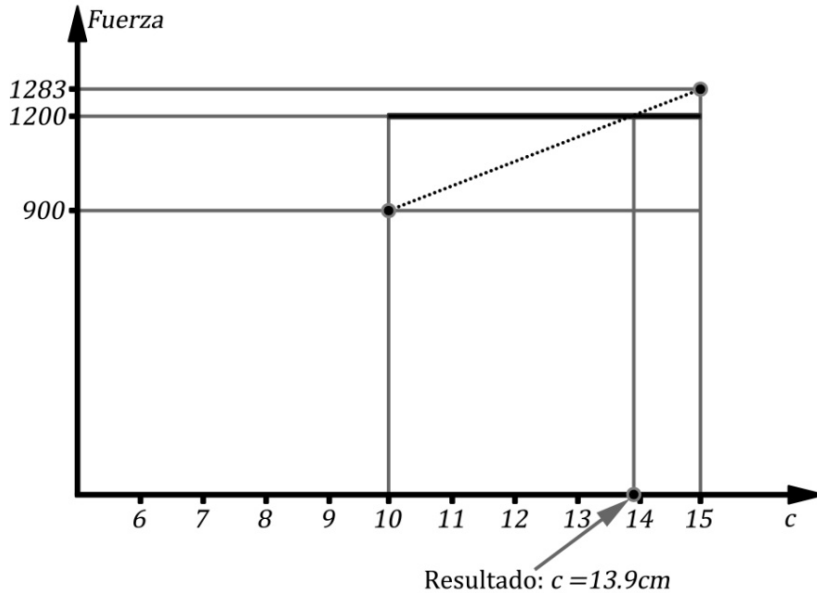
$$\varphi_1 = \frac{\varepsilon'_c}{c_1} = \frac{0.002}{139} = 1.43 \cdot 10^{-5}$$

Análisis de la contribución a compresión del hormigón:

$$A = \frac{\varphi}{2} c^2 = \frac{1.43 \cdot 10^{-5}}{2} (139)^2 = 0.138$$

$$B = \frac{250\varphi^2}{3} c^3 = -\frac{250}{3} (1.43 \cdot 10^{-5})^2 (139)^3 = 0.0458$$

$$C_c = 1000 f'_c b (A - B) = 1000 (25 \text{ MPa}) (300 \text{ mm}) (0.138 - 0.0458) = 691\,500 \text{ N} = \mathbf{691.5 \text{ kN}}$$

**Figura 2,27: Verificación gráfica del equilibrio.****Análisis de la contribución del acero a compresión:****Compatibilidad:**

$$\frac{\varepsilon'_c}{c} = \frac{\varepsilon'_s}{c - d'} \Rightarrow \varepsilon'_s = \varphi(c - d') = (1.43 \cdot 10^{-5})(139 - 50) = 0.00127 < \varepsilon_y$$

Ecuación Física:

$$f'_s = E_s \varepsilon'_s = (2 \cdot 10^5)(0.00127) = 254 \text{ MPa}$$

$$C_s = A'_s f'_s = (20 \cdot 10^2)(254) = 508\,000 \text{ N} \approx \mathbf{508 \text{ kN}}$$

Análisis de la contribución del acero a tracción:**Compatibilidad:**

$$\frac{\varepsilon'_c}{c} = \frac{\varepsilon_s}{d - c} \Rightarrow \varepsilon_s = \frac{\varepsilon'_c}{c} (d - c) = \varphi(d - c) = (1.43 \cdot 10^{-5})(500 - 139) = 0.0052 > \varepsilon_y$$

$$\therefore T_s = A_s f_y = (40 \cdot 10^2 \text{ mm}^2)(300 \text{ MPa}) = 1\,200\,000 \text{ N} = \mathbf{1\,200 \text{ kN}}$$

Verificación del equilibrio:

$$C_c + C_s = 691.5 \text{ kN} + 508 \text{ kN} = \mathbf{1\,199.5 \text{ kN} \cong 1\,200 \text{ kN} ; \text{VERIFICA!}}$$

Evaluación del momento flector que origina la deformación fijada:

Se calculará tomando como referencia la posición de la línea neutra por la condición que impone el hormigón:

$$M = M_c + M_{A'_s} + M_{A_s}$$

$$M_c = 1000(25)(300) \left[\left(\frac{0.002}{139} \right) \left(\frac{139^3}{3} \right) - 250 \left(\frac{0.002}{139} \right)^2 \left(\frac{139^4}{4} \right) \right] = 60\,378\,125 N \cdot mm$$

$$M_c \cong 60.4 kN \cdot m$$

$$M_{A'_s} = (2 \cdot 10^5)(0.00127)(20 \cdot 10^2)(139 - 50) = 45\,212\,000 N \cdot mm$$

$$M_{A'_s} \cong 45.2 kN \cdot m$$

$$M_{A_s} = 1\,200\,000(500 - 139) = 433\,200\,000 N \cdot mm$$

$$M_{A_s} \cong 433.2 kN \cdot m$$

$$M = 60.4 + 45.2 + 433.2 = 538.8 kN \cdot m$$

Evaluación de la curvatura asociada a la deformación fijada:

$$\varphi = \frac{\varepsilon'_c}{c} = \frac{0.002}{139} = 1.44 \cdot 10^{-5} \text{ rad/mm}$$

$$\text{Coordenadas del punto: } (M, \varphi) \equiv (538.8 kN \cdot m, 1.44 \cdot 10^{-5} \text{ rad/mm})$$

2.7.2 TRANSFORMACIÓN DE LEYES σ'_c vs ε'_c NO LINEALES DEL HORMIGÓN EN UN DIAGRAMA RECTANGULAR EQUIVALENTE.

Cuando las cargas exteriores provocan un desplazamiento de la sección deformada paralelo a su posición original, todas las fibras de la sección se estiran (tracción) o acortan (compresión) lo mismo, en consecuencia la tensión normal que tiene lugar en el hormigón es uniforme y su magnitud dependerá de la ley constitutiva que se adopte para modelar el comportamiento de este material. Bastaría con sustituir la deformación ε_c ó ε'_c en la ecuación que rige esta ley para encontrar la magnitud de esta tensión, y con ella encontrar la magnitud de la fuerza y su posición de elemental manera al tratarse de un bloque de tensiones uniformes. La magnitud de la fuerza resultará de multiplicar la tensión por el área de la sección en que ella actúa, y su posición coincidirá con el centroide de dicha área.

Sin embargo, cuando se trata de la flexión la sección al deformarse gira y a cada fibra de hormigón corresponderá una deformación diferente, por tanto una tensión diferente, es decir, si la ley tenso deformacional que se adopta para el hormigón (σ'_c vs ε'_c) deja de ser lineal, evaluar la magnitud de la fuerza con que participa este material en el equilibrio, lo mismo que su posición, se convierte en un proceso realmente complejo, como se demostró en el ejercicio anterior. Para aliviar esta complejidad se sugiere una transformación como la que se ilustra en la Figura 2.28, sustituyendo el diagrama genérico de compresiones que se adopte, por otro rectangular equivalente a él.

La equivalencia es certera si se garantiza el cumplimiento de las dos condiciones siguientes:

PRIMERA CONDICIÓN: Para que la fuerza que se evalúe en cualquiera de los dos diagramas sea igual el volumen de las compresiones correspondiente a las áreas rayadas en el estado tensional genérico que se considere, y en el diagrama rectangular por el que se procura sustituirlo, deben ser también iguales. Esta condición se expresa mediante la igualdad:

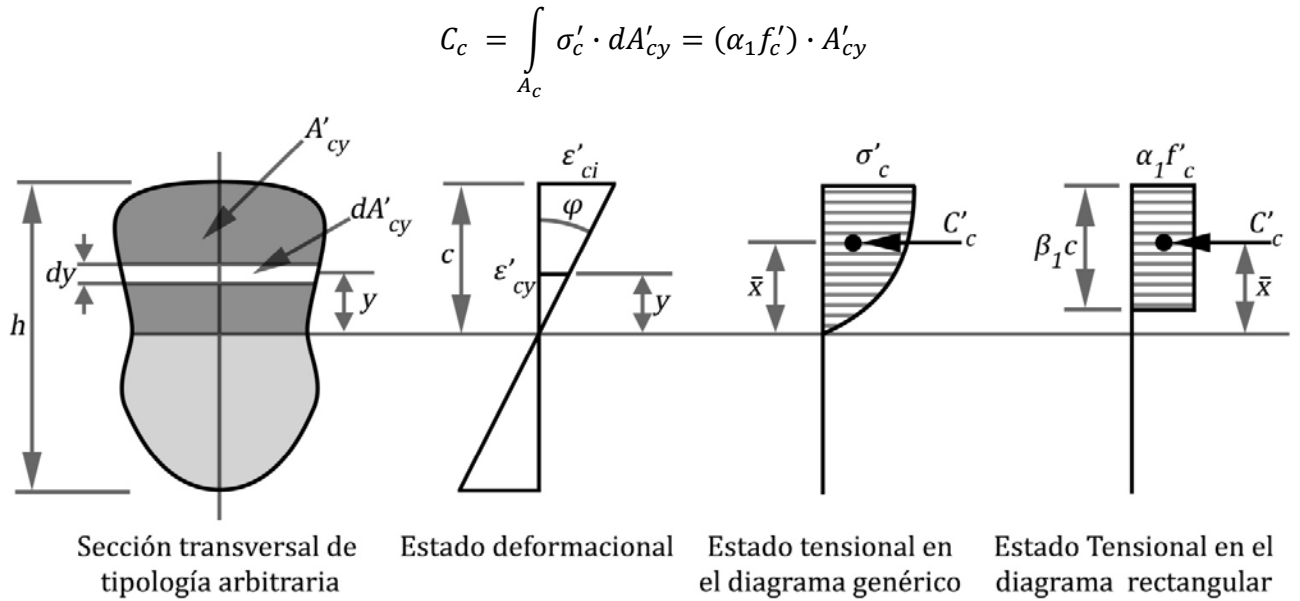


Figura 2.28 Transformación de una ley constitutiva σ'_c vs ϵ'_c genérica en otra rectangular equivalente.

SEGUNDA CONDICIÓN: Para que el momento flector que ejerza la fuerza de compresión en el hormigón sea igual, evaluado mediante cualquiera de los dos diagramas, el centroide de ambas áreas, que resulta ser el punto de aplicación de dichas fuerzas, debe coincidir. Esta otra condición se expresa mediante la igualdad:

$$\bar{x} = \frac{\text{MOMENTO ESTÁTICO}}{\text{ÁREA}} = \frac{\int_{A_c} \sigma'_c \cdot \epsilon'_c \cdot dA'_{cy}}{\int_{A_c} \sigma'_c \cdot dA'_{cy}} = c - \frac{\beta_1 c}{2}$$

El término σ'_c representa la ley tensión-deformación del hormigón a compresión (σ'_c vs ϵ'_c); en la sección § 1.2.3 se estudiaron varias de estas leyes, y salvo la lineal ($\sigma'_c = E_c \epsilon'_c$), las restantes responden a ecuaciones de grado 2 o superior, cuya integración resultaría muy laboriosa.

En consecuencia, una ley constitutiva como la parábola rectángulo propuesta por Rüsçh (Figura 1.10), la misma parabólica sugerida por Collins (Figura 1.12), o en general para cualquier otra que sea de variación no lineal, evaluar la magnitud y posición de la fuerza de compresión del hormigón exige resolver las integrales escritas anteriormente, lo que resulta evidentemente laborioso y a la vez complejo. Sin embargo, esta complejidad puede atenuarse si se logra la transformación que se propone, sustituyendo el diagrama genérico que se desee adoptar en otro rectangular que le sea exactamente equivalente, de manera que se pueda trabajar mejor con este último y evadir así la solución de los laboriosos procesos de integración. Ello será posible si se llega a conocer la magnitud de los coeficientes de transformación α_1 y β_1 para cada deformación ϵ'_{ci} que se fije.

Por otro lado, el término dA_c corresponde al diferencial de área de la zona comprimida de la sección y depende básicamente de la geometría que esta tenga.

Sólo a manera de ilustración se expondrá una síntesis del procedimiento de transformación para el caso en que se adopte como ley constitutiva del hormigón a compresión **el diagrama de Rüsck para cargas de acción breve**, y dos tipologías diferentes de sección: la rectangular y la triangular.

2.7.2.1 ANÁLISIS DE LA TRANSFORMACIÓN EN EL CASO DE SECCIONES RECTANGULARES

La sección rectangular es el más sencillo de los caso pues su ancho b es constante y el diferencial de área comprimida se obtiene mediante la igualdad ($dA'_{cy} = b \cdot dy$).

La proporcionalidad que puede escribirse en el estado deformacional que aparece en la Figura 2.11 conduce a las siguientes razones de semejanza:

$$\tan\varphi = \varphi = \frac{\varepsilon'_{ci}}{c} = \frac{\varepsilon'_{cy}}{y} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} c = \frac{\varepsilon'_{ci}}{\varphi} \\ y = \frac{\varepsilon'_{cy}}{\varphi} \end{cases} \quad \Rightarrow \quad dy = \frac{d\varepsilon'_{cy}}{\varphi}$$

$$\therefore dA'_{cy} = b \cdot dy = b \cdot \frac{d\varepsilon'_{cy}}{\varphi}$$

Entonces las condiciones pueden plantearse como:

$$C_c = \int_0^{\varepsilon'_{ci}} (\sigma'_c) \cdot dA'_{cy} = \int_0^{\varepsilon'_{ci}} (\sigma'_c) \cdot b \cdot \frac{d\varepsilon'_{cy}}{\varphi} = \frac{b}{\varphi} \int_0^{\varepsilon'_{ci}} (\sigma'_c) d\varepsilon'_{cy}$$

$$S = \int_0^{\varepsilon'_{ci}} (\sigma'_c) \cdot y \cdot dA'_{cy} = \int_0^{\varepsilon'_{ci}} (\sigma'_c) \cdot \left(\frac{\varepsilon'_c}{\varphi}\right) \cdot \left(b \cdot \frac{d\varepsilon'_{cy}}{\varphi}\right) = \frac{b}{\varphi^2} \int_0^{\varepsilon'_{ci}} (\sigma'_c) \cdot \varepsilon'_c \cdot d\varepsilon'_{cy}$$

Donde, como se aprecia en la figura 2,29a:

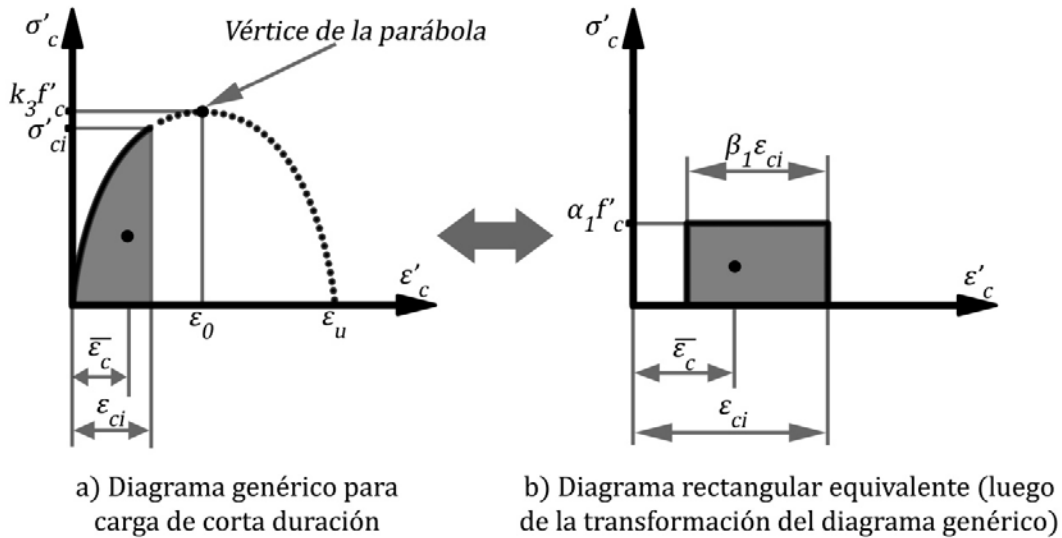


Figura 2.29 Transformación del diagrama genérico en el rectangular para la sección triangular.

$$\int_0^{\varepsilon'_{ci}} (\sigma'_c) d\varepsilon'_{cy} \quad \text{área bajo el diagrama genérico para cargas de corta duración}$$

$$\int_0^{\varepsilon'_{ci}} (\sigma'_c) \cdot \varepsilon'_c \cdot d\varepsilon'_{cy} \quad \text{momento estático de dicha área respecto al origen}$$

Estableciendo una equivalencia con el diagrama rectangular, figura 2,29b, puede plantearse que:

$$\int_0^{\varepsilon'_{ci}} (\sigma'_c) d\varepsilon'_{cy} = \alpha_1 \sigma'_c \beta_1 \varepsilon'_{ci}$$

Y para la posición del centroide:

$$\bar{\varepsilon}_c = \frac{\int_0^{\varepsilon'_{ci}} (\sigma'_c) \cdot \varepsilon'_c \cdot d\varepsilon'_{cy}}{\int_0^{\varepsilon'_{ci}} (\sigma'_c) d\varepsilon'_{cy}} = \varepsilon'_{ci} \left(1 - \frac{\beta_1}{2}\right)$$

Por lo que para cada ley constitutiva el problema se concreta en el cálculo las funciones de $\int_0^{\varepsilon'_{ci}} (\sigma'_c) d\varepsilon'_{cy}$ y $\bar{\varepsilon}_c$ como se demostrará a continuación:

(A) SOLUCIÓN DE LAS VARIABLES FUERZA Y CENTROIDE MEDIANTE LA LEY CONSTITUTIVA DE RÜSCH

En la Tabla 1.2 del epígrafe § 1.2.3 se selecciona la función correspondiente al diagrama de Rüsch, la que escrita para el caso de carga de corta duración ($k_3 = 1.00$ y $\varepsilon_o = 0.002$) resulta ser:

$$\sigma'_c: \begin{cases} \sigma'_{c(1)} = 1000 f'_c [\varepsilon'_{ci} - 250(\varepsilon'_{ci})^2] & \text{para } \varepsilon'_c < 0.002 \\ \sigma'_{c(2)} = f'_c & \text{para } 0.002 \leq \varepsilon'_c \leq \varepsilon_u \end{cases}$$

Obsérvese que la ley adoptada no es continua en todo el rango de deformación que se debe estudiar. Esta razón obliga a realizar un primer análisis para deformaciones $\varepsilon'_{ci} < 0.002$, rango en el cual los coeficientes α_1 y β_1 responderán a un tipo particular de formulación, y un segundo análisis para el rango de deformación $0.002 \leq \varepsilon'_{ci} < \varepsilon_u$ dentro del cual cambia la ley de tensión y en consecuencia las formulaciones de α_1 y β_1 .

SOLUCIÓN DE LA INTEGRAL DE ÁREA:

PARA $\varepsilon'_{ci} < 0.002$

$$\int_0^{\varepsilon'_{ci}} (\sigma'_c) d\varepsilon'_{cy} = \int_0^{\varepsilon'_{ci}} 1000 f'_c [\varepsilon'_c - 250(\varepsilon'_c)^2] d\varepsilon'_{cy} = 1000 f'_c \int_0^{\varepsilon'_{ci}} [\varepsilon'_c - 250(\varepsilon'_c)^2] d\varepsilon'_{cy}$$

$$\int_0^{\varepsilon'_{ci}} (\sigma'_c) d\varepsilon'_{cy} = 1000 f'_c \left\{ \left[\frac{(\varepsilon'_c)^2}{2} \right]_0^{\varepsilon'_{ci}} - 250 \left[\frac{(\varepsilon'_c)^3}{3} \right]_0^{\varepsilon'_{ci}} \right\}$$

$$\int_0^{\varepsilon'_{ci}} (\sigma'_c) d\varepsilon'_{cy} = \frac{500 f'_c}{3} (\varepsilon'_{ci})^2 (3 - 500 \varepsilon'_{ci})$$

PARA $0.002 \leq \varepsilon'_{ci} < \varepsilon_u$

$$\int_0^{\varepsilon'_{ci}} (\sigma'_c) d\varepsilon'_{cy} = \int_0^{0.002} (\sigma'_{c1}) \cdot b \cdot \frac{d\varepsilon'_{cy}}{\varphi} + \int_{0.002}^{\varepsilon'_{ci}} (\sigma'_{c2}) \cdot b \cdot \frac{d\varepsilon'_{cy}}{\varphi}$$

$$\int_0^{\varepsilon'_{ci}} (\sigma'_c) d\varepsilon'_{cy} = \left[\left(\int_0^{0.002} 1000f'_c[\varepsilon'_c - 250(\varepsilon'_c)^2] d\varepsilon'_{cy} \right) + \left(\int_{0.002}^{\varepsilon'_{ci}} f'_c \cdot d\varepsilon'_{cy} \right) \right]$$

$$\int_0^{\varepsilon'_{ci}} (\sigma'_c) d\varepsilon'_{cy} = f'_c \left\{ 1000 \left[\left(\frac{(\varepsilon'_c)^2}{2} \right) \Big|_0^{0.002} \right] - 250 \left[\left(\frac{(\varepsilon'_c)^3}{3} \right) \Big|_0^{0.002} \right] + [(\varepsilon'_c) \Big|_{0.002}^{\varepsilon'_{ci}}] \right\}$$

$$\int_0^{\varepsilon'_{ci}} (\sigma'_c) d\varepsilon'_{cy} = \frac{f'_c}{3} (3\varepsilon'_{ci} - 0.002)$$

SOLUCIÓN DE LA INTEGRAL DEL MOMENTO ESTÁTICO:**PARA** $\varepsilon'_{ci} < 0.002$

$$\int_0^{\varepsilon'_{ci}} (\sigma'_c) \cdot \varepsilon'_c \cdot d\varepsilon'_{cy} = \int_0^{\varepsilon'_{ci}} 1000f'_c[\varepsilon'_c - 250(\varepsilon'_c)^2] \varepsilon'_c \cdot d\varepsilon'_{cy}$$

$$\int_0^{\varepsilon'_{ci}} (\sigma'_c) \cdot \varepsilon'_c \cdot d\varepsilon'_{cy} = 1000f'_c \left\{ \left[\left(\frac{(\varepsilon'_c)^3}{3} \right) \Big|_0^{\varepsilon'_{ci}} \right] - 250 \left[\left(\frac{(\varepsilon'_c)^4}{4} \right) \Big|_0^{\varepsilon'_{ci}} \right] \right\}$$

$$\int_0^{\varepsilon'_{ci}} (\sigma'_c) \cdot \varepsilon'_c \cdot d\varepsilon'_{cy} = 1000f'_c \left[\frac{(\varepsilon'_{ci})^3}{3} - \frac{250}{4} (\varepsilon'_{ci})^4 \right]$$

$$\int_0^{\varepsilon'_{ci}} (\sigma'_c) \cdot \varepsilon'_c \cdot d\varepsilon'_{cy} = \frac{250f'_c}{3} (\varepsilon'_{ci})^3 (4 - 750\varepsilon'_{ci})$$

PARA $0.002 \leq \varepsilon'_{ci} < \varepsilon_u$

$$\int_0^{\varepsilon'_{ci}} (\sigma'_c) \cdot \varepsilon'_c \cdot d\varepsilon'_{cy} = \left[\left(\int_0^{0.002} 1000f'_c[\varepsilon'_c - 250(\varepsilon'_c)^2] \varepsilon'_c \cdot d\varepsilon'_{cy} \right) + \left(\int_{0.002}^{\varepsilon'_{ci}} f'_c \cdot \varepsilon'_c \cdot d\varepsilon'_{cy} \right) \right]$$

$$\int_0^{\varepsilon'_{ci}} (\sigma'_c) \cdot \varepsilon'_c \cdot d\varepsilon'_{cy} = f'_c \left\{ 1000 \left[\left(\frac{(\varepsilon'_c)^3}{3} \right) \Big|_0^{0.002} \right] - 250 \left[\left(\frac{(\varepsilon'_c)^4}{4} \right) \Big|_0^{0.002} \right] + \left(\frac{(\varepsilon'_c)^2}{2} \right) \Big|_{0.002}^{\varepsilon'_{ci}} \right\}$$

$$\int_0^{\varepsilon'_{ci}} (\sigma'_c) \cdot \varepsilon'_c \cdot d\varepsilon'_{cy} = \frac{f'_c}{6} [3(\varepsilon'_{ci})^2 - 2 \cdot 10^{-6}]$$

DETERMINACIÓN DEL CENTROIDE**PARA** $\varepsilon'_{ci} < 0.002$

$$\bar{\varepsilon}_c = \frac{\int_0^{\varepsilon'_{ci}} (\sigma'_c) \cdot \varepsilon'_c \cdot d\varepsilon'_{cy}}{\int_0^{\varepsilon'_{ci}} (\sigma'_c) d\varepsilon'_{cy}} = \frac{\frac{250f'_c}{3} (\varepsilon'_{ci})^3 (4 - 750\varepsilon'_{ci})}{\frac{500f'_c}{3} (\varepsilon'_{ci})^2 (3 - 500\varepsilon'_{ci})} = \varepsilon'_{ci} \left(\frac{4 - 750\varepsilon'_{ci}}{6 - 1000\varepsilon'_{ci}} \right)$$

PARA $0.002 \leq \varepsilon'_{ci} < \varepsilon_u$

$$\bar{\varepsilon}_c = \frac{\int_0^{\varepsilon'_{ci}} (\sigma'_c) \cdot \varepsilon'_c \cdot d\varepsilon'_{cy}}{\int_0^{\varepsilon'_{ci}} (\sigma'_c) d\varepsilon'_{cy}} = \frac{\frac{f'_c}{6} [3(\varepsilon'_{ci})^2 - 2 \cdot 10^{-6}]}{\frac{f'_c}{3} [3\varepsilon'_{ci} - 0.002]} = \left(\frac{1}{2} \right) \frac{[3(\varepsilon'_{ci})^2 - 2 \cdot 10^{-6}]}{[3\varepsilon'_{ci} - 0.002]}$$

(B) SOLUCIÓN DE LOS COEFICIENTES DE TRANSFORMACIÓN

DETERMINACIÓN DEL COEFICIENTE β_1 **Principio: Igualdad de centroides****PARA** $\varepsilon'_{ci} < 0.002$

$$\bar{\varepsilon}_c = \varepsilon'_{ci} \left(\frac{4 - 750\varepsilon'_{ci}}{6 - 1000\varepsilon'_{ci}} \right) = \varepsilon'_{ci} \left(1 - \frac{\beta_1}{2} \right)$$

$$\beta_1 = \left(\frac{4 - 500\varepsilon'_{ci}}{6 - 1000\varepsilon'_{ci}} \right)$$

Pasando a la variable $\Omega = \varepsilon'_{ci}/\varepsilon_o = \varepsilon'_{ci}/0.002$

$$\beta_1 = \left[\frac{4 - 500(0.002\Omega)}{6 - 1000(0.002\Omega)} \right] = \left(\frac{4 - \Omega}{6 - 2\Omega} \right)$$

PARA $0.002 \leq \varepsilon'_{ci} < \varepsilon_u$

$$\bar{\varepsilon}_c = \frac{[3(\varepsilon'_{ci})^2 - 2 \cdot 10^{-6}]}{[3\varepsilon'_{ci} - 0.002]} = \varepsilon'_{ci} \left(1 - \frac{\beta_1}{2} \right)$$

$$\beta_1 = 2 \left\{ 1 - \frac{[1500000(\varepsilon'_{ci})^2 - 1]}{2000\varepsilon'_{ci}[1500\varepsilon'_{ci} - 1]} \right\}$$

Pasando a la variable $\Omega = \varepsilon'_{ci}/\varepsilon_o = \varepsilon'_{ci}/0.002$

$$\beta_1 = 2 \left[1 - \frac{[1500000(0.002\Omega)^2 - 1]}{2000(0.002)\Omega[1500(0.002)\Omega - 1]} \right] = 2 \left[1 - \frac{(6\Omega^2 - 1)}{4\Omega(3\Omega - 1)} \right]$$

DETERMINACIÓN DEL COEFICIENTE α_1 **Principio: Igualdad de áreas****PARA** $\varepsilon'_{ci} < 0.002$

$$\frac{500f'_c}{3} (\varepsilon'_{ci})^2 (3 - 500\varepsilon'_{ci}) = (\alpha_1 f'_c) (\beta_1 \varepsilon'_{ci})$$

$$\alpha_1 = \frac{3000\varepsilon'_{ci}(1 - 500\varepsilon'_{ci}/3)^2}{(4 - 500\varepsilon'_{ci})}$$

Pasando a la variable $\Omega = \varepsilon'_{ci}/\varepsilon_o = \varepsilon'_{ci}/0.002$

$$\alpha_1 = \frac{3000(0.002\Omega)[1 - 500(0.002\Omega)/3]^2}{[4 - 500(0.002\Omega)]} = \frac{6(1 - \Omega/3)^2}{(4/\Omega - 1)}$$

PARA $0.002 \leq \varepsilon'_{ci} < \varepsilon_u$

$$\frac{f'_c}{3} [3\varepsilon'_{ci} - 0.002] = (\alpha_1 f'_c)(\beta_1 \varepsilon'_{ci})$$

$$\alpha_1 = \frac{0.002[1500\varepsilon'_{ci} - 1]}{3\beta_1 \varepsilon'_{ci}}$$

Pasando a la variable $\Omega = \varepsilon'_{ci}/\varepsilon_o = \varepsilon'_{ci}/0.002$

$$\alpha_1 = \frac{0.002[1500(0.002\Omega) - 1]}{3\beta_1(0.002\Omega)} = \frac{3\Omega - 1}{3\Omega\beta_1}$$

Este mismo procedimiento puede seguirse para la transformación de otros diagramas tenso deformación del hormigón de los que ya fueron presentados en el Capítulo I, sin ceder en la confianza que ofrece la modelación analítica mediante el empleo de cada uno en su expresión original, lo que permitiría estudiar el comportamiento a flexión recurriendo al diagrama rectangular de más noble tratamiento analítico. Por ejemplo, si se repitiera el proceso para el diagrama parabólico sugerido por Collins, o la propuesta de Hognestad, se demostrarían las ecuaciones recogidas en la Tabla 2.10, que permiten evaluar los coeficientes de equivalencia α_1 y β_1 a partir de la variable ($\Omega = \varepsilon'_{ci}/\varepsilon_o$).

TABLA 2.10 Expresiones de α_1 y β_1 para secciones rectangulares

DIAGRAMA $k_3 = 1.00$ y $\varepsilon_o = 0.002$		α_1	β_1
COLLINS (PARABOLICO)		$\frac{6(1 - \Omega/3)^2}{(4/\Omega - 1)}$	$\frac{(4 - \Omega)}{(6 - 2\Omega)}$
HOGNESTAD	$\varepsilon'_c < 0.002$	$\frac{6(1 - \Omega/3)^2}{(4/\Omega - 1)}$	$\frac{(4 - \Omega)}{(6 - 2\Omega)}$
	$\varepsilon'_c \geq 0.002$	$\frac{(1.15 - 0.075\Omega - 0.408/\Omega)}{\beta_1}$	$2 \left[1 - \frac{0.575\Omega^2 - 0.05\Omega^3 - 0.108}{\Omega(1.15\Omega - 0.075\Omega^2 - 0.408)} \right]$
RÜSCH	$\varepsilon'_c < 0.002$	$\frac{6(1 - \Omega/3)^2}{(4/\Omega - 1)}$	$\frac{(4 - \Omega)}{(6 - 2\Omega)}$
	$\varepsilon'_c \geq 0.002$	$\frac{3\Omega - 1}{3\Omega\beta_1}$	$2 \left[1 - \frac{6\Omega^2 - 1}{4\Omega(3\Omega - 1)} \right]$

Por otro lado, la Tabla 2.11 ofrece los valores de los coeficientes α_1 y β_1 para las anteriores leyes tenso deformacionales del hormigón, incluyendo las de **Kabaila** y **Desayi- Krishman**, evaluadas para diferentes relaciones $\Omega = \varepsilon'_c/\varepsilon_o$. Lo mismo las expresiones que se indican en la Tabla 2.10 que los valores que aparecen en la Tabla 2.11 se han obtenido habiendo fijado los siguientes parámetros: **$k_3 = 1.00$ y $\varepsilon_o = 0.002$.**

TABLA 2.11 Coeficientes de α_1 y β_1 para secciones rectangulares¹²

Ω	0.25	0.50	0.75	1.00	1.25	1.50	1.75	2.00
PARABOLICO (Para $k_3 = 1.00$ y $\varepsilon_o = 0.002$)								
α_1	0.336	0.595	0.779	0.888	0.928	0.90	0.81	0.667
β_1	0.682	0.70	0.722	0.75	0.786	0.833	0.90	1.00
HOGNESTAD (Para $k_3 = 1.00$ y $\varepsilon_o = 0.002$)								
α_1	0.336	0.595	0.779	0.888	0.929	0.94	0.925	0.911
β_1	0.682	0.70	0.722	0.75	0.785	0.814	0.849	0.874
RÜSCH (Para $k_3 = 1.00$ y $\varepsilon_o = 0.002$)								
α_1	0.336	0.595	0.779	0.888	0.938	0.961	0.973	0.98
β_1	0.682	0.70	0.722	0.75	0.782	0.810	0.832	0.85
KABAILA (Para $k_3 = 1.00$ y $\varepsilon_o = 0.002$)								
α_1	0.33	0.578	0.752	0.864	0.923	0.939	0.922	0.879
β_1	0.684	0.704	0.726	0.75	0.778	0.809	0.844	0.882
DESAYI- KRISHMAN (Para $k_3 = 1.00$ y $\varepsilon_o = 0.002$)								
α_1	0.359	0.641	0.818	0.91	0.945	0.947	0.93	0.904
β_1	0.675	0.697	0.727	0.762	0.796	0.830	0.861	0.89

Ejercicio 2.6

Con el interés de demostrar la fortaleza de esta transformación, considérese que se desea estudiar el comportamiento a nivel de sección de un elemento de hormigón armado sometido a flexión, seleccionando para este estudio el **diagrama parábola-rectángulo** sugerido por Rüsçh, correspondiente a cargas de corta duración como ecuación constitutiva para modelar el hormigón a compresión. La investigación de este comportamiento, precisamente el objeto de este Capítulo, exigiría conocer para diferentes deformaciones a nivel de una cualquiera de las fibras de la sección, por ejemplo, la fibra más comprimida (ε'_{ci}), cuánto contribuyen las armaduras de acero y el hormigón en la altura comprimida, o incluso en la altura traccionada si así se resolviera.

Supóngase el caso de una sección rectangular de ancho b y altura h , que posee un área de acero en tracción A_s , con un recubrimiento mecánico (a eje de esta armadura) igual a d_s , y determínese sólo la magnitud de la fuerza de compresión del hormigón, lo mismo que su posición, para asegurar el equilibrio de la sección, para la situación i -ésima en la que $\varepsilon'_{ci} = 0.0015$. Estas características de la sección se muestran en la figura 2,30

A. Considerando la ley analítica que define Rüsçh para el **diagrama parábola-rectángulo**.

¹² Aun cuando no se ofrecen las expresiones de α_1 y β_1 para las funciones de Kabaila y Desayi-Krishman, se indican a continuación sus leyes tensión-deformación:

Kabaila: $\sigma'_c = f'_c(2\Omega - 1.189\Omega^2 + 0.1763\Omega^3 + 0.0027\Omega^4)$

Desayi-Krishman: $\sigma'_c = f'_c[2\Omega/(1 + \Omega^2)]$

B. Recurriendo a los coeficientes α_1 y β_1 que corresponden a esta ley para la deformación que se ha fijado.

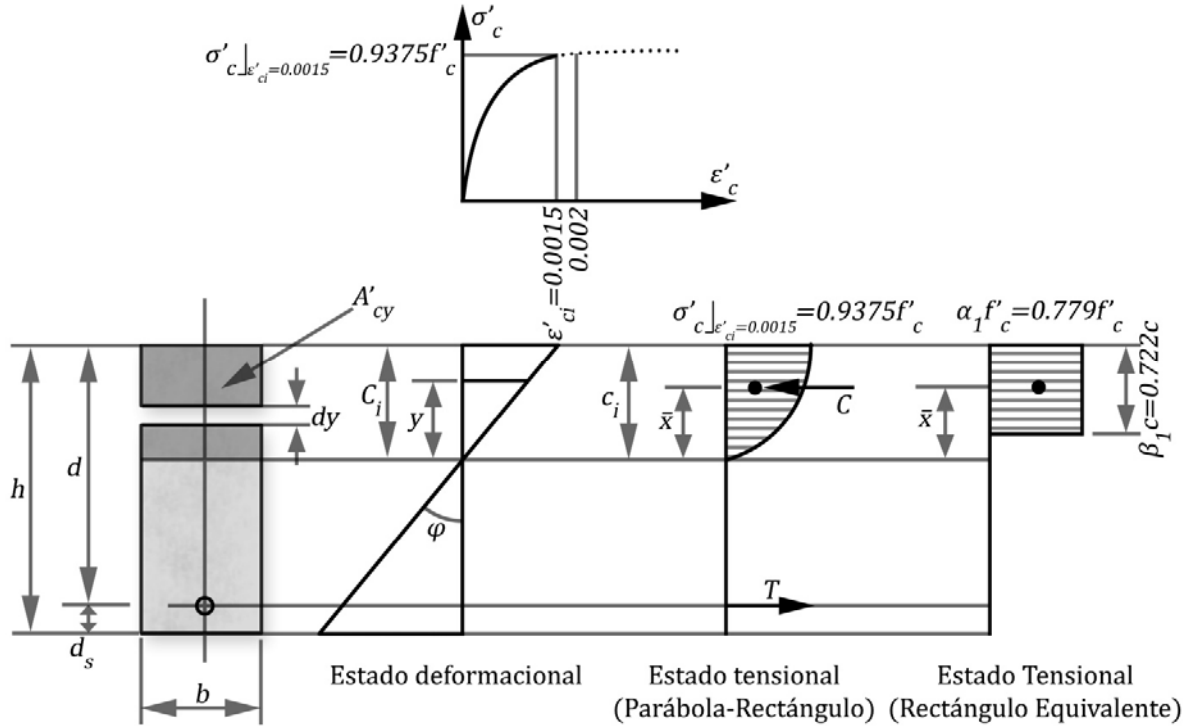


Figura 2.30 Equivalencia entre la ley constitutiva adoptada y la rectangular.

Cálculos y Discusión

SOLUCIÓN POR EL CAMINO (A)

Si no se conocieran las leyes de α_1 y β_1 para transformar el diagrama parábola-rectángulo en el diagrama equivalente rectangular, para cada deformación fijada habría que proceder de la manera siguiente:

Para $\varepsilon'_c = \varepsilon'_{ci} = 0.0015 < 0.002$, la ley constitutiva que corresponde al diagrama parábola rectángulo es:

$$\sigma'_c = 1000f'_c[\varepsilon'_c - 250(\varepsilon'_c)^2]$$

$$\sigma'_c|_{\varepsilon'_c=0.0015} = 1000f'_c[0.0015 - 250(0.0015)^2] = 0.9375f'_c$$

FUERZA DE COMPRESIÓN EN EL HORMIGÓN:

$$C_c = \frac{b}{\phi} \int_0^{\varepsilon'_{ci}} (\sigma'_{c1}) d\varepsilon'_{cy}$$

Para obtener la fuerza en función de la profundidad de la línea neutra c_i en lugar de la deformación fijada ε'_{ci} , se debe realizar el siguiente cambio de variable: $\varepsilon'_c = \phi y$. De esta manera se debe escribir la función σ'_{c1} , el diferencial $d\varepsilon'_{cy}$ y el límite superior de integración ε'_{ci} , en función de ϕ :

$$\sigma'_{c1} = 1000f'_c(\phi y - 250(\phi y)^2) = 1000\phi f'_c(y - 250\phi y^2)$$

$$d\varepsilon'_{cy} = \phi dy$$

$$C_c = \frac{b}{\varphi} \int_0^{\varepsilon'_{ci}} (\sigma'_{c1}) d\varepsilon'_{cy} = \frac{b}{\varphi} \int_0^{c_i} (\sigma'_{c1}) (\varphi dy) = b \int_0^{c_i} (\sigma'_{c1}) (dy)$$

$$\therefore C_c = b \int_0^{c_i} 1000\varphi f'_c [(y - 250\varphi y^2)] dy = 1000\varphi f'_c b \left[\frac{(y)^2}{2} \Big|_0^{c_i} - 250\varphi \frac{(y)^3}{3} \Big|_0^{c_i} \right]$$

$$\therefore C_c = 1000\varphi f'_c b \left[\frac{c_i^2}{2} - 250\varphi \left(\frac{c_i^3}{3} \right) \right] = \frac{1000f'_c b}{6} \varphi c_i^2 (3 - 500\varphi c_i)$$

Para la deformación que se está considerando ($\varepsilon_{ci} = \mathbf{0.0015}$), se tiene:

$$\varphi = \varphi_i = 0.0015/c_i$$

Y sustituyendo en la expresión anterior se llega a:

$$C_c = \frac{1000f'_c b}{6} \left(\frac{0.0015}{c_i} \right) c_i^2 \left[3 - 500 \left(\frac{0.0015}{c_i} \right) (c_i) \right]$$

Demostrándose finalmente que:

$$C_c = \mathbf{0.5625(f'_c b c_i)}$$

POSICIÓN DEL CENTROIDE:

$$\bar{x} = \frac{S}{C_c} = \frac{\frac{b}{\varphi} \int_0^{\varepsilon'_{ci}} (\sigma'_{c1}) \cdot \varepsilon'_{cy} \cdot d\varepsilon'_{cy}}{\frac{b}{\varphi} \int_0^{\varepsilon'_{ci}} (\sigma'_{c1}) d\varepsilon'_{cy}} = \frac{\frac{b}{\varphi} \int_0^{\varepsilon'_{ci}} (\sigma'_{c1}) \cdot \varepsilon'_{cy} \cdot d\varepsilon'_{cy}}{0.5625f'_c b c_i}$$

$$S = \frac{b}{\varphi} \int_0^{\varepsilon'_{ci}} (\sigma'_{c1}) \cdot \varepsilon'_{cy} \cdot d\varepsilon'_{cy} = \frac{b}{\varphi} \int_0^{c_i} (\sigma'_{c1}) \cdot (\varphi y) \cdot (\varphi dy) = b\varphi \int_0^{c_i} (\sigma'_{c1}) \cdot y \cdot dy$$

$$S = 1000f'_c b\varphi \int_0^{c_i} [(y^2 - 250\varphi y^3)] dy = 1000f'_c b\varphi \left[\frac{c_i^3}{3} - 250\varphi \left(\frac{c_i^4}{4} \right) \right]$$

$$= \frac{1000f'_c b}{12} \varphi c_i^3 (4 - 750\varphi c_i)$$

Para $\varphi = \varphi_i = 0.0015/c_i$

$$S = \frac{1000f'_c b}{12} \left(\frac{0.0015}{c_i} \right) c_i^3 \left[4 - 750 \left(\frac{0.0015}{c_i} \right) c_i \right] = 0.3594f'_c b c_i^2$$

$$\bar{x} = \frac{0.3594f'_c b c_i^2}{0.5625f'_c b c_i} = \mathbf{0.6389c_i}$$

SOLUCIÓN POR EL CAMINO (B)

Los cálculos expuestos para un único valor de deformación ε_{ci} confirman la laboriosidad del proceso analítico cuando se emplea la ecuación de la ley tenso deformacional que se adopte para el hormigón. Como el estudio del comportamiento exige el análisis para un número apreciable de valores diferentes de ε_{ci} , se comprenderá la complejidad del problema. Sin embargo, si se recurre al diagrama rectangular equivalente, la operatoria se simplifica extraordinariamente, pues bastaría evaluar los valores de α_1 y β_1 para la deformación que se fije. Como en este caso la deformación fijada

corresponde a la condición $\varepsilon_{ci} < 0.002$, deben adoptarse las expresiones de α_1 y β_1 deducidas inicialmente, a saber:

$$\Omega = \varepsilon'_{ci} / \varepsilon_o = 0.0015 / 0.002 = 0.75$$

$$\alpha_1 = \frac{6(1 - \Omega/3)^2}{(4/\Omega - 1)} = \frac{6(1 - 0.75/3)^2}{4/0.75 - 1} = \mathbf{0.779}$$

$$\beta_1 = \frac{(4 - \Omega)}{(6 - 2\Omega)} = \frac{4 - 0.75}{6 - 2(0.75)} = \mathbf{0.722}$$

Y finalmente:

$$\text{FUERZA: } C_c = b(\alpha_1 f'_c)(\beta_1 c_i) = b(0.779 f'_c)(0.722 c_i) \approx \mathbf{0.5624(f'_c b c_i)}$$

$$\text{CENTROIDE: } \bar{x} = \left(1 - \frac{\beta_1}{2}\right) c_i = \left(1 - \frac{0.722}{2}\right) c_i = \mathbf{0.639 c_i}$$

Luego de comprobar que el resultado obtenido por ambas vías es prácticamente el mismo, compare el lector los dos procedimientos y comprenderá la ventaja de la transformación que se ha propuesto.

2.7.2.2 ANÁLISIS DE LA TRANSFORMACIÓN PARA SECCIONES TRIANGULARES

Se trata del mismo procedimiento descrito para la sección rectangular que consiste en evaluar la fuerza de compresión del hormigón, C_c , y su posición, mediante la ley σ'_c vs ε'_c que se seleccione y el diagrama rectangular equivalente, para luego igualarlas.

La Figura 2.31 muestra una sección triangular en la que las máximas compresiones se producen hacia un vértice, es decir, en la medida en que disminuye el ancho de la sección, aumentan las compresiones. Para estas condiciones se deducen los coeficientes α_{1T} y β_{1T} que permiten transformar el diagrama escogido en el rectangular que le es equivalente.

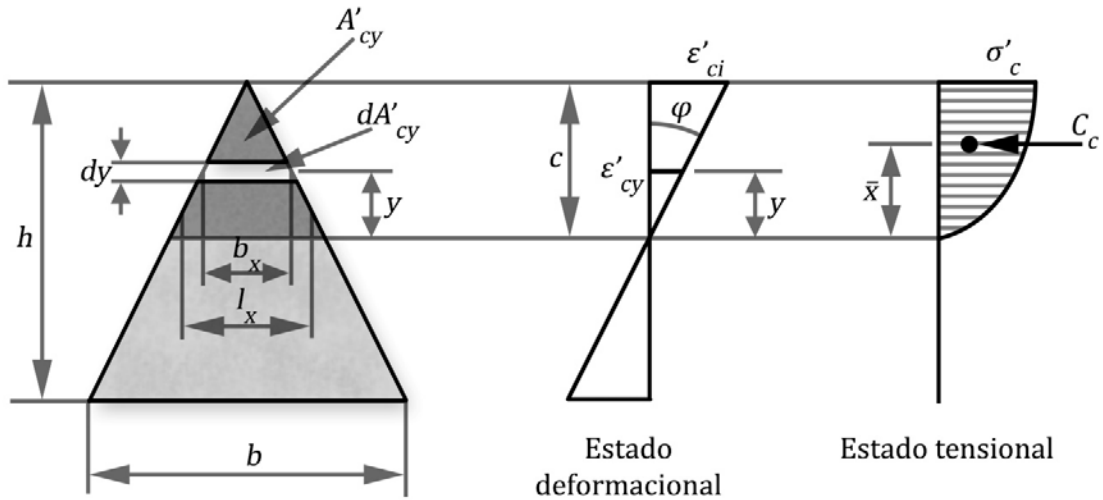


Figura 2.31 Relaciones geométricas en la sección triangular bajo el diagrama genérico.

SOLUCIÓN PARA UN DIAGRAMA TENSO DEFORMACIONAL GENÉRICO

La Figura 2.31 incluye la representación de una ley genérica para expresar la ecuación constitutiva del hormigón, y el diagrama rectangular que le es equivalente. Mientras tanto, si se define $\Delta = b/h$, en la sección transversal triangular que se indica en la Figura 2.32, a partir de la proporcionalidad que se establece en ella a causa de la semejanza de triángulos que puede establecerse, se deduce que:

$$\frac{b_x}{(c-y)} = \frac{b}{h} = \Delta \Rightarrow b_x = \Delta \cdot (c-y)$$

Además, la proporcionalidad que puede escribirse en el estado deformacional conduce a las siguientes razones de semejanza:

$$\tan \varphi = \varphi = \frac{\varepsilon'_{ci}}{c} = \frac{\varepsilon'_{cy}}{y} \Rightarrow \begin{cases} c = \frac{\varepsilon'_{ci}}{\varphi} \\ y = \frac{\varepsilon'_{cy}}{\varphi} \end{cases} \Rightarrow dy = \frac{d\varepsilon'_{cy}}{\varphi}$$

$$\therefore dA'_{cy} = b_x \cdot dy = \Delta \cdot (c-y) \cdot dy = \Delta \cdot \left(\frac{\varepsilon'_{ci}}{\varphi} - \frac{\varepsilon'_{cy}}{\varphi} \right) \cdot \left(\frac{d\varepsilon'_{cy}}{\varphi} \right) = \frac{\Delta}{\varphi^2} (\varepsilon'_{ci} - \varepsilon'_{cy}) \cdot d\varepsilon'_{cy}$$

FUERZA:

$$C_c = \int_0^{\varepsilon'_{ci}} (\sigma'_c) \cdot dA'_{cy} = \frac{\Delta}{\varphi^2} \int_0^{\varepsilon'_{ci}} (\sigma'_c) \cdot (\varepsilon'_{ci} - \varepsilon'_{cy}) \cdot d\varepsilon'_{cy}$$

MOMENTO ESTÁTICO:

$$S = \int_0^{\varepsilon'_{ci}} (\sigma'_c) \cdot y \cdot dA'_{cy} = \int_0^{\varepsilon'_{ci}} (\sigma'_c) \cdot \left(\frac{\varepsilon'_{cy}}{\varphi} \right) \cdot \frac{\Delta}{\varphi^2} (\varepsilon'_{ci} - \varepsilon'_{cy}) \cdot d\varepsilon'_{cy}$$

$$S = \frac{\Delta}{\varphi^3} \int_0^{\varepsilon'_{ci}} (\sigma'_c) \cdot \varepsilon'_{cy} \cdot (\varepsilon'_{ci} - \varepsilon'_{cy}) \cdot d\varepsilon'_{cy}$$

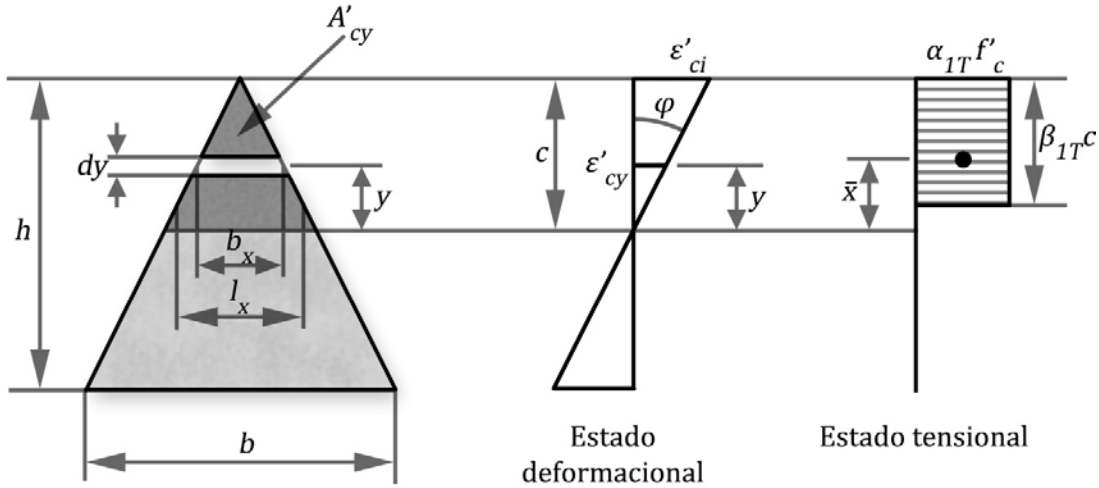


Figura 2.32 Relaciones geométricas en la sección triangular bajo el diagrama de rectangular.

CENTROIDE:

$$\bar{x} = \frac{S}{C_c} = \frac{1}{\varphi} \left[\frac{\int_0^{\varepsilon'_{ci}} (\sigma'_c) \cdot \varepsilon'_{cy} \cdot (\varepsilon'_{ci} - \varepsilon'_{cy}) \cdot d\varepsilon'_{cy}}{\int_0^{\varepsilon'_{ci}} (\sigma'_c) \cdot (\varepsilon'_{ci} - \varepsilon'_{cy}) \cdot d\varepsilon'_{cy}} \right]$$

SOLUCIÓN MEDIANTE EL DIAGRAMA RECTANGULAR EQUIVALENTE

$$\frac{l_x}{\beta_{1T}c} = \frac{b}{h} = \Delta \quad \Rightarrow \quad l_x = \Delta(\beta_{1T}c)$$

$$A'_{cy} = \frac{1}{2}l_x(\beta_{1T}c) = \frac{1}{2}[\Delta(\beta_{1T}c)](\beta_{1T}c) = \frac{\Delta}{2}(\beta_{1T})^2(c)^2 = \frac{\Delta}{2}(\beta_{1T})^2\left(\frac{\varepsilon'_{ci}}{\varphi}\right)^2 = \frac{\Delta}{2\varphi^2}(\beta_{1T} \cdot \varepsilon'_{ci})^2$$

$$\text{FUERZA:} \quad C_c = A'_{cy}(\alpha_{1T}f'_c) = \frac{\Delta}{2\varphi^2}(\alpha_{1T}f'_c)(\beta_{1T}\varepsilon'_{ci})^2$$

$$\text{CENTROIDE:} \quad \bar{x} = c - \frac{2}{3}(\beta_{1T}c) = c\left(1 - \frac{2\beta_{1T}}{3}\right) = \frac{\varepsilon'_{ci}}{\varphi} \cdot \left(1 - \frac{2}{3}\beta_{1T}\right)$$

APLICACIÓN DEL PRINCIPIO RECTOR DEL PROCEDIMIENTO**IGUALDAD DE FUERZAS:**

$$\frac{\Delta}{\varphi^2} \int_0^{\varepsilon'_{ci}} (\sigma'_c) \cdot (\varepsilon'_{ci} - \varepsilon'_{cy}) \cdot d\varepsilon'_{cy} = \frac{\Delta}{2\varphi^2} (\alpha_{1T}f'_c)(\beta_{1T}\varepsilon'_{ci})^2$$

IGUALDAD DE CENTROIDES:

$$\frac{1}{\varphi} \left[\frac{\int_0^{\varepsilon'_{ci}} (\sigma'_c) \cdot \varepsilon'_{cy} \cdot (\varepsilon'_{ci} - \varepsilon'_{cy}) \cdot d\varepsilon'_{cy}}{\int_0^{\varepsilon'_{ci}} (\sigma'_c) \cdot (\varepsilon'_{ci} - \varepsilon'_{cy}) \cdot d\varepsilon'_{cy}} \right] = \frac{\varepsilon'_{ci}}{\varphi} \cdot \left(1 - \frac{2}{3}\beta_{1T}\right)$$

La Tabla 2.12 ofrece las ecuaciones de los coeficientes α_{1T} y β_{1T} para el caso particular de **secciones triangulares** en las que las compresiones aumentan con la disminución del ancho de la sección, y para las leyes más frecuentes que se utilizan en la modelación del hormigón durante el estudio del comportamiento de secciones reforzadas con acero.

TABLA 2.12 Expresiones de α_{1T} y β_{1T} para secciones triangulares

DIAGRAMA $k_3 = 1.00$ y $\varepsilon_o = 0.002$		α_{1T}	β_{1T}
COLLINS (PARABOLICO)		$2\Omega \left[\frac{1 - 0.25\Omega}{3(\beta_{1T})^2} \right]$	$0.75 \left[\frac{(1 - 0.2\Omega)}{(1 - 0.25\Omega)} \right]$
HOGNESTAD	$\varepsilon'_c < 0.002$	$2\Omega \left[\frac{1 - 0.25\Omega}{3(\beta_{1T})^2} \right]$	$0.75 \left[\frac{(1 - 0.2\Omega)}{(1 - 0.25\Omega)} \right]$
	$\varepsilon'_c \geq 0.002$	$\frac{(69\Omega^2 - 3\Omega^3 - 49\Omega + 13)}{60\Omega^2(\beta_{1T})^2}$	$\frac{3}{2} \left[1 - \frac{23\Omega^3 - 1.5\Omega^4 - 13\Omega + 5.5}{69\Omega^3 - 3\Omega^4 - 49\Omega^2 + 13\Omega} \right]$
RÜSCH	$\varepsilon'_c < 0.002$	$2\Omega \left[\frac{1 - 0.25\Omega}{3(\beta_{1T})^2} \right]$	$0.75 \left[\frac{(1 - 0.2\Omega)}{(1 - 0.25\Omega)} \right]$
	$\varepsilon'_c \geq 0.002$	$\frac{(6\Omega^2 - 4\Omega + 1)}{6\Omega^2(\beta_{1T})^2}$	$\frac{3}{2} \left[1 - \frac{2\Omega^3 - \Omega + 0.4}{\Omega(6\Omega^2 - 4\Omega + 1)} \right]$

2.7.2.3 TRATAMIENTO DE LA SECCIÓN T Ó I MEDIANTE EL DIAGRAMA RECTANGULAR EQUIVALENTE

Las secciones T son ampliamente empleadas por sus grandes ventajas para mejorar la resistencia a flexión. Si se desea deducir la curva de comportamiento de este tipo de sección utilizando el **diagrama**

rectangular equivalente, es preciso distinguir para cada deformación ε'_c que se fije en la fibra de máxima compresión, las dos situaciones siguientes:

- Si la altura del bloque de compresiones es menor que el espesor del ala de la sección, es decir, si $\beta_{1(1)}c_1 \leq h_f$, el tratamiento es el mismo que se estudiara para las secciones rectangulares, solo que se debe considerar como ancho de la sección, el del ala comprimida, es decir, $b = b_e$.
- Si la altura del bloque de compresiones es mayor que el espesor del ala de la sección, es decir, si $\beta_{1(1)}c_1 > h_f$, es conveniente recurrir al principio de superposición mediante el cual el área comprimida en la sección original se descompone en regiones rectangulares elementales. La Figura 2.33 ilustra este principio.

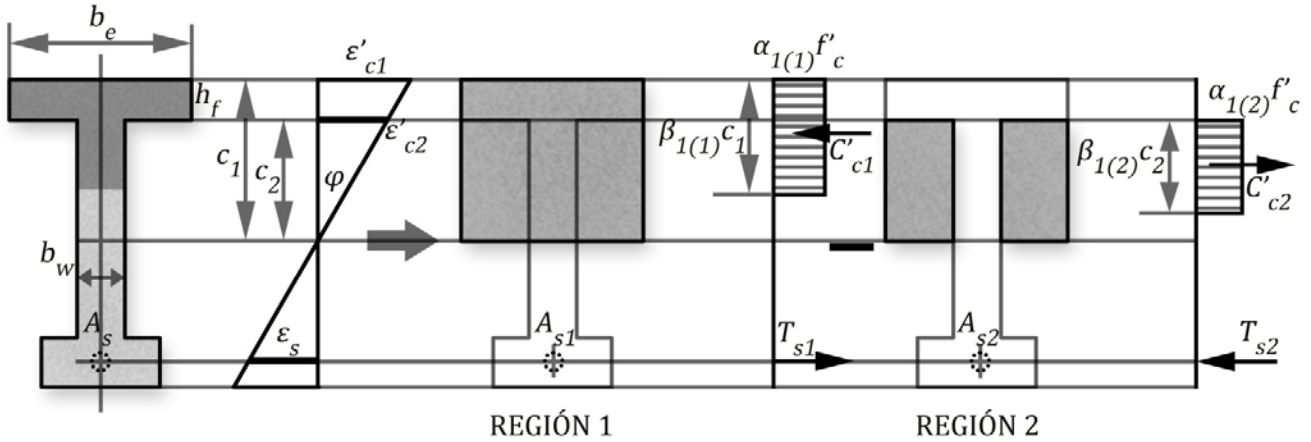


Figura 2.33 División de la sección T en regiones rectangulares elementales.

En este último caso la descomposición consiste en restar a la contribución del rectángulo virtual de dimensiones $(b_e; c_1)$, la del otro rectángulo de dimensiones $[(b_e - b_w); (c_1 - h_f)]$ ya que este en realidad no existe. Obsérvese que a la fibra más comprimida del primer rectángulo corresponde la deformación ε'_{c1} , mientras que a la del segundo la deformación ε'_{c2} . Sin embargo, para garantizar la planeidad de la sección al deformarse, entre ambas deformaciones debe existir la siguiente relación de dependencia:

$$\text{Como } \tan \varphi = \varphi = \frac{\varepsilon'_{c1}}{c_1} = \frac{\varepsilon'_{c2}}{c_1 - h_f} \quad \Rightarrow \quad \varepsilon'_{c2} = \frac{c_1 - h_f}{c_1} \varepsilon'_{c1}$$

Puesto que las dos regiones en que ha quedado separada el área comprimida de la sección son rectangulares, se adoptan los coeficientes de transformación α_1 y β_1 correspondientes a esta tipología de sección, y para estimar la contribución en fuerza y momento de ambas regiones se procede de la manera siguiente:

COEFICIENTES DE TRANSFORMACIÓN:

REGIÓN 1: Para $\varepsilon'_{ci} = \varepsilon'_{c1} : [\alpha_{1(1)}; \beta_{1(1)}]$

REGIÓN 2: Para $\varepsilon'_{ci} = \varepsilon'_{c2} = \frac{c_1 - h_f}{c_1} \varepsilon'_{c1} : [\alpha_{1(2)}; \beta_{1(2)}]$

FUERZA:

REGIÓN 1: $C_{c1} = [\alpha_{1(1)} f'_c] [\beta_{1(1)} c_1] b_e$

$$\text{REGIÓN 2: } C_{c2} = [\alpha_{1(2)}f'_c][\beta_{1(2)}(c_1 - h_f)](b_e - b_w)$$

$$\sum F_x = 0 \Rightarrow [\alpha_{1(1)}f'_c][\beta_{1(1)}c_1]b_e - [\alpha_{1(2)}f'_c][\beta_{1(2)}(c_1 - h_f)](b_e - b_w) - A_s f_s = 0$$

MOMENTO:

$$\text{REGIÓN 1: } C_{c1} \cdot \left[d - \frac{\beta_{1(1)}c_1}{2} \right] = [\alpha_{1(1)}f'_c][\beta_{1(1)}c_1]b_e \cdot \left[d - \frac{\beta_{1(1)}c_1}{2} \right]$$

$$\text{REGIÓN 2: } C_{c2} \cdot \left[d - h_f - \frac{\beta_{1(2)}c_1}{2} \right] = [\alpha_{1(2)}f'_c][\beta_{1(2)}(c_1 - h_f)](b_e - b_w) \cdot \left[d - h_f - \frac{\beta_{1(2)}c_1}{2} \right]$$

$$\sum M = 0 \Rightarrow$$

$$M = [\alpha_{1(1)}f'_c][\beta_{1(1)}c_1]b_e \cdot \left[d - \frac{\beta_{1(1)}c_1}{2} \right] - [\alpha_{1(2)}f'_c][\beta_{1(2)}(c_1 - h_f)](b_e - b_w) \cdot \left[d - h_f - \frac{\beta_{1(2)}c_1}{2} \right]$$

Para cada deformación ε'_{c1} que se fije, a la incertidumbre acerca de la tensión de las armaduras en tracción y compresión, si existiese, se adiciona la incertidumbre asociada a la forma de trabajo de la sección, es decir, si el bloque de compresiones se aloja solamente en el ala, o llega a involucrar también al alma. Por eso se trata de un proceso de prueba y error que consiste en suponer para cada deformación que se fije, por ejemplo:

- ◆ Que las armaduras fluyen y el área comprimida es rectangular,
- ◆ Que las armaduras fluyen y el área comprimida incluye parcialmente al alma de la sección,
- ◆ Que la armadura en compresión no fluye mientras sí la de tracción, y el área comprimida es rectangular,
- ◆ Que la armadura en compresión fluye mientras la de tracción no alcanza la tensión de fluencia, y el área comprimida incluye parcialmente al alma de la sección, etc.

Bajo cualquiera de estos presupuestos se obtiene el valor de c_1 en la ecuación de equilibrio de fuerza, se verifican los mismos, y si estos se satisfacen se acepta el valor de c_1 calculado, entonces se pasa a determinar el momento flector de la condición de equilibrio de momento, y la curvatura como $\varphi = \varepsilon'_{c1}/c_1$. Si sólo uno de los presupuestos fijados no se cumpliera se desconoce el valor de c_1 calculado y se establecen nuevos, repitiendo el procedimiento descrito hasta tanto las hipótesis que se fijen en la iteración se satisfagan todas.

2.7.2.4 TRATAMIENTO DE LA SECCIÓN TRAPEZOIDAL MEDIANTE EL DIAGRAMA RECTANGULAR

Empleadas sobre todo en viguetas de pequeña sección para cubiertas y entresijos de viviendas, las secciones trapezoidales se caracterizan por sus ventajas constructivas en Plantas de elementos prefabricados dentro de las cuales se industrializan los procesos de producción. Bajo la misma lógica de las secciones **T**, en este caso se divide la región comprimida en un bloque rectangular y uno triangular de compresiones, como muestra la Figura 2.34.

$$\begin{cases} \Delta = \frac{b - b'}{h} \\ \Delta = \frac{b - b_x}{c} \end{cases} \Rightarrow b_x = (b - \Delta c)$$

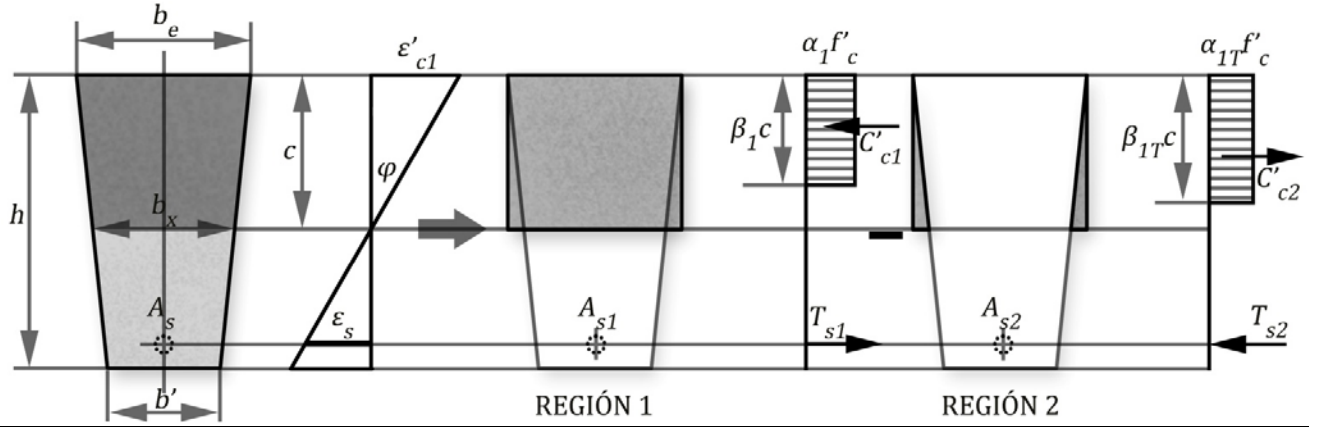


Figura 2.34 División de la sección trapezoidal en regiones elementales (rectángulo-triángulo).

COEFICIENTES DE TRANSFORMACIÓN:

REGIÓN 1 (Rectángulo): Para $\varepsilon'_{ci} : [\alpha_1 ; \beta_1]$

REGIÓN 2 (Triángulo): Para $\varepsilon'_{ci} : [\alpha_{1T} ; \beta_{1T}]$

FUERZA:

REGIÓN 1: $C_{c1} = (\alpha_1 f'_c)(\beta_1 c)b$

REGIÓN 2: $C_{c2} = \frac{\Delta}{2\phi^2} (\alpha_{1T} f'_c)(\beta_{1T} \varepsilon'_{ci})^2 = \frac{\Delta}{2} (\alpha_{1T} f'_c)(\beta_{1T} c)^2$

$$\sum F_x = 0 \Rightarrow (\alpha_1 f'_c)(\beta_1 c)b - \frac{\Delta}{2} (\alpha_{1T} f'_c)(\beta_{1T} c)^2 - A_s f_s = 0$$

MOMENTO:

REGIÓN 1: $C_{c1} \cdot \left[d - \frac{\beta_1 c}{2} \right] = (\alpha_1 f'_c)(\beta_1 c)b \cdot \left[d - \frac{\beta_1 c}{2} \right]$

REGIÓN 2: $C_{c2} \cdot c - \frac{2}{3} (\beta_{1T} c) = \frac{\Delta}{2} (\alpha_{1T} f'_c)(\beta_{1T} c)^2 \cdot \left[d - \frac{2}{3} (\beta_{1T} c) \right]$

$$\sum M = 0 \Rightarrow M = (\alpha_1 f'_c)(\beta_1 c)b \cdot \left[d - \frac{\beta_1 c}{2} \right] - \frac{\Delta}{2} (\alpha_{1T} f'_c)(\beta_{1T} c)^2 \cdot \left[d - \frac{2}{3} (\beta_{1T} c) \right]$$

2.7.3 CURVAS DE COMPORTAMIENTO DE SECCIONES DE HORMIGÓN ARMADO

La Figura 2.35 ilustra una sección sometida a flexión incluyendo su estado deformado girado, la distribución de las tensiones normales que aparecen en el hormigón comprimido y traccionado, lo mismo que en el acero, y la distribución de las fuerzas en ambos materiales. Procurando mayor generalización se ha incluido también en el análisis la contribución a tracción del hormigón en la altura traccionada x , en la que aun no se ha sobrepasado la máxima deformación a este esfuerzo, es decir, $\varepsilon_{cmax} = 10^{-4}$

La proporcionalidad deducida en el estado deformacional i -ésimo permite plantear la siguiente relación entre x_i y c_i :

$$\frac{\varepsilon'_{ci}}{c_i} = \frac{\varepsilon_{cmax}}{x_i} \Rightarrow x_i = \frac{10^{-4}}{\varepsilon'_{ci}} c_i$$

Adaptando a este estudio el procedimiento general que se explicara en § 2.4, se propone seguir la siguiente metodología en cada iteración que se realice:

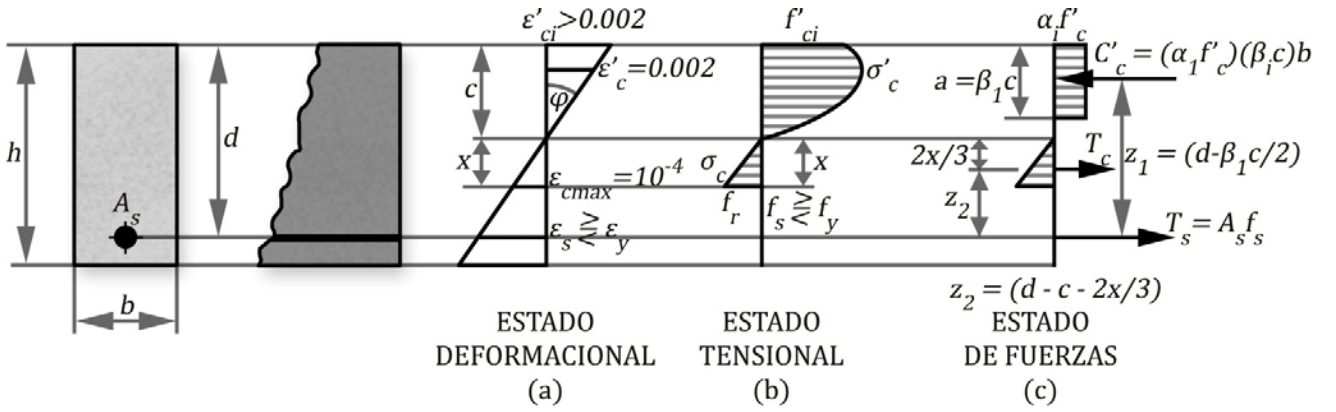


Figura 2.35 Estados deformacional, tensional y de fuerza para $\varepsilon'_{ci} > 0.002$.

Iteración i -ésima:

Paso 1: Fijar en la fibra más comprimida del hormigón (fibra superior si el momento actuante es positivo) una deformación ε'_{ci} comprendida entre el valor teórico máximo y valores muy pequeños, próximos a cero, y determinar los coeficientes α_{1i} y β_{1i} que le corresponden según sea la ley constitutiva que se adopte para el hormigón, es decir:

$$(0.0001 \leq \varepsilon'_{ci} \leq 0.004) \Rightarrow \alpha_{1i} \text{ y } \beta_{1i}$$

Paso 2: Obtener la posición de la línea neutra (c_i) a partir de la condición de equilibrio de fuerza a nivel de sección, y de las ecuaciones de compatibilidad de las deformaciones. La complejidad de la solución analítica dentro de este paso radica en la definición de la tensión de trabajo de la armadura. En efecto, la ecuación de equilibrio de fuerza, si se considera la contribución del hormigón a tracción y además $A'_s = 0$, resulta ser:

$$\begin{aligned} \sum \text{Fuerzas} = 0 &\Rightarrow C_{ci} - T_{ci} - T_{si} = 0 \\ (\alpha_{1i} f'_c)(\beta_{1i} c_i)b - \frac{1}{2} f_r b x_i - A_s f_{si} &= 0 \\ \therefore (\alpha_{1i} \beta_{1i}) f'_c b c_i - \frac{1}{2} f_r b \left(\frac{10^{-4}}{\varepsilon'_{ci}} \right) c_i - A_s f_{si} &= 0 \end{aligned}$$

Obsérvese que la determinación de la posición de la línea neutra no puede obtenerse directamente pues depende de la tensión de la armadura (f_{si}), y esta a su vez de la deformación que alcance el acero (ε_{si}), que también depende de c_i , si sucediera que la armadura no entra en fluencia.

En consecuencia, el procedimiento que se propone consiste en considerar que para la deformación ε'_{ci} que se fije, el acero llega a fluir, es decir, $f_{si} = f_y$, sobre todo para aquellas iteraciones a las que corresponden valores de ε'_{ci} próximas a la máxima, de manera que c_i puede determinarse directamente mediante la expresión:

$$c_i = \frac{A_s f_y}{(\alpha_{1i} \beta_{1i}) f'_c b - \frac{1}{2} f_r b \left(\frac{10^{-4}}{\varepsilon'_{ci}} \right)}$$

Calculada c_i se recurre a la ecuación de compatibilidad de las deformaciones y se verifica si, en efecto, la armadura entra en fluencia:

Si $\left(\varepsilon_{si} = \frac{d-c_i}{c_i} \varepsilon'_{ci} \geq \varepsilon_y\right)$ el valor de c_i calculado se acepta y se continúa con el siguiente paso.

Si $\left(\varepsilon_{si} = \frac{d-c_i}{c_i} \varepsilon'_{ci} < \varepsilon_y\right)$ el valor de c_i calculado se rechaza y se reevalúa mediante la expresión:

$$\therefore (\alpha_{1i}\beta_{1i})f'_c b c_i - \frac{1}{2} f_r b \left(\frac{10^{-4}}{\varepsilon'_{ci}}\right) c_i - A_s E_s \varepsilon_{si} = 0$$

O sea:

$$(\alpha_{1i}\beta_{1i})f'_c b c_i - \frac{1}{2} f_r b \left(\frac{10^{-4}}{\varepsilon'_{ci}}\right) c_i - A_s E_s \frac{d-c_i}{c_i} \varepsilon'_{ci} = 0$$

Que se convierte en:

$$b \left[(\alpha_{1i}\beta_{1i})f'_c - \frac{(5 \cdot 10^{-5})f_r}{\varepsilon'_{ci}} \right] c_i^2 + (A_s E_s \varepsilon'_{ci}) c_i - (A_s E_s d) \varepsilon'_{ci} = 0$$

De las dos soluciones que se obtienen al resolver la ecuación anterior, sólo una tendrá sentido físico.

Paso 3: Calculado el valor de c_i se determina el momento flector M_i recurriendo a la ecuación de equilibrio de momento.

$$\sum \text{Momento} = 0 \Rightarrow M_i - C_{ci} z_{1i} - T_{ci} z_{2i} = 0 \quad (\text{Tomando momento respecto al centroide de la armadura en tracción})$$

$$M_i = (\alpha_{1i}\beta_{1i})f'_c b c_i \left(d - \frac{1}{2} \beta_{1i} c_i\right) - \frac{1}{2} f_r b x_i \left(d - c_i - \frac{2}{3} x_i\right)$$

$$\therefore M_i = (\alpha_{1i}\beta_{1i})f'_c b c_i \left(d - \frac{1}{2} \beta_{1i} c_i\right) - \frac{1}{2} f_r b \left(\frac{10^{-4}}{\varepsilon'_{ci}}\right) c_i \left[d - c_i - \frac{2}{3} \left(\frac{10^{-4}}{\varepsilon'_{ci}}\right) c_i\right]$$

Paso 4: Calcular el ángulo de giro φ_i .

$$\varphi_i = \varepsilon'_{ci} / c_i$$

Ejercicio 2,7

Definir el comportamiento bajo cargas de corta duración de la sección de hormigón armado indicada en la Figura 2.24(b), reforzada hacia la zona traccionada con 4 barras No. 25 que representa un área total de acero igual a $A_s = 2040 \text{ mm}^2$. Ignorar durante este estudio la presencia del refuerzo que aparece hacia la zona comprimida de la sección, y realizar el estudio para las siguientes dos condiciones:

- Reconociendo la contribución del hormigón a tracción en la altura traccionada de la sección, si se fija como máxima deformación a tracción de este material $\varepsilon_{cmax} = 10^{-4}$.
- Despreciando la contribución del hormigón en toda la altura traccionada.

Cálculos y Discusión para el caso en que se incluye la contribución a tracción del hormigón

Se seguirá la metodología explicada anteriormente para diferentes deformaciones a nivel de la fibra más comprimida de la sección, aceptando los siguientes datos (Ver Figura 2.24):

$$b = 300 \text{ mm} \quad h = 600 \text{ mm} \quad d_s = 60 \text{ mm} \quad d = h - d_s = 540 \text{ mm}$$

$$f'_c = 30 \text{ MPa} \quad f_r = 0.62 \sqrt{f'_c} = 3.4 \text{ MPa} \quad \varepsilon_o = 0.002 \quad (\text{carga de corta duración})$$

$$f_y = 300 \text{ MPa} \quad E_s = 2 \cdot 10^5 \text{ MPa} \quad \varepsilon_y = f_y/E_s = 0.0015$$

Sólo a manera de ilustración se expondrán los cálculos para una iteración, precisamente la octava ($i = 8$) de la Tabla 2.13 que resume los resultados de este ejemplo en el que llegaron a realizarse 11 iteraciones.

TABLA 2.13 Ordenadas de puntos (φ_i, M_i) para construir las curvas de comportamiento de la sección de hormigón armado cuando se considera la contribución a tracción del hormigón.

	ε'_{ci}	$\Omega = \frac{\varepsilon'_{ci}}{\varepsilon_o}$	α_{1i}	β_{1i}	c_i (cm)	x (cm)	ε_{si}	f_{si} (MPa)	z_{1i} (cm)	M_i (kN.m)	$\varphi_i \cdot 10^{-4}$ (rad/cm)
1	0.0040	2.00	0.6667	1.0000	10,222	0,256	0,0173	300	48,89	299,27	3,913
2	0.0035	1.75	0.8102	0.9000	9,346	0,267	0,0167	300	49,79	304,81	3,745
3	0.0030	1.50	0.9000	0.8333	9,09	0,303	0,0148	300	50,21	307,39	3,30
4	0.0025	1.25	0.9280	0.7857	9,335	0,374	0,0193	300	50,33	308,10	2,672
5	0.002	1,00	0,889	0,700	10,24	0,512	0,0085	300	50,16	307,15	1,952
6	0.0015	0.75	0.7788	0.7222	12,171	0,811	0,0052	300	49,61	303,93	1,232
7	0.0010	0.50	0.5952	0.7000	16,55	1,655	0,0022	300	48,21	296,04	0,604
8	0.0008	0.40	0.5007	0.6923	19,6		0.0014	Como $\varepsilon_{si} < \varepsilon_y$ la armadura no fluye y el valor de c_i que se calculara bajo ese presupuesto se rechaza.			
	0.00084	0.417	0.5182	0.6936	19,29	2,310	0.0015	300	47,31	291,21	0,433
	0.0008	0.40	0.5007	0.6923	19,26	2,408	0.0014	288	47,33	280,38	0.415
9	0.0005	0.25	0.3361	0.6818	19,06	3,813	0.0009	184	47,50	180.49	0.262
10	0.0003	0.15	0.2110	0.6754	19,487	6,496	0.0005	106	47,42	108.51	0.154
11	0.0002	0.10	0.1438	0.6724	20,943	10,47	0.0003	64	46,95	71,635	0.095
12	0.00012	0.05	0.0734	0.6695	32,604	27,35	0.0001	16,4	43,08	69,429	0,037
13	0.0000	0.00	0.000	0.0000	0.0000		0.0000	0.0000	0,00	0.000	0.0000

METODOLOGÍA APLICADA A LA OCTAVA ITERACIÓN

Paso 1: Fijar $\varepsilon'_{c8} = 0.0008$

A esta deformación corresponden los siguientes valores de α_{1i} y β_{1i} (Ver Tabla 2.1 para el diagrama parabólico):

$$\Omega = \varepsilon'_{ci}/\varepsilon_o = 0.0008/0.002 = 0.40 \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} \alpha_{1(7)} = \frac{6[1-\Omega/3]^2}{4/\Omega-1} = \frac{6[1-\frac{0.4}{3}]^2}{\frac{4}{0.4}-1} = 0.5007 \\ \beta_{1(7)} = \frac{4-\Omega}{6-2\Omega} = \frac{4-0.4}{6-2(0.4)} = 0.6923 \end{cases}$$

Paso 2: Obtener la posición de la línea neutra (c_8)

Si se supone que para esta deformación la armadura fluye ($f_{s8} = f_y = 300 \text{ MPa}$), entonces:

$$\begin{aligned}
c_8 &= \frac{A_s f_y}{[\alpha_{1(8)} \beta_{1(8)}] f'_c b - \frac{1}{2} f_r \left(\frac{10^{-4}}{\varepsilon'_{c8}} \right)} \\
&= \frac{(2040 \text{ mm}^2)(300 \text{ MPa})}{(0.5007)(0.6923)(30 \text{ MPa})(300 \text{ mm}) - \frac{1}{2} \frac{0.0001(3.4 \text{ MPa})}{0.0008}} = 196 \text{ mm} \\
&= 0.196 \text{ m}
\end{aligned}$$

Este valor se acepta sólo si se demuestra que para él la armadura llega a fluir, y para verificarlo se recurre a la ecuación de compatibilidad de las deformaciones:

$$\begin{aligned}
\varepsilon_{s8} &= \frac{d - c_8}{c_8} (\varepsilon'_{c8}) = \frac{0.540 \text{ m} - 0.196 \text{ m}}{0.196 \text{ m}} (0.0008) = 0.0014 < \varepsilon_y \\
&\Rightarrow \text{La armadura no fluye}
\end{aligned}$$

Como para el valor de c_8 calculado en realidad el acero no entre en fluencia, se exige reevaluar su valor, considerando que en realidad la tensión de la armadura es inferior a la de fluencia, lo que obliga a resolver la ecuación de segundo grado que ya se indicara:

$$\left[[\alpha_{1(8)} \beta_{1(8)}] f'_c b - \frac{(5 \cdot 10^{-5}) f_r}{\varepsilon'_{ci}} \right] c_8^2 + (A_s E_s \varepsilon'_{c8}) c_8 - (A_s E_s d \varepsilon'_{c8}) = 0$$

Sustituyendo los datos que se ofrecieron y los valores de $\alpha_{1(8)}$ y $\beta_{1(8)}$ calculados se llega a la ecuación de 2do grado:

$$3119.5(c_8)^2 + 326\,400(c_8) - 176\,256\,000 = 0$$

Cuyas soluciones son:

$$c_{8(1)} = 1926 \text{ mm} = \mathbf{0.1926 \text{ m}} \quad \text{y} \quad c_{8(2)} = -296 \text{ mm} = \mathbf{-0.296 \text{ m}}$$

El signo negativo de la segunda solución indica que la línea neutra se ubica fuera de la sección y por encima de la fibra más comprimida, lo que resulta inaceptable. La primera corresponde a un valor que se sitúa entre la fibra más comprimida y el centroide de la armadura en tracción, es decir, $c_{8(1)} < d$ ($0.1926 \text{ m} < 0.54 \text{ m}$), que es condición de la flexión pura y de la flexión simple. En consecuencia, de las dos soluciones sólo la primera posee sentido físico, por tanto:

$$\begin{aligned}
\varepsilon_{s8} &= \frac{0.540 \text{ m} - 0.1926 \text{ m}}{0.1926 \text{ m}} (0.0008) = 0.00144 \\
&< \varepsilon_y \quad (\text{Reafirmando que la armadura no fluye})
\end{aligned}$$

$$f_{s8} = E_s \cdot \varepsilon_{s8} = (2 \cdot 10^5 \text{ MPa})(0.00144) = 288 \text{ MPa} < 300 \text{ MPa}$$

Paso 3: Determinar el momento flector M_i recurriendo a la ecuación de equilibrio de momento

$$\begin{aligned}
M_8 &= (0.5007)(0.6923)(30 \text{ MPa})(300 \text{ mm})(1926 \text{ mm}) \left[540 \text{ mm} - \frac{1}{2} (0.6923)(1926 \text{ mm}) \right] \\
&\quad - \frac{1}{2} (3.4 \text{ MPa}) \left(\frac{10^{-4}}{0.0008} \right) (1926 \text{ mm}) \left[540 \text{ mm} - 1926 \text{ mm} - \frac{2}{3} \left(\frac{10^{-4}}{0.0008} \right) (1926 \text{ mm}) \right] \\
&= \mathbf{280\,379\,125 \text{ N} \cdot \text{mm}}
\end{aligned}$$

$$\therefore M_7 \cong \mathbf{280.38 \text{ kN} \cdot \text{m}}$$

Paso 4: Calcular el ángulo de giro φ_i .

$$\varphi_i = 0.0008 / 19.26 \text{ cm} \cong \mathbf{0.415 \cdot 10^{-4} \text{ rad/cm}}$$

Cálculos y Discusión para el caso en que se desprecia la contribución a tracción del hormigón

Con el interés de analizar cuánto significa la contribución del hormigón a tracción en el caso de la flexión, se resuelve el mismo ejemplo anterior despreciando tal contribución, y para ello es suficiente fijar $f_r = 0$ en el mismo modelo que se siguiera en el Ejercicio 2,7.

La Tabla 2.14 resume los resultados para este análisis. Como la contribución a tracción, de ser significativa lo fuera sólo para niveles bajo de la carga exterior, es decir, para deformaciones muy pequeñas, se decidió incrementar las cifras significativas después de la unidad para tales deformaciones en ambas valoraciones, procurando descubrir la influencia de dicha contribución.

TABLA 2.14 Ordenadas de puntos (φ_i, M_i) para construir las curvas de comportamiento de la sección de hormigón armado cuando se desprecia la contribución a tracción del hormigón.

ε'_{ci}	$\Omega = \varepsilon'_{ci}/\varepsilon_o$	α_{1i}	β_{1i}	c_i (cm)	ε_{si}	f_{si} (MPa)	z_{1i} (cm)	M_i (kN.m)	$\varphi_i \cdot 10^{-4}$ (rad/cm)
0.0040	2.00	0.6667	1.0000	10.2	0.01718	300	48.9	299.3	3.92
0.0035	1.75	0.8102	0.9000	9.3	0.01677	300	49.8	304.8	3.75
0.0030	1.50	0.9000	0.8333	9.1	0.01487	300	50.2	307.4	3.31
0.0025	1.25	0.9280	0.7857	9.3	0.01198	300	50.3	308.1	2.68
0.0015	0.75	0.7788	0.7222	12.1	0.00520	300	49.6	303.8	1.24
0.0010	0.50	0.5952	0.7000	16.3	0.00231	300	48.3	295.5	0.61
0.0008	0.40	0.5007	0.6923	19.6	0.00140	Como $\varepsilon_{si} < \varepsilon_y$ la armadura no fluye y el valor de c_i que se calculara bajo ese presupuesto hay que rechazarlo.			
0,000822	0,411	0,5117	0,6931	19,14	0,0015	300	47,37	289,38	0,43
0.0008	0.40	0.5007	0.6923	19.1	0.00146	292.2	47.39	282.4737	0.4187
0.0005	0.25	0.3361	0.6818	18.7	0.00094	188.9	47.63	183.5901	0.2675
0.0003	0.15	0.2110	0.6754	18.4	0.00058	115.8	47.78	112.9039	0.1628
0.0002	0.10	0.1438	0.6724	18.3	0.00039	78.0	47.85	76.1742	0.1093
0.0001	0.05	0.0734	0.6695	18.2	0.00020	39.4	47.92	38.5361	0.0550
0.0000	0.00	0.000	0.0000	0.00000	0.00000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000

En la Figura 2.36 se representa el comportamiento (M_i vs φ_i) para ambas situaciones.

CONCLUSIONES DERIVADAS DEL COMPORTAMIENTO DE LA SECCIÓN ANALIZADA.

- Para cargas relativamente pequeñas, antes de que el acero fluya, la curva de comportamiento tiene una respuesta aproximadamente lineal, lo que refleja la “cuasi” linealidad del segmento (\overline{OB}), lo mismo si se ignora que si se incluye en el análisis la contribución a tracción del hormigón.
- En flexión, la contribución del hormigón a tracción es imperceptible, para cargas superiores al Momento de fisuración, como se destaca en la Figura 2.38. Por eso los reglamentos reconocen como hipótesis para las solicitaciones normales, **despreciar la contribución del hormigón a tracción.**

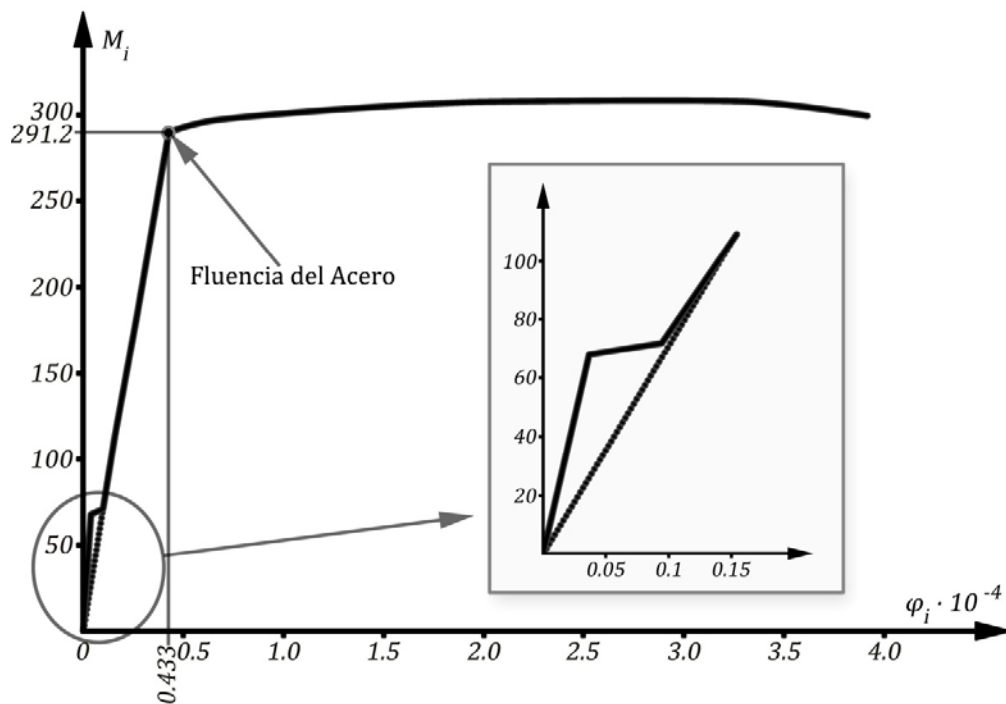


Figura: 2.36 Curvas de comportamiento (M_i vs ϕ_i) de la sección de hormigón armado considerando e ignorando la contribución a tracción del hormigón.

- c) La diferencia en el comportamiento de la sección al considerar el aporte del hormigón a tracción es notable solo en la zona cercana al Momento de Fisuración, obsérvese en el detalle ampliado que se incluye en la Figura 2.38. Por tanto en secciones de hormigón armado donde esta etapa es importante debe evaluarse el comportamiento considerando el aporte de su capacidad a tracción.
- d) Puede notarse que el brazo del par interno de fuerzas (z_{1i}) permanece prácticamente constante para todo el rango de cargas. Esto justifica que algunos autores propongan fórmulas simplificadas en que consideran $z_{1i} = k \cdot h$, con un valor de $k \approx (0.85 \div 0.90)$ constante.
- e) El incremento de momento antes de que el acero fluya se debe fundamentalmente al incremento de las fuerzas $C_{ci} = T_{si}$ ya que $M_i = C_{ci} \cdot z_{1i} = T_{si} \cdot z_{1i}$, expresión en la que z_{1i} permanece casi constante.
- f) Después que el acero fluye, se observa que el incremento de momento es muy pequeño de modo que en forma aproximada la capacidad nominal de la sección M_n es la que corresponde a una deformación ϵ'_{ci} comprendida entre 0,002 y 0,0034. **Esto justifica que algunas normas aceptan como deformación máxima del hormigón el valor de 0,003 (ACI) y otras el valor de 0,0035 (EHE).**
- g) La sección que ha sido analizada, en la que el acero alcanza la fluencia, refleja un comportamiento mediante el cual a momento “cuasi” constante, el giro de la sección se incrementa apreciablemente a partir del instante en que el acero comienza a fluir. Cuando esto ocurre se dice que **la sección tiene un fallo tipo dúctil o hipo reforzado** como se le llamó en una época. Se confirma en estos casos que **el momento flector que agota la sección es aquel que origina la fluencia del acero**, pues a partir de ese instante se hace prácticamente invariable, lo que algunos autores llaman

“constancia del momento o momento tope”. En otras secciones donde la cantidad de refuerzo es más elevada, el fallo ocurre antes de que el acero fluya, es decir, de forma frágil o súbita, indeseable para el diseño. Las normas no admiten diseños frágiles en flexión por las consecuencias que traerían.

- h) La altura de la zona comprimida ($a = \beta_{1i} \cdot c_i$) sufre una variación pequeña, primero crece y después decrece, para volver luego a incrementar. Un aspecto interesante es que el valor de c_i es menor que la mitad del peralte efectivo d , o sea que la zona traccionada es siempre mucho mayor que la zona comprimida. En otras palabras, la zona efectiva de trabajo en un elemento en flexión es muy pequeña por lo que utilizar calidades muy altas del hormigón no es lo más económico debido a que no es demandada eficientemente.

2.7.4. COMPARACIÓN PARA DIFERENTES DIAGRAMAS TENSO DEFORMACIONALES DEL HORMIGÓN

Una comparación más detallada de la respuesta de cada función puede lograrse si se evalúan para cada caso los coeficientes α_1 y β_1 donde (ver figura 2,37):

- Las funciones de Hognestad, Rüsch, Kabaila y Desayi-Krishman son prácticamente iguales por lo que se escoge la más conveniente al calculista, esto se hace más notable para los valores más comunes de deformaciones del hormigón.
- La parábola pierde efectividad para $\Omega > 1,5$ donde se subestima el aporte del bloque comprimido.

Esto se hace notable si se considera que $\epsilon'_{cu} = 0.003$ (ACI) y $\epsilon'_{cu} = 0.0035$ (CEB).

- Nótese que el diagrama de Rüsch se va por encima del resto de los valores para $\Omega = 2$. Esta simplificación no toma en cuenta la caída de f'_c para valores de $\epsilon'_c > \epsilon_o$.

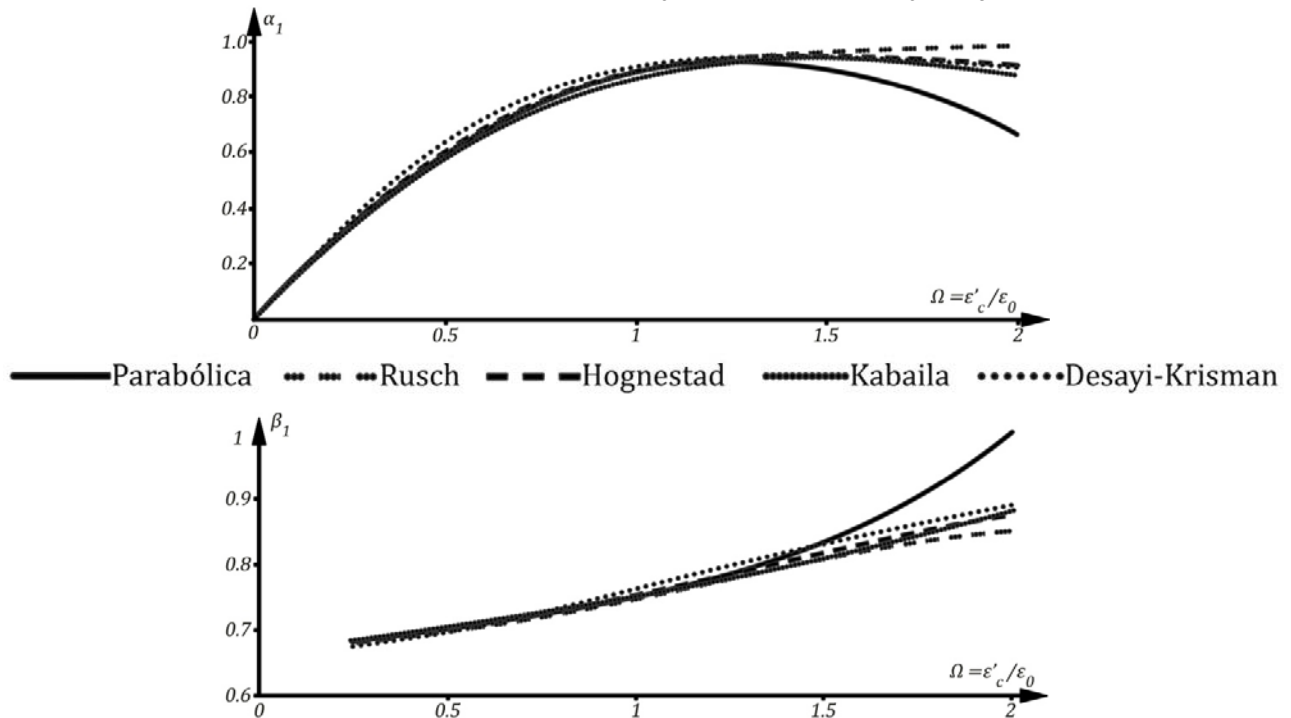


Figura 2,37: Comparación de diagramas de hormigón. Coeficientes α_1 y β_1

Otro enfoque que permite comparar la influencia de los diferentes Diagramas es obteniendo las curvas M vs φ para una sección dada. Tomando como ejemplo los datos del **Ejercicio 2.7** se muestran a continuación los resultados para los Diagramas de Hognestad, Rüsçh y Lineal, donde en las tablas 2,15 y en la figura 2,38 se confirman las conclusiones obtenidas anteriormente.

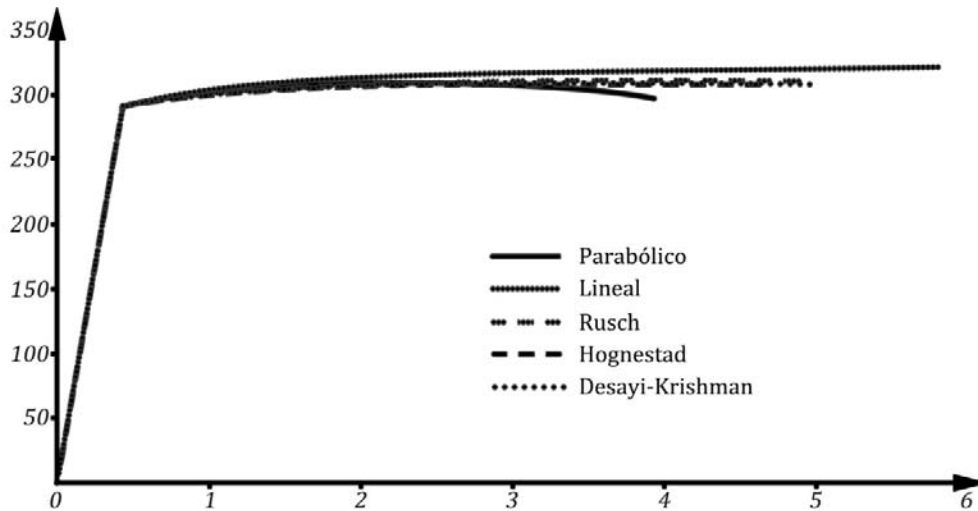


Figura 2,38: Comparación de diagramas del hormigón. Curvas M vs φ

TABLAS 2.15: Comparación de diagramas tenso deformación del hormigón
HOGNESTAD

ϵ'_{ci}	$\Omega = \epsilon'_{ci}/\epsilon_o$	α_{1i}	β_{1i}	c_i (cm)	ϵ_{si}	f_{si} (MPa)	z_{1i} (cm)	M_i (kN.m)	$\varphi_i \cdot 10^{-4}$ (rad/cm)
0,004	2	0,910	0,874	8,54	0,0213	300	50,27	307,62	4,68
0,0035	1,75	0,926	0,849	8,66	0,0183	300	50,33	308,00	4,04
0,003	1,5	0,935	0,819	8,88	0,0152	300	50,36	308,22	3,38
0,0025	1,25	0,930	0,785	9,32	0,0120	300	50,34	308,10	2,68
0,002	1	0,889	0,750	10,20	0,0086	300	50,18	307,07	1,96
0,0015	0,75	0,779	0,722	12,09	0,0052	300	49,63	303,76	1,24
0,001	0,5	0,595	0,700	16,32	0,0023	300	48,29	295,52	0,61
0,000824	0,412	0,513	0,693	19,13	0,0015	300	47,37	289,90	0,43
0,0005	0,25	0,336	0,682	18,69	0,0009	188,95	47,63	183,59	0,27

RÜSCH

ϵ'_{ci}	$\Omega = \epsilon'_{ci}/\epsilon_o$	α_{1i}	β_{1i}	c_i (cm)	ϵ_{si}	f_{si} (MPa)	z_{1i} (cm)	M_i (kN.m)	$\varphi_i \cdot 10^{-4}$ (rad/cm)
0,004	2	0,850	0,980	9,27	0,0121	300	50,38	308,30	2,70
0,0035	1,75	0,832	0,973	8,74	0,0155	300	50,46	308,82	3,43
0,003	1,5	0,810	0,961	8,40	0,0190	300	50,51	309,10	4,17

0,0025	1,25	0,782	0,938	8,16	0,0225	300	50,53	309,26	4,90
0,002	1	0,889	0,750	10,20	0,0086	300	50,18	307,07	1,96
0,0015	0,75	0,779	0,722	12,09	0,0052	300	49,63	303,76	1,24
0,001	0,5	0,595	0,700	16,32	0,0023	300	48,29	295,52	0,61
0,000824	0,412	0,513	0,693	19,13	0,0015	300	47,37	289,90	0,43
0,0005	0,25	0,336	0,682	18,69	0,0009	188,95	47,63	183,59	0,27

DESAYI KRISHMAN

ε'_{ci}	$\Omega = \varepsilon'_{ci}/\varepsilon_o$	α_{1i}	β_{1i}	c_i (cm)	ε_{si}	f_{si} (MPa)	z_{1i} (cm)	M_i (kN.m)	$\varphi_i \cdot 10^{-4}$ (rad/cm)
0,004	2	0,890	0,904	8,45	0,0216	300	50,24	307,46	4,73
0,0035	1,75	0,861	0,930	8,49	0,0188	300	50,34	308,11	4,12
0,003	1,5	0,830	0,947	8,65	0,0157	300	50,41	308,51	3,47
0,0025	1,25	0,796	0,945	9,04	0,0124	300	50,40	308,46	2,77
0,002	1	0,762	0,910	9,81	0,0090	300	50,26	307,61	2,04
0,0015	0,75	0,727	0,818	11,43	0,0056	300	49,84	305,04	1,31
0,001	0,5	0,697	0,641	15,22	0,0025	300	48,70	298,02	0,66
0,0008	0,4	0,688	0,528	18,71	0,0015	300	47,56	291,09	0,43
0,0005	0,25	0,675	0,359	18,28	0,0010	195,42	47,83	190,68	0,27

LINEAL

ε'_{ci}	f'_{ci} (MPa)	c_i (cm)	ε_{si}	f_{si} (MPa)	z_{1i} (cm)	M_i (kN.m)	$\varphi_i \cdot 10^{-4}$ (rad/cm)
0,003	78,87	5,17	0,0283	300	52,28	319,93	5,80
0,0025	65,73	6,21	0,0192	300	51,93	317,82	4,03
0,002	52,58	7,76	0,0119	300	51,41	314,65	2,58
0,0015	39,44	10,35	0,0063	300	50,55	309,37	1,45
0,001	26,29	15,52	0,0025	300	48,83	298,82	0,64
0,0008	21,43	19,04	0,0015	300	47,65	291,64	0,43
0,0005	13,15	19,02	0,0009	183,87	47,66	178,77	0,26

Este enfoque ofrece la comparación a partir de los valores de momento flector y curvatura lo que lo hace más cercano al verdadero comportamiento de la sección, puede apreciarse la validez del diagrama lineal solo para la zona en que el refuerzo no fluye. En el ejemplo desarrollado se aprecia como para la fluencia donde $f'_{ci} \cong 0,7f'_c$ aun resulta válido este diagrama, situación en la que se profundizará al abordar las curvas de comportamiento simplificadas. A partir de aquí comienza a alejarse sustancialmente del resto de los diagramas sobre todo para las deformaciones donde se produce el fallo de la sección., nótese los elevados valores que alcanza los esfuerzos a compresión del hormigón.

Como se había explicado anteriormente las diferencias entre el diagrama Parabólico y el resto aparecen para $\varepsilon'_c > 0,003$, haciendo no recomendable el primero para estos casos.

2.7.5 CURVAS DE COMPORTAMIENTO SIMPLIFICADAS. CASO ESPECÍFICO DE LA FLEXIÓN EN HORMIGÓN ARMADO

Es evidente la laboriosidad que exige la determinación “precisa” de los diagramas de comportamiento para una cualquiera de las solicitaciones estudiadas, especialmente cuando se trata de la flexión en la que evaluar la profundidad de la línea neutra dentro de cada iteración resulta un procedimiento complicado. Procurando simplificar los cálculos, las curvas de comportamiento M vs. φ se pueden construir a partir de la definición de las coordenadas de menor cantidad de puntos, los que luego se unen mediante líneas rectas; la Figura 2.39 ilustra estas soluciones, y cualquiera de las variantes de simplificación a que se recurra debe reconocer tres de los puntos más singulares del comportamiento:

- Origen
- Inicio de la fluencia del refuerzo en tracción
- Cuando se alcanza el agotamiento de la sección

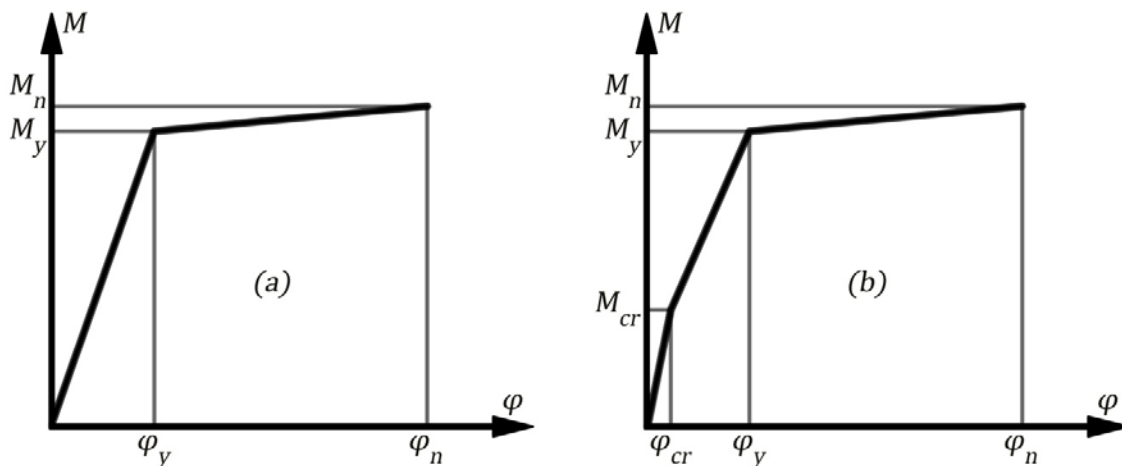


Figura 2.39 Curvas simplificadas de M vs. φ para secciones de hormigón armado

El origen depende del caso de sección que se esté analizando, es decir, si se trata de una sección de hormigón armado, o pretensado. En el primer caso es obvio que el origen coincide con el punto (0.0) pero ya para el pretensado, si no se desea analizar la posible inversión de momento (no existen puntos por debajo del eje horizontal φ), se ubica en el punto al que corresponde el par (0, φ_0).

Ya para los otros dos puntos, la fluencia y el agotamiento, al que corresponden las coordenadas (M_y , φ_y) y (M_n , φ_n), respectivamente, el procedimiento es también análogo al descrito en el ejercicio 2.7 aunque para el primero de los puntos en lugar de fijar la deformación a nivel de la fibra más comprimida de la sección, ϵ'_c , se fija a nivel del centroide de la armadura en tracción, ϵ_s ó ϵ_{p2} , en dependencia del tipo de sección que se analiza. Mientras tanto, para el segundo punto se sigue fijando ϵ'_c en el valor $\epsilon'_c = \epsilon'_{cu}$.

Existe una variante que incluye, además de los tres puntos singulares anteriores, un cuarto punto asociado al inicio de la fisuración, caracterizado por el par ordenado (M_{cr} , φ_{cr})¹³ (Figura 2.39b), sin embargo, la inclusión de la fisuración tiene generalmente menor interés dentro de los casos más

¹³ El sub índice "cr" corresponde a la palabra inglesa "crack" que significa en agrietamiento

comunes de comportamiento de vigas, prefiriéndose construir el diagrama de comportamiento sólo a partir del estudio de la **fluencia** y el **agotamiento** (Figura 2.39a).

Aun cuando se persigue una simplificación para construir los diagramas de comportamiento mediante el análisis de una menor cantidad de puntos, existe una fuente adicional de complejidad asociada a la ley constitutiva que se adopte para evaluar la contribución del hormigón a compresión (estos cálculos aproximados ignoran, evidentemente, la contribución a tracción). Aun cuando se decida recurrir a los diagramas rectangulares equivalentes a estas leyes mediante el empleo de los coeficientes α_1 y β_1 , especialmente para el punto correspondiente a la fluencia del acero en tracción, el análisis sigue siendo laborioso, lo que podrá constatar en § 2.5.1.1, por eso puede resultar ventajoso recurrir a un diagrama lineal como el sugerido por los investigadores Paul y Paulay, del tipo: $\sigma'_c = E_c \varepsilon'_c$ con $E_c = 1000f'_c$ para hormigones de resistencia $f'_c \leq 20 \text{ MPa}$.

El empleo de esta ley lineal, empleada en § 2.5.1.2, es consistente siempre que se asegure una tensión máxima de compresión en el hormigón inferior al 70% de su resistencia, es decir: $\sigma'_c \leq 0.7f'_c$. La Figura 2.40 ofrece estos dos diagramas para modelar el hormigón.

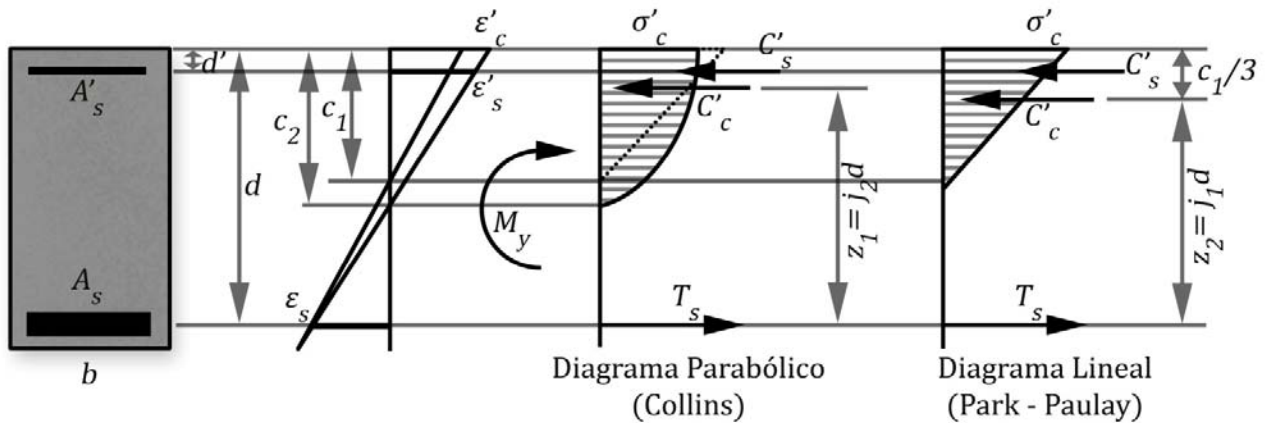


Figura 2.40 Ilustración de diagramas del hormigón para evaluar el punto de fluencia (M_y, φ_y)

2.7.5.1 COORDENADAS DEL PUNTO CORRESPONDIENTE A LA FLUENCIA EN HORMIGÓN ARMADO

(A) MEDIANTE EL DIAGRAMA DE COLLINS PARA MODELAR EL HORMIGÓN

Cuando se considera un diagrama no lineal para el hormigón, el proceso presupone considerar los coeficientes α_1 y β_1 para transformarlo en el rectángulo equivalente, y ambos dependen a su vez de $\Omega = f(\varepsilon'_c)$. Sin embargo, para estudiar el inicio de la fluencia lo que se requiere es hacer ($\varepsilon_s = \varepsilon_y$) y definir cuál es la deformación ε'_c que corresponde a esta condición. La deducción es sencilla si se recurre a la ecuación de compatibilidad de las deformaciones, es decir:

$$\begin{aligned} \frac{\varepsilon'_c}{c} &= \frac{\varepsilon_y}{(d-c)} \Rightarrow \varepsilon'_c = \frac{c}{(d-c)} \varepsilon_y \\ \therefore \Omega &= \frac{\varepsilon'_c}{\varepsilon_o} \Rightarrow \Omega = \frac{c}{0.002(d-c)} \varepsilon_y = \frac{500\varepsilon_y c}{(d-c)} \end{aligned}$$

Ejemplificando para el **diagrama parabólico** de Collins correspondiente a cargas de corta duración ($\varepsilon_o = 0.002$) se deben aplicar las siguientes ecuaciones (Ver Tabla 2.2):

$$\alpha_1 = \frac{6(1 - \Omega/3)^2}{(4/\Omega - 1)} = \frac{6\varepsilon_y \left[1 - 166.7\varepsilon_y \left(\frac{c}{d-c} \right) \right]^2}{0.008d - (\varepsilon_y + 0.008)c} c$$

$$\beta_1 = \frac{(4 - \Omega)}{(6 - 2\Omega)} = \frac{d - (1 + 125\varepsilon_y)c}{1.5d - (1.5 + 250\varepsilon_y)c}$$

SOLUCIÓN DEL EQUILIBRIO DE LA SECCIÓN PARA DETERMINAR LA LINEA NEUTRA

Aunque el procedimiento que se explica es general y puede adaptarse a cualquier tipología de sección, se describirá para una sección rectangular, pero incluyendo la presencia de refuerzo en la zona comprimida que resulta ser una situación muy frecuente. Este refuerzo fue ignorado voluntariamente mientras se estudió el comportamiento “exacto” de la sección, no porque fuera imposible incluirlo (aquí se observará cómo proceder), sino para aliviar las ecuaciones de trabajo.

Equilibrio de fuerzas

$$\sum F_x = 0 \quad \Rightarrow \quad C_c + C_s - T_s = 0 \quad \Rightarrow \quad (\alpha_1 f'_c)(\beta_1 c)b + A'_s f'_s - A_s f_y = 0$$

Para los recubrimientos usualmente empleados y para la posición de la línea neutra que asegura la entrada en fluencia del acero en tracción, se debe esperar que el acero en compresión también alcance la fluencia ($f'_s = f_y$), lo que simplifica en algo la solución del equilibrio de fuerzas:

$$(f'_c b) \left[\frac{6\varepsilon_y \left[1 - 166.7\varepsilon_y \left(\frac{c}{d-c} \right) \right]^2}{0.008d - (\varepsilon_y + 0.008)c} c \right] \left[\frac{d - (1 + 125\varepsilon_y)c}{1.5d - (1.5 + 250\varepsilon_y)c} c \right] + (A'_s - A_s)f_y = 0 \quad (A)$$

Sin embargo, si se confirma que la armadura en compresión no fluye para la condición $\varepsilon_s = \varepsilon_y$, entonces $f'_s = E_s \varepsilon'_s$, y se requiere recurrir a la compatibilidad de las deformaciones para hallar ε'_s , y luego a su ecuación física para indicar a f'_s como función de c , o sea:

Compatibilidad de las deformaciones

$$\frac{\varepsilon'_s}{(c - d')} = \frac{\varepsilon_y}{(d - c)} \quad \Rightarrow \quad \varepsilon'_s = \frac{(c - d')}{(d - c)} \varepsilon_y$$

Ecuación física o constitutiva del acero en compresión

Si

$$\varepsilon'_s < \varepsilon_y \quad \Rightarrow \quad f'_s = E_s \varepsilon'_s \quad \Rightarrow \quad f'_s = E_s \frac{c - d'}{d - c} \varepsilon_y = f_y \left(\frac{c - d'}{d - c} \right) \leq f_y$$

Sustituyendo esta tensión en la ecuación de equilibrio se llega a:

$$(f'_c b) \left[\frac{6\varepsilon_y \left[1 - 166.7\varepsilon_y \left(\frac{c}{d-c} \right) \right]^2}{0.008d - (\varepsilon_y + 0.008)c} c \right] \left[\frac{d - (1 + 125\varepsilon_y)c}{1.5d - (1.5 + 250\varepsilon_y)c} c \right] + (A'_s f_y) \left[\frac{c - d'}{d - c} \right] - A_s f_y = 0 \quad (B)$$

El procedimiento general a seguir se explica a continuación:

PROCEDIMIENTO

Paso 1: Determinar el valor de " c " (profundidad de la línea neutra que asegura el equilibrio en la sección)

1.1 Emplear la ecuación (A)

1.2 Evaluar la deformación del acero en compresión para el valor de " c " calculado:

$$\varepsilon'_s = \frac{(c - d')}{(d - c)} \varepsilon_y \leq \varepsilon_y$$

1.3 Comprobar si realmente el acero en compresión fluye:

- Si $\varepsilon'_s \geq \varepsilon_y$, continuar con el **Paso 2**.
- Si $\varepsilon'_s < \varepsilon_y$, desestimar el valor de " c " calculado y determinar un nuevo valor mediante la ecuación (B). Con este nuevo valor es que continúa el procedimiento, pasando al **Paso 2**.

Paso 2: Determinar el momento flector que origina la fluencia para el valor de " c " obtenido en el **Paso 1**:

$$M_y = (\alpha_1 f'_c)(\beta_1 c)b(d - 0.5\beta_1 c) + A'_s f'_s (d - d')$$

- Si $\varepsilon'_s < \varepsilon_y$, entonces $f'_s = E_s \frac{(c-d')}{(d-c)} \varepsilon_y$
- Si $\varepsilon'_s \geq \varepsilon_y$, entonces $f'_s = f_y$

Paso 3: Determinar la curvatura de fluencia: $\phi_y = \varepsilon_y / (d - c)$

La determinación de " c " mediante las ecuaciones (A) y (B) es compleja aunque algunas herramientas informáticas, como MathCad, alivian apreciablemente la solución.

(B) *MEDIANTE EL DIAGRAMA LINEAL PARA MODELAR LA CONTRIBUCIÓN DEL HORMIGÓN*

El procedimiento es similar al anterior pero a partir de una nueva ley de σ'_c para hallar C'_c , en este caso la lineal. Con el auxilio de la Figura 2.42 la ecuación de equilibrio de fuerza se puede obtener de la manera siguiente:

$$\sum F_x = 0 \quad \Rightarrow \quad C_c + C_s - T_s = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{2} \sigma'_c c b + A'_s f'_s - A_s f_y = 0$$

Siendo $\sigma'_c = E_c \varepsilon'_c$ y $f'_s = E_s \varepsilon'_s \leq f_y$

Atendiendo a la compatibilidad de las deformaciones:

$$\frac{\varepsilon'_c}{c} = \frac{\varepsilon_y}{d - c} = \frac{\varepsilon'_s}{c - d'} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} \varepsilon'_c = \left(\frac{c}{d - c} \right) \varepsilon_y = \left(\frac{c}{d - c} \right) \frac{f_y}{E_s} \\ \varepsilon'_s = \left(\frac{c - d'}{d - c} \right) \varepsilon_y = \left(\frac{c - d'}{d - c} \right) \frac{f_y}{E_s} \end{cases}$$

Entonces:

$$\begin{aligned} \sigma'_c &= E_c \left(\frac{c}{d - c} \right) \varepsilon_y \\ f'_s &= E_s \left(\frac{c - d'}{d - c} \right) \varepsilon_y = f_y \left(\frac{c - d'}{d - c} \right) \leq f_y \end{aligned}$$

Si se supone que el acero en compresión fluye se llega a la ecuación:

$$(0.5 E_c b \varepsilon_y) c^2 - [(A'_s - A_s) f_y] c + (A'_s - A_s) f_y d = 0 \quad (A_1)$$

Si se comprueba que para el valor de " c " calculado mediante la ecuación A_1 el acero no fluye (se utiliza para ello la ecuación de compatibilidad), se debe determinar un nuevo valor mediante la siguiente ecuación:

$$\frac{1}{2} \left[E_c \left(\frac{c}{d-c} \right) \frac{f_y}{E_s} \right] cb + A'_s \left[E_s \left(\frac{c-d'}{d-c} \right) \frac{f_y}{E_s} \right] - A_s f_y = 0$$

$$\therefore (0.5b)c^2 + n(A'_s + A_s)c - n(A'_s d' + A_s d) = 0 \quad (B_1)$$

Siendo $n = E_s/E_c$

Para aceptar la solución simplificada mediante el diagrama lineal, el valor de " c " que se obtenga debe asegurar una tensión en el hormigón a nivel de la fibra de máxima de compresión, tal que $\sigma'_c \leq 0.7f'_c$ o incluso $\sigma'_c \approx f'_c$, de lo contrario se debe desestimar el diagrama lineal y calcular la sección mediante un diagrama no lineal que exige cálculos más laboriosos.

PROCEDIMIENTO

Paso 1: Determinar el valor de " c " (profundidad de la línea neutra que asegura el equilibrio en la sección)

1.1 Emplear la ecuación (A₁)

1.2 Evaluar la deformación del acero en compresión para el valor de " c " calculado:

$$\varepsilon'_s = \frac{(c-d')}{(d-c)} \varepsilon_y \leq \varepsilon_y$$

1.3 Comprobar si realmente el acero en compresión fluye:

- Si $\varepsilon'_s \geq \varepsilon_y$, continuar con el **Paso 2**.
- Si $\varepsilon'_s < \varepsilon_y$, desestimar el valor de " c " calculado y determinar un nuevo valor mediante la ecuación (B₁). Con este nuevo valor es que continúa el procedimiento, yendo al **Paso 2**.

Paso 2: Comprobar la confianza del diagrama lineal empleado:

$$\sigma'_c = E_c \varepsilon'_c = E_c \varepsilon_y \left(\frac{c}{d-c} \right)$$

- Si $\sigma'_c \leq 0.7f'_c$ el diagrama lineal es confiable y se continúa el procedimiento pasando al **Paso 3**.
- Si $\sigma'_c > 0.7f'_c$ se desestima el diagrama lineal y se recurre al procedimiento explicado en § 2.5.1.1

Paso 3: Determinar el momento flector que origina la fluencia para el valor de " c " obtenido en el Paso 2

$$M_y = (\alpha_1 f'_c)(\beta_1 c)b(d - 0.5\beta_1 c) + A'_s f'_s(d - d')$$

- Si $\varepsilon'_s < \varepsilon_y$, entonces $f'_s = E_s \frac{(c-d')}{(d-c)} \varepsilon_y$
- Si $\varepsilon'_s \geq \varepsilon_y$, entonces $f'_s = f_y$

Paso 4: Determinar la curvatura de fluencia: $\varphi_y = \varepsilon_y/(d-c)$

El empleo del diagrama lineal, en el mejor de los casos, produce alteraciones en los resultados debido fundamentalmente a las siguientes razones (Ver Figura 2.42):

- La solución conduce a un valor de " c " menor que el real (línea neutra más alta ($c_1 < c_2$)).
- Al disminuir " c " aumenta el brazo mecánico ($z_1 > z_2$) y por tanto el momento flector M_y será ligeramente superior.
- Conduce a una curvatura φ_y menor.

2.7.5.2 COORDENADAS DEL PUNTO CORRESPONDIENTE AL AGOTAMIENTO DE LA SECCIÓN

A los valores del momento flector y la curvatura de agotamiento de la sección (M_n, φ_n) corresponde una deformación del hormigón, a nivel de la fibra más comprimida (ε'_{cu}), que es considerada de manera diferente por algunos reglamentos. A continuación se exponen las consideraciones de dos de las tendencias más generalizadas:

ACI: Plantea que el agotamiento ocurre para $\varepsilon'_{cu} = 0.003$, y no limita la deformación del acero.

EHE: Establece que el fallo puede ocurrir por el hormigón cuando alcanza una deformación $\varepsilon'_{cu} = 0.0035$, o por deformación excesiva del acero cuando alcanza la deformación $\varepsilon_{su} = 0.01$.

Una vez establecido el criterio de fallo, el procedimiento para obtener el punto (M_n, φ_n) es sencillo. Ha quedado confirmado que utilizar el diagrama rectangular equivalente en sustitución de la ley constitutiva que desee considerarse, siempre que se conozcan las expresiones que permiten evaluar α_1 y β_1 durante esta transformación, es una decisión probadamente consistente para la condición $\sigma'_c \leq 0.7f'_c$. Siendo así, la siguiente expresión iguala la contribución del hormigón en fuerza en la altura comprimida "c" en una sección rectangular, correspondiendo el miembro izquierdo a la evaluación de dicha fuerza mediante un diagrama lineal como el que proponen Park y Paulay, mientras el derecho a la misma fuerza evaluada en uno cualquiera de los diagramas no lineales que se han estudiado, pero mediante el diagrama rectangular que le es equivalente:

$$\left(\frac{1}{2}\sigma'_c c\right)b = (\alpha_1 f'_c)(\beta_1 c)b \quad \Rightarrow \quad \sigma'_c = 2(\alpha_1 \beta_1) f'_c = \lambda f'_c$$

La Tabla 2.16 ofrece el valor de λ para las leyes tensodeformacionales más empleadas durante la modelación del hormigón, y se aprecia que en todas ellas $\lambda > 0.7$, incluso mayor que la unidad, lo que supone desestimar el diagrama lineal para estudiar este punto dentro del comportamiento de la sección, aun mediante un procedimiento simplificador como el que se estudia.

TABLA 2.16 Valores de α_1 y β_1 para secciones rectangulares correspondientes a una deformación $\varepsilon'_c = 0.003$

DIAGRAMA		Para $\Omega = \varepsilon'_{cu}/\varepsilon_o = 0.003/0.002 = 1.5$			
		α_1	β_1	$(\alpha_1 \cdot \beta_1)$	$\lambda = 2(\alpha_1 \beta_1)$
COLLINS (PARABOLICO)		0.90	0.833	0.750	1.500
HOGNESTAG	$\varepsilon'_c \geq 0.002$	0.935	0.819	0.766	1.532
RÜSCH	$\varepsilon'_c \geq 0.002$	0.960	0.810	0.778	1.556

Esta conclusión es evidente y confirma la ineficacia de estudiar las situaciones próximas al agotamiento mediante leyes lineales para el hormigón. En resumen, el estudio del par (M_u, φ_u), aun procurando criterios simplificadores, debe realizarse recurriendo a una cualquiera de las leyes tensodeformacionales para el hormigón de las convalidadas por la práctica y avaladas por la experiencia, pero preferiblemente recurriendo a sus diagramas rectangulares equivalentes representados por sus coeficientes α_1 y β_1 .

(A) *MEDIANTE DIAGRAMAS RECTANGULARES PARA MODELAR LA CONTRIBUCIÓN DEL HORMIGÓN***PROCEDIMIENTO****Paso 1:** Determinar la profundidad de la línea neutra que asegura el equilibrio en la sección ("c")**1.1** Se fija $\varepsilon'_{cu} = 0.003$ **1.2** Evaluar los coeficientes α_1 y β_1 seleccionando las expresiones que correspondan a la ley tensión-deformación del hormigón que se decida emplear.**1.3** Suponiendo que el acero en compresión fluye, determinar el valor de "c" mediante la expresión A₂:

$$c = \frac{(A_s - A'_s)f_y}{(\alpha_1\beta_1)f'_c b} \quad (A_2)$$

1.4 Verificar la entrada en fluencia del acero en compresión para el valor de "c" calculado:

$$\varepsilon'_s = \frac{(c - d')}{c} \varepsilon'_{cu}$$

- Si $\varepsilon'_s \geq \varepsilon_y$, continuar con el **Paso 2**.
- Si $\varepsilon'_s < \varepsilon_y$, desestimar el valor de "c" calculado y determinar un nuevo valor mediante la ecuación (B₂).

$$\sum F_x = 0 \quad \Rightarrow \quad (\alpha_1 f'_c)(\beta_1 c)b + A'_s E_s \left[\varepsilon'_{cu} \frac{(c - d')}{c} \right] - A_s f_y = 0$$

$$(\alpha_1 \beta_1 f'_c b)c^2 - (A_s f_y - A'_s E_s \varepsilon'_{cu})c - (A'_s E_s \varepsilon'_{cu} d') = 0 \quad (B_2)$$

Con este nuevo valor de "c" es que continúa el procedimiento, yendo al **Paso 2**.**Paso 2:** Determinar el momento flector que origina la fluencia para el valor de "c" obtenido en el Paso 2

$$M_n = (\alpha_1 \beta_1 f'_c b)c(d - 0.5\beta_1 c) + A'_s f'_s(d - d')$$

- Si $\varepsilon'_s < \varepsilon_y$, entonces $f'_s = E_s \frac{(c - d')}{c} \varepsilon'_{cu}$
- Si $\varepsilon'_s \geq \varepsilon_y$, entonces $f'_s = f_y$

Paso 3: Determinar la curvatura de fluencia: $\phi_u = \varepsilon'_{cu}/c = 0.003/c$ **2.7.5.3 COORDENADAS DEL PUNTO CORRESPONDIENTE AL INICIO DE LA FISURACIÓN**

La inclusión de este punto en el comportamiento exige definir las condiciones bajo las cuales se inicia la deformación. En este caso se impondrá como condición que la fisuración se inicia cuando la fibra de la sección más traccionada, alcance la tensión $f_r = 0.62\sqrt{f'_c}$, sin embargo, como para determinar la profundidad de la línea neutra lo conveniente es partir de una deformación a cualquier nivel de la sección, la estrategia es convertir la tensión fijada en deformación, requiriéndose seleccionar la ley σ_c vs ε_c . Es evidente la pertinencia del diagrama lineal para estimar la contribución a compresión del hormigón durante el estudio este punto, pero no lo es tanto para el estudio de la contribución a tracción. Sin embargo, se puede suponer con una certeza probada que alrededor de estas tensiones el hormigón a tracción tiene también una respuesta cuasi lineal. Siendo así, la deformación a nivel de la fibra más traccionada a la que corresponde la tensión f_r , se puede evaluar de la manera siguiente:

$$\sigma_c = E_c \varepsilon_c \quad \Rightarrow \quad \varepsilon_{cu} = f_r / E_c$$

Como se ha procedido hasta el momento, la solución del problema (determinación de M_{cr} y ϕ_{cr}) está en la solución de las ecuaciones de campo: equilibrio, compatibilidad y leyes constitutivas. A continuación se presenta esta solución, incluyendo la contribución del hormigón a tracción, con el apoyo de la figura 2.41.

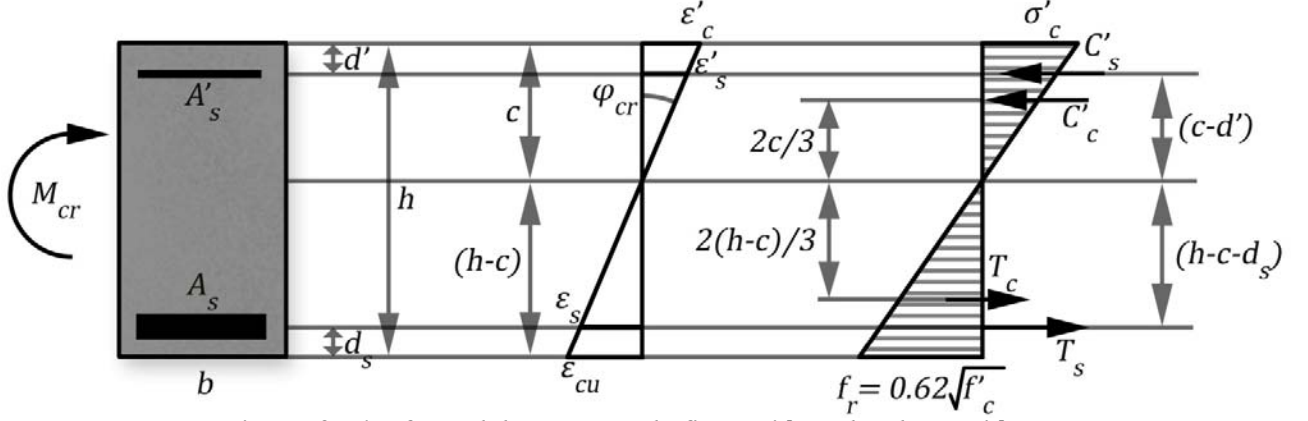


Figura 2.41 Efecto del momento de fisuración sobre la sección.

Compatibilidad:

$$\frac{\varepsilon_{cu}}{h-c} = \frac{\varepsilon'_c}{c} = \frac{\varepsilon'_s}{c-d'} = \frac{\varepsilon_s}{d-c} \Rightarrow \begin{cases} \varepsilon'_c = \left(\frac{c}{h-c}\right) \varepsilon_{cu} = \left(\frac{c}{h-c}\right) \frac{0.62\sqrt{f'_c}}{E_c} \\ \varepsilon'_s = \left(\frac{c-d'}{h-c}\right) \varepsilon_{cu} = \left(\frac{c-d'}{h-c}\right) \frac{0.62\sqrt{f'_c}}{E_c} \\ \varepsilon_s = \left(\frac{d-c}{h-c}\right) \varepsilon_{cu} = \left(\frac{d-c}{h-c}\right) \frac{0.62\sqrt{f'_c}}{E_c} \end{cases}$$

Ecuaciones Físicas:

$$\text{Hormigón en Compresión: } \sigma'_c = E_c \varepsilon'_c = E_c \left[\left(\frac{c}{h-c}\right) \frac{0.62\sqrt{f'_c}}{E_c} \right] = 0.62\sqrt{f'_c} \left(\frac{c}{h-c}\right)$$

$$\text{Hormigón en Tracción: } \sigma_c = 0.62\sqrt{f'_c}$$

$$\text{Acero en Compresión: } f'_s = E_s \varepsilon'_s = E_s \left[\left(\frac{c-d'}{h-c}\right) \frac{0.62\sqrt{f'_c}}{E_c} \right] = 0.62n\sqrt{f'_c} \left(\frac{c-d'}{h-c}\right)$$

$$\text{Acero en Tracción: } f_s = E_s \varepsilon_s = E_s \left[\left(\frac{d-c}{h-c}\right) \frac{0.62\sqrt{f'_c}}{E_c} \right] = 0.62n\sqrt{f'_c} \left(\frac{d-c}{h-c}\right)$$

Ecuación de Equilibrio de Fuerza para determinar la posición de la línea neutra:

$$\begin{aligned} \sum F_x = 0 & \Rightarrow C_c + C_s - T_c - T_s = 0 \Rightarrow \frac{1}{2} \sigma'_c c b + A'_s f'_s - \frac{1}{2} f_r (h - c) b - A_s f_s \\ & = 0 \\ \therefore \frac{1}{2} 0.62 \sqrt{f'_c} \left(\frac{c}{h - c} \right) c b + A'_s 0.62 n \sqrt{f'_c} \left(\frac{c - d'}{h - c} \right) - \frac{1}{2} 0.62 \sqrt{f'_c} (h - c) b - A_s 0.62 n \sqrt{f'_c} \left(\frac{d - c}{h - c} \right) \\ & = 0 \end{aligned}$$

Al trabajar esta última expresión se demuestra que:

$$c = \frac{b h^2 + 2n(A'_s d' + A_s d)}{2b h + 2n(A'_s + A_s)} \quad (A_3)$$

El valor que define la expresión anterior para fijar la ubicación de la línea neutra sólo puede aceptarse si al sustituirlo en las ecuaciones de compatibilidad de ambas armaduras, ε_s y ε'_s , se confirman que ninguna de ellas alcanza la fluencia, pues bajo ese presupuesto fue calculada. Basta que al menos uno de los aceros fluya para que se ignore el resultado alcanzado en cuyo caso se deja al estudiante la deducción de otras expresiones que conciban, por ejemplo, que fluya el acero en compresión y no el de tracción, o viceversa, aunque resulta más sugerente recurrir a una solución semigráfica como la que se explica en el Ejercicio 2.5. Hallado el valor de "c" ya existen las condiciones para determinar M_{cr} y ϕ_{cr} mediante el siguiente:

PROCEDIMIENTO

Paso 1: Determinar la profundidad de la línea neutra que asegura el equilibrio en la sección ("c")

- 1.1 Si se supone que ninguna de las dos armaduras fluye, se determina mediante la ecuación A₃.
- 1.2 Verificar que ninguna de las dos armaduras fluye para el valor de "c" calculado:

$$\begin{aligned} \varepsilon'_s &= \left(\frac{c - d'}{h - c} \right) \frac{0.62 \sqrt{f'_c}}{E_c} \\ \varepsilon_s &= \left(\frac{d - c}{h - c} \right) \frac{0.62 \sqrt{f'_c}}{E_c} \end{aligned}$$

- Si $\varepsilon'_s \geq \varepsilon_y$ y $\varepsilon_s \geq \varepsilon_y$, continuar con el **Paso 2**.
- Si $\varepsilon'_s < \varepsilon_y$ ó también $\varepsilon_s < \varepsilon_y$, desestimar el valor de "c" calculado y determinar un nuevo valor. Se sugiere para ello recurrir a una solución gráfica, y con el nuevo valor es que continúa el procedimiento, yendo al **Paso 2**.

Paso 2: Calcular las fuerzas interiores que aparecen en la sección

Hormigón en Compresión: $C_c = 0.31 b \sqrt{f'_c} \left(\frac{c^2}{h - c} \right)$

Hormigón en Tracción: $T_c = 0.31 b \sqrt{f'_c} (h - c)$

$$\begin{aligned} \text{Acero en Compresión: } C'_s &= A'_s f'_s & f'_s: & \begin{cases} 0.62 n \sqrt{f'_c} \left(\frac{c - d'}{h - c} \right) & \text{Si } \varepsilon'_s < \varepsilon_y \\ f_y & \text{Si } \varepsilon'_s \geq \varepsilon_y \end{cases} \\ \text{Acero en Tracción: } T_s &= A_s f_s & f_s: & \begin{cases} 0.62 n \sqrt{f'_c} \left(\frac{d - c}{h - c} \right) & \text{Si } \varepsilon'_s < \varepsilon_y \\ f_y & \text{Si } \varepsilon'_s \geq \varepsilon_y \end{cases} \end{aligned}$$

Paso 3: Determinar el momento flector que origina la fisuración del hormigón para el valor de " c " obtenido en el Paso 2

$$M_{cr} = C_c(2c/3) + C_s(c - d') + T_c[2(h - c)/3] + T_s(h - c - d_s)$$

Paso 4: Determinar la curvatura de fluencia: $\varphi_{cr} = \varepsilon_{cu}/(h - c) = 0.62\sqrt{f'_c}/(h - c)E_c$

2.7.6 CONCEPTO DE DUCTILIDAD. FALLO BALANCEADO.

La mayor parte de las normas internacionales exigen a los diseños de secciones sometidas a flexión cierto grado de ductilidad para evitar su agotamiento súbito, prefiriéndose que tengan lugar deformaciones y fisuras previas al potencial fallo, tales que permitan prever el colapso y evitar el desplome brusco de la estructura. Esto se logra, básicamente, a través del control de la cuantía de refuerzo, lo mismo en tracción que en compresión, garantizando que no se diseñen secciones con exceso de acero o hiper-reforzadas.

Con el apoyo de la curva de comportamiento simplificada M vs φ puede definirse el concepto de **ductilidad** de la sección como la relación entre las curvaturas de rotura y fluencia, es decir, mediante la relación (φ_n/φ_y) . En la Figura 2.42 se muestran diferentes tipos de secciones en función de su ductilidad.

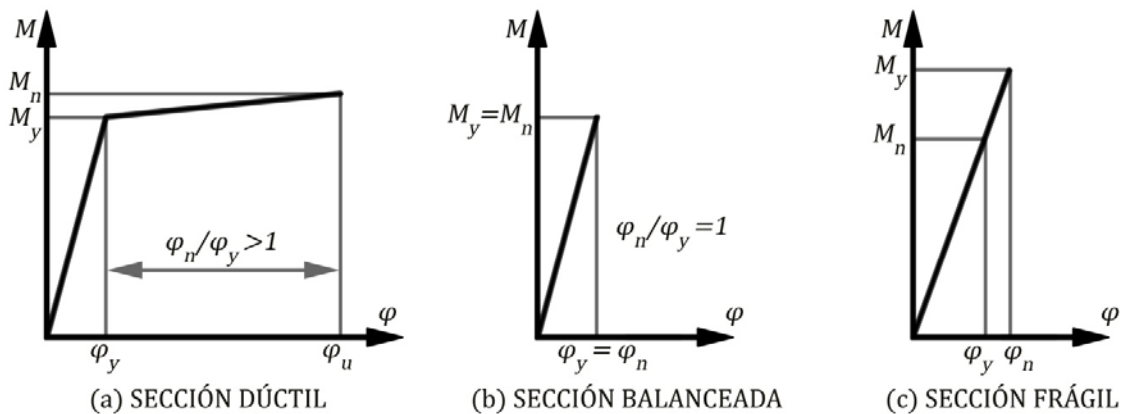


Figura 2.42 Ductilidad de la sección atendiendo a la relación φ_n/φ_y .

SECCIÓN a: Sección dúctil, con $\varphi_n/\varphi_y > 1$. En el momento del fallo las deformaciones y el agrietamiento de la pieza son observables y permiten acciones preventivas.

SECCIÓN b: Sección con $\varphi_n/\varphi_y = 1$, donde en la rotura la deformación del refuerzo traccionado es precisamente la de fluencia. A este caso se le llama **fallo balanceado**.

SECCIÓN c: Sección frágil, donde la rotura ocurre sin que el acero traccionado haya alcanzado la fluencia. Como el acero no fluye el giro de las secciones es limitado, el elemento experimenta flechas reducidas, y el agrietamiento puede llegar a ser escaso. Es como si el estado del elemento fuera óptimo y sin embargo, puede encontrarse próximo al colapso. El fallo es brusco e indeseado.

El **fallo balanceado** representa la frontera entre la ductilidad y la fragilidad, de ahí la importancia de su estudio. A él corresponde una deformación del acero en tracción igual a la de fluencia, es decir:

$\varepsilon_s = \varepsilon_y$. Se puede identificar comparando las cuantías de acero con la llamada cuantía balanceada. La Figura 2.43 ilustra el estado deformacional correspondiente a este fallo.

Para introducir el concepto de cuantía mecánica (ω) se va a considerar la ecuación de equilibrio de fuerzas en una sección rectangular de ancho b , para cualquiera de los diagramas tensión-deformación del hormigón.

$$\sum F_x = 0 \quad \Rightarrow \quad (\alpha_1 f'_c)(\beta_1 c)b + A'_s f_y - A_s f_y = 0$$

$$\frac{\varepsilon'_{cu}}{c_b} = \frac{\varepsilon_y}{d - c_b} \quad \Rightarrow \quad c_b = \frac{\varepsilon'_{cu}}{\varepsilon'_{cu} + \varepsilon_y} d$$

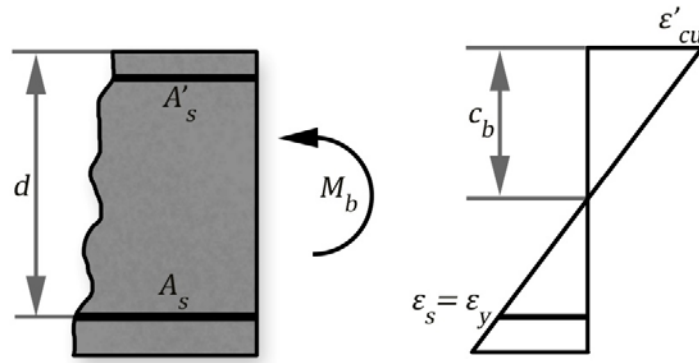


Figura 2.45 Fallo balanceado.

Si se divide la ecuación de fuerza por $(f'_c b d)$ y se definen los términos ω_c , ω' y ω de la manera siguiente:

$$\omega_c = \alpha_1 \beta_1 \frac{c}{d} \quad ; \quad \omega' = \frac{A'_s f_y}{f'_c b d} \quad ; \quad \omega = \frac{A_s f_y}{f'_c b d}$$

$$\therefore \sum F_x = 0 \quad \Rightarrow \quad \omega_c + \omega' - \omega = 0 \quad \Rightarrow \quad \omega_c = \omega - \omega'$$

Cuando la profundidad de la línea neutra coincide con la del fallo balanceado, es decir, cuando $c = c_b$, entonces:

$$\omega_b = \omega_c|_{c=c_b} = \alpha_1 \beta_1 \frac{c_b}{d} = \alpha_1 \beta_1 \left(\frac{\varepsilon'_{cu}}{\varepsilon'_{cu} + \varepsilon_y} \right)$$

Y el tipo de fallo puede identificarse de la manera siguiente:

- Si $(\omega - \omega' < \omega_b)$ El fallo será **dúctil**
- Si $(\omega - \omega' = \omega_b)$ El fallo será el **balanceado**
- Si $(\omega - \omega' > \omega_b)$ El fallo será **frágil**

2.7.7 VARIACIÓN DE LA CUANTÍA DE REFUERZO. EFECTO DEL ACERO A COMPRESIÓN.

Es importante, a modo de resumen, enfatizar en el mecanismo resistente de una sección de hormigón armado a flexión, simplificado en un par de fuerzas, como se aprecia en la siguiente figura 2,44:

Se puede simplificar y agrupar como C a todas las fuerzas a compresión (C_s y C_c en este caso) con un brazo jd' respecto a $T = T_s$, resultante de las fuerzas a tracción, y por tanto la resistencia de la sección puede plantearse como:

$$\sum F_x = 0$$

$$C = T = T_s$$

$$\sum M = 0$$

$$M = C \cdot jd' = T_s \cdot jd'$$

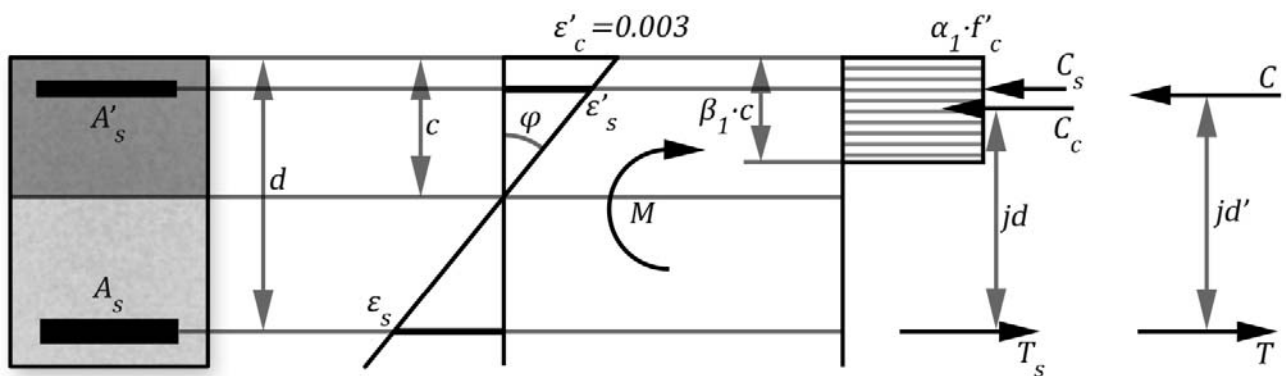


Figura 2,44: Diagramas de deformaciones, tensiones y fuerzas. Par de fuerzas resistentes

Entonces podemos concluir que el momento resistente de la sección M depende de 2 factores:

- La magnitud de la resultante del par, $C = T_s$
- El brazo del par, jd'

La magnitud de la resultante es función de la cantidad de refuerzo situado en la zona traccionada y de su resistencia, ($T_s = A_s f_s$), sabemos que la racionalidad de la sección y su ductilidad está en función de lograr que $f_s = f_y$.

El incremento del brazo del par, jd' se logra fundamentalmente por medio del aumento del peralte efectivo de la sección d . También se logra incrementando el refuerzo comprimido A'_s , pero con menor influencia que al aumentar d

Estos criterios se demuestran en el siguiente ejercicio:

Ejercicio 2,8

Para la sección rectangular de hormigón cuyos datos se muestran a continuación, realice una valoración sobre su comportamiento ante diferentes combinaciones de refuerzo principal. Utilice como enfoque de análisis la construcción de curvas de comportamiento simplificadas y el diagrama de HOGNESTAD como modelo del comportamiento del hormigón.

$b = 30cm$	$h = 55cm$	$f'_c = 25MPa$	$E_c = 25\,000MPa$
$f_y = 300MPa$	$E_s = 2 \cdot 10^5 MPa$	$\epsilon_y = 0.0015$	$d_s = d' = 5cm$
$\omega_b = 0,51$	para $\epsilon'_{cu} = 0.003$ (ACI)		

Cálculos y Discusión

$$1) A'_s = 0, \quad A_s = 20\text{cm}^2, \quad \omega = 0,16$$

El valor de ω indica claramente que es una sección con gran ductilidad, hipo-reforzada ya que $\omega - \omega' < \omega_b$

Para la rotura: $\varepsilon'_{cu} = 0.003$ se obtienen los coeficientes α_1 y β_1 :

$$\Omega = \frac{\varepsilon'_c}{\varepsilon_o} = \frac{0.003}{0.002} = 1.5$$

$$\beta_1 = 2 \left[1 - \frac{0.575\Omega^2 - 0.05\Omega^3 - 0.108}{\Omega(1.15\Omega - 0.075\Omega^2 - 0.408)} \right] = 2 \left[1 - \frac{0.575 \cdot 1.5^2 - 0.05 \cdot 1.5^3 - 0.108}{1.5(1.15 \cdot 1.5 - 0.075 \cdot 1.5^2 - 0.408)} \right] = 0.94$$

$$\alpha_1 = \frac{(1.15 - 0.075\Omega - 0.408/\Omega)}{\beta_1} = \frac{(1.15 - 0.075 \cdot 1.5 - 0.408/1.5)}{0.94} = 0.814$$

Pudiéndose utilizar también la tabla 2.4

$$\sum F_x = 0 \Rightarrow C_c - T_s = 0$$

$$(\alpha_1 f'_c)(\beta_1 c_n)b + A'_s f'_s = A_s f_y$$

$$c_n = \frac{(A_s - A'_s)(f_y)}{(\alpha_1 \beta_1) f'_c b} = \frac{(2000 - 0)(300)}{(0.94)(0.814)(25)(300)} = 104.5\text{mm}$$

$$\varphi_n = \frac{\varepsilon'_{cu}}{c_n} = \frac{0.003}{10.45\text{cm}} = 2.871 \cdot 10^{-4} \text{ rad/cm}$$

$$\sum M = 0$$

$$M_n = (\alpha_1 \beta_1 f'_c b) c_n (d - 0.5 \beta_1 c_n) + A'_s f'_s (d - d')$$

$$M_n = (0.94)(0.814)(25)(300)(104.5)[500 - 0.5(0.814)(104.5)] + 0$$

$$M_n = 274331550.8\text{N} \cdot \text{mm} \cong 274,33\text{kN} \cdot \text{m}$$

Para la fluencia: $\varepsilon_s = \varepsilon_y = 0.0015$ se procede a calcular la posición de la línea neutra por la siguiente expresión, que considera que $\varepsilon'_{cy} \leq 0.002$:

$$(f'_c b) \left[\frac{6\varepsilon_y \left[1 - 166.7\varepsilon_y \left(\frac{c_y}{d - c_y} \right) \right]^2}{0.008d - (\varepsilon_y + 0.008)c_y} c_y \right] \left[\frac{d - (1 + 125\varepsilon_y)c_y}{1.5d - (1.5 + 250\varepsilon_y)c_y} c_y + (A'_s - A_s)f_y \right] = 0$$

$$(25 \cdot 300) \left[\frac{6 \cdot 0.0015 \left[1 - 166.7 \cdot 0.0015 \left(\frac{c_y}{500 - c_y} \right) \right]^2}{0.008 \cdot 500 - (0.0015 + 0.008)c_y} c_y \right] \left[\frac{500 - (1 + 125 \cdot 0.0015)c_y}{1.5 \cdot 500 - (1.5 + 250 \cdot 0.0015)c_y} c_y + (0 - 20)300 \right] = 0$$

Expresión que al resolverse ofrece el resultado de: $c_y = 196.5\text{mm}$

Y a partir de la posición de la línea neutra se puede calcular:

$$\varphi_y = \frac{\varepsilon_y}{(d - c)} = \frac{0.0015}{50\text{cm} - 19.65\text{cm}} = 0.494 \cdot 10^{-4} \text{ rad/cm}$$

$$\varepsilon'_{cy} = \frac{c_y}{d - c_y} \varepsilon_y = \frac{199.5}{500 - 196.5} (0.0015) = 0.00097 < 0.002$$

$$\Omega = \frac{\varepsilon'_{cy}}{\varepsilon_o} = \frac{0.00097}{0.002} = 0.485$$

$$\alpha_1 = \frac{6(1 - 0.485/3)^2}{4/0.485 - 1} = 0.582 \quad ; \quad \beta_1 = \frac{4 - 0.485}{6 - 2(0.485)} = 0.699$$

$$\sum M = 0$$

$$M_y = (\alpha_1 f'_c)(\beta_1 c_y)b(d - 0.5\beta_1 c_y) + A'_s f'_s(d - d')$$

$$M_y = [(0.582)(25)][(0.699)(196.5)](300)[500 - 0.5(0.699)(196.5) + 0]$$

$$M_y = 258796081,7 N \cdot mm \cong \mathbf{258,8 kN \cdot m}$$

Finalmente calculando la ductilidad de la sección:

$$\frac{\varphi_n}{\varphi_y} = 5,81$$

Se ratifican las conclusiones obtenidas al comparar la cuantía de la sección con la balanceada de que se trata de una sección dúctil.

En la figura 2,45 se muestra la curva M vs φ simplificada y los principales resultados en la tabla 2.20.

$$2) A'_s = 20 \text{ cm}^2, \quad A_s = 20 \text{ cm}^2, \quad \omega = \omega' = 0,16$$

Antes de realizar cualquier cálculo puede vaticinarse:

- El refuerzo A'_s no alcanzará la fluencia ya que se trata de refuerzo simétrico en vigas.
- La curvatura se incrementará sustancialmente por la disminución del bloque a compresión del hormigón.
- Evaluar la ductilidad solo comparando $\omega - \omega' \leq \omega_b$ no ofrece todos los elementos pues el acero comprimido no fluye.

Después de realizados los cálculos, cuyos resultados se muestran en la figura 2,45, además de confirmar lo anterior puede plantearse:

- En este elemento, hipo-reforzado, con fallo dúctil, el incremento de A'_s hasta llegar al 100% de A_s no ofrece mejoría a la capacidad portante de la viga. Esto justifica la política de usar A'_s solo por razones constructivas.
- El incremento de φ se produce solo después de la fluencia. En la etapa "elástica" el aporte es insignificante también en cuanto a deformación.

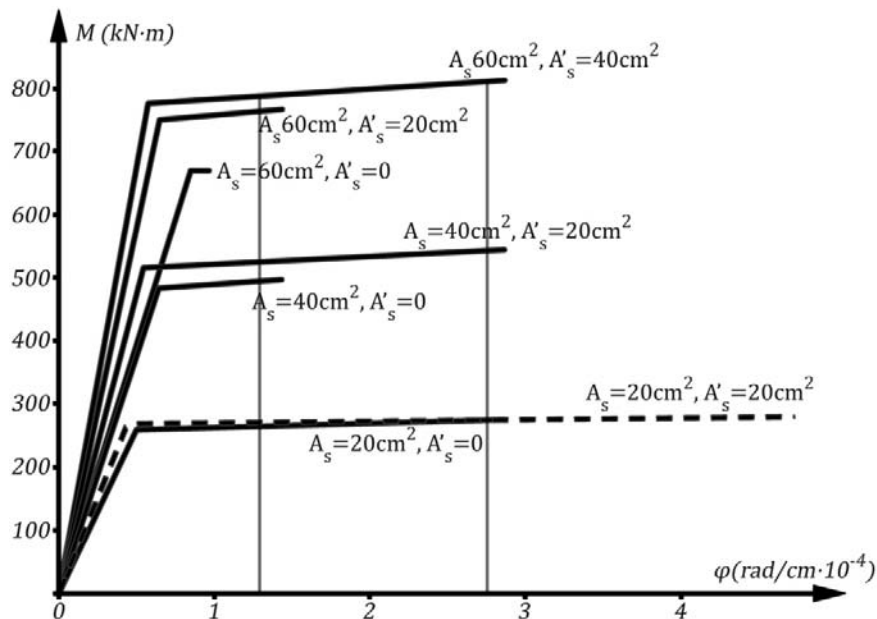


Figura 2,45 Influencia de la cuantía en el comportamiento a flexión

$$3) A'_s = 0, \quad A_s = 40\text{cm}^2, \quad \omega = 0,3$$

Al analizar el valor de ω , se conoce que se está en presencia de un elemento menos dúctil que los anteriores.

Puede apreciarse en la figura 2.45 como el incremento de capacidad portante se logra a partir de una reducción de φ_n en la zona de máximos momentos. En el análisis de las ecuaciones para la rotura puede establecerse:

$$c_n = \frac{(A_s - A'_s)(f_y)}{(\alpha_1\beta_1)f'_c b}$$

Al duplicarse el valor de A_s , se duplica también la profundidad de la línea neutra c_n , que será entonces:

$$c_n = 208,9\text{mm}$$

Y por tanto se reducirá a la mitad la curvatura en la rotura

$$\varphi_n = \frac{\varepsilon'_{cu}}{c_n} = \frac{0.003}{20,89\text{cm}} = 1,435 \cdot 10^{-4} \text{ rad/cm}$$

Para el momento flector en que las secciones 1 y 2 fallan en forma dúctil la sección 3 está en una etapa de comportamiento elástico y sin deformaciones ni fisuras grandes. Pero el incremento al doble de A_s ¿representa una duplicación del momento M_n ? En la ecuación puede apreciarse que al reducirse el brazo, por el incremento de c , se logra solo aumentar un 80%.

$$M_n = (\alpha_1\beta_1f'_c b)c_n(d - 0.5\beta_1c_n) + A'_sf'_s(d - d')$$

$$M_n = (0.94)(0.814)(25)(300)(208,9)[500 - 0.5(0.814)(208,9)] + 0$$

$$M_n = 497281567,4\text{N} \cdot \text{mm} \cong 497,28\text{kN} \cdot \text{m}$$

$$4) A'_s = 20\text{cm}^2, \quad A_s = 40\text{cm}^2, \quad \omega = 0,32, \quad \omega' = 0,16$$

El análisis de esta **sección en la rotura** ofrece las conclusiones siguientes:

- El aporte de A'_s provoca que disminuya c_n y por tanto que φ_n aumente.
- Para en esta sección, menos hipo-reforzada, el acero A'_s si provoca un incremento de M_n , sobre todo porque en la etapa de rotura $\varepsilon'_s > \varepsilon_y$ y por tanto $f'_s = f_y$.
- Para esta sección es interesante comparar los resultados con la sección 1 donde, de la ecuación de fuerzas:

$$c_n = \frac{(A_s - A'_s)(f_y)}{(\alpha_1\beta_1)f'_c b}$$

Por lo que como la relación $A_s - A'_s = 20\text{cm}^2$ es igual al refuerzo de la sección 1, c será el mismo en ambos casos. Del mismo modo el brazo jd y la curvatura φ_n .

Entonces de la ecuación de momento se puede determinar que el incremento de M_n respecto a la sección 1 se produce por la magnitud de M' , ya que el primer término de la ecuación es el mismo que para la primera viga

$$M_n = (\alpha_1\beta_1f'_c b)c_n(d - 0.5\beta_1c_n) + A'_sf'_s(d - d')$$

Siendo:

$$M' = A'_sf'_s(d - d')$$

$$M' = 2000 \cdot 300(500 - 50) = 270000000\text{N} \cdot \text{mm} = 270\text{kN} \cdot \text{m}$$

Estas ecuaciones dejan de ser válidas cuando $\varepsilon'_s < \varepsilon_y$

Para la fluencia: $\varepsilon_s = \varepsilon_y = 0,0015$ se procede a calcular la posición de la línea neutra por la siguiente expresión:

$$0.00675 \left[\frac{\left[1 - 0.25 \left(\frac{c_y}{d - c_y} \right) \right]^2}{4 - 0.0095 c_y} c_y \right] \left[\frac{500 - 1.1875 c_y}{750 - 1.875 c_y} c_y + \left[\frac{60 c_y - 3000}{d - c_y} \right] - 120 = 0 \right.$$

Resuelta esta expresión se comprueba que su solución es $c_y = 224.54595 \text{ mm} \cong \mathbf{224.5 \text{ mm}}$

Y se verifica que para este resultado el acero en compresión no fluye como fue supuesto:

$$\varepsilon'_s = \frac{(c_y - d')}{(d - c_y)} \varepsilon_y = \frac{224.5 - 50}{500 - 224.5} (0.0015) = 0.00095 < 0.0015 \quad \text{¡NO FLUYE!}$$

$$f'_s = E_s \varepsilon'_s = (2 \cdot 10^5) (0.00095) = 190 \text{ MPa}$$

Y a partir de la posición de la línea neutra se puede calcular:

$$\varphi_y = \frac{\varepsilon_y}{(d - c)} = \frac{0.0015}{50 \text{ cm} - 22.45 \text{ cm}} = \mathbf{0.544 \cdot 10^{-4} \text{ rad/cm}}$$

$$\varepsilon'_{cy} = \frac{c}{d - c} \varepsilon_y = \frac{224.5}{500 - 224.5} (0.0015) = 0.0012 < 0.002$$

$$\Omega = \frac{\varepsilon'_{cy}}{\varepsilon_o} = \frac{0.0012}{0.002} = 0.6$$

$$\alpha_1 = \frac{6(1 - 0.6/3)^2}{4/0.6 - 1} = 0.6776 \quad ; \quad \beta_1 = \frac{4 - 0.6}{6 - 2(0.6)} = 0.7083$$

$$M_y = (\alpha_1 f'_c) (\beta_1 c_y) b (d - 0.5 \beta_1 c_y) + A'_s f'_s (d - d')$$

$$M_y = [(0.6776)(25)][(0.7083)(224.5)](300)[500 - 0.5(0.7083)(224.5)] + (2000)(190)(500 - 50)$$

$$M_y = 515702588.6 \text{ N} \cdot \text{mm} \cong \mathbf{515,7 \text{ kN} \cdot \text{m}}$$

$$\mathbf{5) A'_s = 0, \quad A_s = 60 \text{ cm}^2, \quad \omega = 0,48}$$

Prácticamente es un fallo balanceado y por tanto será frágil, brusco y traerá el desplome del elemento. Obviamente se produce un incremento de la capacidad portante pero no al ritmo que se incrementa A_s y se obtiene al costo de un sustancial aumento de la peligrosidad del fallo. Se hace evidente que esta no es la mejor forma de incrementar M_n en una viga.

Siguiendo los enfoques anteriores es fácil determinar cómo se triplica c_n y se reduce en 3 la curvatura en la rotura respecto a la sección 1

En el cálculo del punto de **fluencia** se comprueba que $\varepsilon'_{cy} > 0,002$ por lo que no puede emplearse para obtener la posición de la línea neutra la expresión anterior, solo válida para el diagrama parabólico. En este caso que se emplea el modelo de Hognestad la expresión a emplear es:

$$\left[1,15 - 0,75 \left(\frac{\varepsilon_y}{0,002} \cdot \frac{c_y}{d - c_y} \right) - \frac{0,408}{\frac{\varepsilon_y}{0,002} \cdot \frac{c_y}{d - c_y}} \right] f'_c b c_y - A_s f_y = 0$$

Que para los datos de esta sección esta sección se transforma en:

$$4525 c_y - 2040000 - \frac{4218,75 c_y^2}{500 - c_y} - 6000 \cdot 300 = 0$$

Resuelta esta expresión se obtiene $c_y = 311,5 \text{ mm}$ y se completan el resto de los pasos.

6) $A'_s = 20\text{cm}^2$, $A_s = 60\text{cm}^2$, $\omega = 0,48$, $\omega' = 0,16$

Previo a los cálculos se pueden adelantar las siguientes conclusiones:

- Es una sección con comportamiento menos dúctil que la sección 1, el aporte de A'_s provoca un gran incremento de la capacidad resistente.
- Sin embargo la ductilidad no mejora tanto pues la reducción del bloque de compresiones no es muy significativa.
- Siguiendo el mismo razonamiento que en la sección 4, como $A_s - A'_s = 40\text{cm}^2$ por lo que se corresponde con ductilidad de la sección 3.

7) $A'_s = 40\text{cm}^2$, $A_s = 20\text{cm}^2$, $\omega = 0,48$, $\omega' = 0,32$

Se logra una ductilidad y comportamiento semejantes a las secciones 1 y 4 ya que $A_s - A'_s = 20\text{cm}^2$. Comparando con la sección 6 el aumento de 20cm^2 en compresión no produce un gran incremento en la capacidad resistente de la sección, pero sí de la ductilidad.

8) $A'_s = 0$, $A_s = 20\text{cm}^2$, $\omega = 0,16$, *buscar una solución donde M_n se incremente en 60 kN.m , sin provocar cambios en la curvatura en la rotura.*

Como se mantiene constante φ_n lo será también c_n . Un análisis entonces de la ecuación de momentos dará la respuesta sobre la necesidad de incrementar d

$$M_{n1} = A_s f_y (d - 0.5\beta_1 c_n) = T_s j d$$

Si el incremento es de $M' = 60\text{ kN} \cdot \text{m}$, entonces:

$$M_n' = M_{n1} + 60 = 334,33\text{ kN} \cdot \text{m}$$

Y como se sabe que $c_n = 10,45\text{ cm}$ puede despejarse el peralte requerido de la ecuación de momentos:

$$d = \frac{M_n'}{A_s f_y} + \beta_1 \frac{c_n}{2}$$

$$d = \frac{334330000}{2000 \cdot 300} + 0,819 \frac{104,5}{2} = 600\text{ mm}$$

Resultando un peralte total $h = 650\text{ mm}$

Un procedimiento más sencillo y rápido es determinar el incremento de brazo que genera el incremento M' de momento, entonces:

$$M' = T_s \cdot \Delta j d$$

Por tanto el incremento del brazo y de peralte será:

$$\Delta j d = \frac{M'}{A_s f_y} = \frac{60000000}{2000 \cdot 300} = 100\text{ mm}$$

9) $A'_s = 20\text{cm}^2$, $A_s = 40\text{cm}^2$, $\omega = 0,32$, *buscar una solución donde M_n se incremente en 120 kN.m , sin provocar cambios en la curvatura.*

Tomando como referencia el ejemplo 4, donde el valor M_n es de $544,33\text{ kN.m}$ y $c_n = 10,45\text{ cm}$ al igual que el problema anterior, de la ecuación de momentos:

$$M_n = (\alpha_1 \beta_1 f'_c b) c_n (d - 0.5\beta_1 c_n) + A'_s f'_s (d - d')$$

Donde:

$$M_n' = M_{n4} + 120 = 664,33\text{ kN} \cdot \text{m}$$

Y obteniendo el peralte que provoca este incremento y como c_n es constante, también lo será el aporte del hormigón C_c

$$C_c = (\alpha_1 \beta_1 f'_c b) c_n = 600 \text{ kN}$$

Entonces:

$$d = \frac{M_n' + C_c \beta_1 \frac{c_n}{2} + A_s' f_y d'}{C_c + A_s' f_y}$$

$$d = \frac{664330000 + 600000 \cdot 0,819 \frac{104,5}{2} + 2000 \cdot 300 \cdot 50}{600000 + 2000 \cdot 300} = 600 \text{ mm}$$

Resultando un peralto total $h = 650 \text{ mm}$

Utilizando el procedimiento de calcular el incremento del brazo, en este caso $\Delta j d'$

$$M' = T_s \cdot \Delta j d'$$

Por tanto el incremento del brazo y de peralto será:

$$\Delta j d' = \frac{M'}{A_s f_y} = \frac{120000000}{4000 \cdot 300} = 100 \text{ mm}$$

La Figura 2.45 permite observar las siguientes conclusiones como resumen de estos análisis:

- El acero en compresión mejora la ductilidad de la sección, alejando más la curvatura de agotamiento de la de fluencia en la medida en que crece la cuantía de este refuerzo.
- A su vez el refuerzo en compresión mejora la rigidez de la sección, lo que queda evidenciado con la mayor pendiente de la recta que refleja el comportamiento antes de la entrada en fluencia del acero en tracción. Con ello se mejora el estado límite de deformación.
- La influencia del acero en compresión en la capacidad resistente de la sección no es significativa. Obsérvese que pasar de $A_s' = 0$ a $A_s' = 20 \text{ cm}^2$, sólo significó que la resistencia de la sección se incrementara un 9%, por eso la vía de aumentar A_s' con el afán de lograr mayor ductilidad es loable pero sumamente costoso.
- La comparación de la relación de las cuantías con la balanceada, $(\omega - \omega') : \omega_b$, es una herramienta útil y orienta al proyectista sobre las características generales del fallo. Al incrementar ω' la sección es más dúctil, mientras que al aumentar ω sucede lo contrario.
- Se puede asegurar que el incremento de la capacidad portante que se logra con el aumento del peralto es como regla, más económico y deseado que procurarlo a través de mayor refuerzo, pues además propicia secciones más dúctiles.

Los resultados de las secciones analizadas se muestran en la tabla 2,17:

TABLA 2.17 Puntos singulares para definir el comportamiento de la sección estudiada en el Ejercicio 9.

$A_s' (\text{cm}^2)$	$A_s (\text{cm}^2)$	$M_n (\text{kN} \cdot \text{m})$	$\varphi_n (\frac{\text{rad}}{\text{cm}} \cdot 10^{-4})$	$M_y (\text{kN} \cdot \text{m})$	$\varphi_y (\frac{\text{rad}}{\text{cm}} \cdot 10^{-4})$	φ_n / φ_y
0	20	274,33	2,872	258,8	0,494	5,81
20	20	278,76	4,796	267,01	0,446	10,75
0	40	497,33	1,436	483,97	0,636	2,26
20	40	544,33	2,872	515,70	0,545	5,27
0	60	668,98	0,957	668,78	0,840	1,14
20	60	767,33	1,436	750,22	0,646	2,22
40	60	814,33	2,872	776,99	0,572	2,02

2.7.8 SECCIÓN DE HORMIGÓN PRETENSADO

El procedimiento es análogo al que se explicara para la sección de hormigón armado, sólo que hay que incluir en el análisis del acero pretensado la deformación previa que se introdujo al tesarlo, evaluada preferentemente cuando se han desarrollado ya todas las pérdidas de tensión, es decir, adicionar (si la armadura activa se halla ubicada en la altura traccionada) o sustraer (si lo está en la altura comprimida) a la deformación que originan las cargas (ε_{p2}), la asociada al tesado (ε_{pe}).

Iteración *i*-ésima:

Paso 1: Fijar una deformación ε'_{ci} en la fibra más comprimida del hormigón y determinar los coeficientes α_{1i} y β_{1i} que le corresponden:

$$(0.0001 \leq \varepsilon'_{ci} \leq 0.004) \Rightarrow \alpha_{1i} \text{ y } \beta_{1i}$$

Paso 2: Obtener la posición de la línea neutra (c_i) considerando la condición de equilibrio de fuerza a nivel de sección, y las ecuaciones de compatibilidad de las deformaciones.

$$\sum \text{Fuerzas} = 0 \Rightarrow C_c - T_{pi} = 0$$

$$(\alpha_{1i} f'_c)(\beta_{1i} c_i) b - A_p f_{pi} = 0$$

Aquí también es aconsejable considerar inicialmente que para la deformación ε'_{ci} que se fije, el acero llega a fluir ($f_{pi} = f_{py}$), de manera que c_i puede evaluarse mediante la expresión:

$$c_i = \frac{A_p f_{py}}{(\alpha_{1i} \beta_{1i}) f'_c b}$$

Con c_i así calculada se recurre a la ecuación de compatibilidad de las deformaciones y se verifica si en realidad la armadura entra en fluencia. La singularidad que posee el caso del pretensado ya se explicó arriba: adicionar a la deformación que origina la carga exterior a nivel del acero (ε_{p2i}), la deformación previa efectiva (ε_{pe}), o sea:

$$\varepsilon_{pi} = \varepsilon_{pe} + \varepsilon_{p2i}$$

$$\text{Siendo } \varepsilon_{p2i} = \frac{d_p - c_i}{c_i} \varepsilon'_{ci}$$

Si ($\varepsilon_{pi} \geq \varepsilon_{py}$), el valor de c_i calculado se acepta y se continúa con el siguiente paso.

Si ($\varepsilon_{pi} < \varepsilon_{py}$), el valor de c_i calculado se rechaza.

Cuando esto último es lo que sucede se recurre a la ecuación constitutiva del acero y se sustituye entonces f_{pi} por ($E_p \varepsilon_{pi}$), es decir:

$$(\alpha_{1i} \beta_{1i}) f'_c b c_i - A_p (E_p \varepsilon_{pi}) = 0$$

Trabajando el término ε_{pi} se obtiene:

$$(\alpha_{1i} \beta_{1i}) f'_c b c_i - A_p E_p \left(\varepsilon_{pe} + \frac{d_p - c_i}{c_i} \varepsilon'_{ci} \right) = 0$$

Expresión que se transforma en la siguiente ecuación de 2do grado:

$$[(\alpha_{1i} \beta_{1i}) f'_c b] c_i^2 + A_p E_p (\varepsilon'_{ci} - \varepsilon_{p\infty}) c_i - (A_p E_p d_p) \varepsilon'_{ci} = 0$$

Aquí también se obtienen dos soluciones y sólo una tendrá sentido físico.

Paso 3: Calcular el momento flector M_i mediante la ecuación de equilibrio de momento.

$$\sum \text{Momento} = 0 \Rightarrow M_i - N_{ci} z_{2i} = 0$$

(Tomando momento respecto al centroide de la armadura en tracción)

$$M_i = (\alpha_{1i}\beta_{1i})f'_c b c_i \left(d_p - \frac{1}{2}\beta_i c_i \right)$$

Paso 4: Evaluar el ángulo de giro φ_i .

$$\varphi_i = \varepsilon'_{ci} / c_i$$

La metodología se repite para diferentes deformaciones (ε'_{ci}) y para cada una se obtendrá un par (φ_i, M_i) que, representados todos en un sistema cartesiano M_i vs φ_i , permite definir la curva de comportamiento para el caso que se estudia.

Ejercicio 2,9

Definir el comportamiento bajo cargas de corta duración de la sección de hormigón pretensado indicada en la Figura 2.24(c), reforzada hacia la zona traccionada con dos barras que ofrecen un área total de acero igual a $A_p = 382\text{mm}^2$. Ignorar también la presencia del refuerzo que aparece hacia la zona comprimida de la sección y la contribución del hormigón a tracción.

Cálculos y Discusión para el caso en que se incluye la contribución a tracción del hormigón

En la solución de este ejemplo se adoptan como datos los siguientes (Ver Figura 2.26):

$$b = 300\text{mm}, \quad h = 600\text{mm}, \quad d_s = 60\text{mm}, \quad d_p = h - d_s = 540\text{mm}, \quad A_p = 382\text{mm}^2$$

$$f'_c = 30\text{MPa} \quad \varepsilon_o = 0.002 \quad (\text{carga de corta duración})$$

$$f_{py} = 1\,600\text{MPa}, \quad E_p = 2 \cdot 10^5\text{MPa}, \quad \varepsilon_{py} = \frac{f_{py}}{E_p} = 0.008, \quad \varepsilon_{pe} = \frac{f_{pe}}{E_p} = \frac{900\text{MPa}}{2 \cdot 10^5\text{MPa}} = 0.0045$$

Al igual que en el Ejercicio 2.8 sólo se expondrán los cálculos para una iteración, en este caso la sexta ($i = 6$) de la Tabla 2.18, que resume los resultados de este ejemplo para las 11 iteraciones realizadas. La solución se completa con el estudio de tres instantes singulares del comportamiento, a saber:

- a) Cuando la carga exterior es nula ($M = 0$)

Esta es la situación que tiene lugar en el instante mismo en que se transfiere la fuerza de pretensado y aun no actúa la carga exterior. En este instante la curvatura de la sección es de sentido contrario a la que luego origina la carga (Figura 2.46b). Es una situación virtual en la mayoría de los casos de flexión ya que al transferirse el pretensado con él actúa generalmente una carga, tan siquiera el peso propio, llamada carga concomitante. Sin embargo, es interesante porque origina la máxima compresión en la fibra extrema de la zona pre comprimida, y quizá una tracción elevada en la fibra opuesta. Aun cuando en diseños propiamente dicho debe ser analizado para el pretensado inicial transferido (P_i), aquí se considerará la fuerza efectiva de pretensado (P_e).

- b) Cuando la influencia del pretensado hacia la zona pre comprimida supera la tracción originada por la carga exterior.

Si la flexión es positiva el momento flector originado por la carga exterior tracciona las fibras inferiores, justificando que el pretensado pre comprima hacia esas fibras. Cuando el efecto del pretensado comprime más a esa fibra que la tracción que origina en ella el momento flector, entonces el equilibrio se logra con una fuerza de compresión del hormigón desplazada hacia la

zona pre comprimida. Como las compresiones continúan dándose hacia la fibra pre comprimida, las curvaturas continúan siendo negativas (Figura 2.46c).

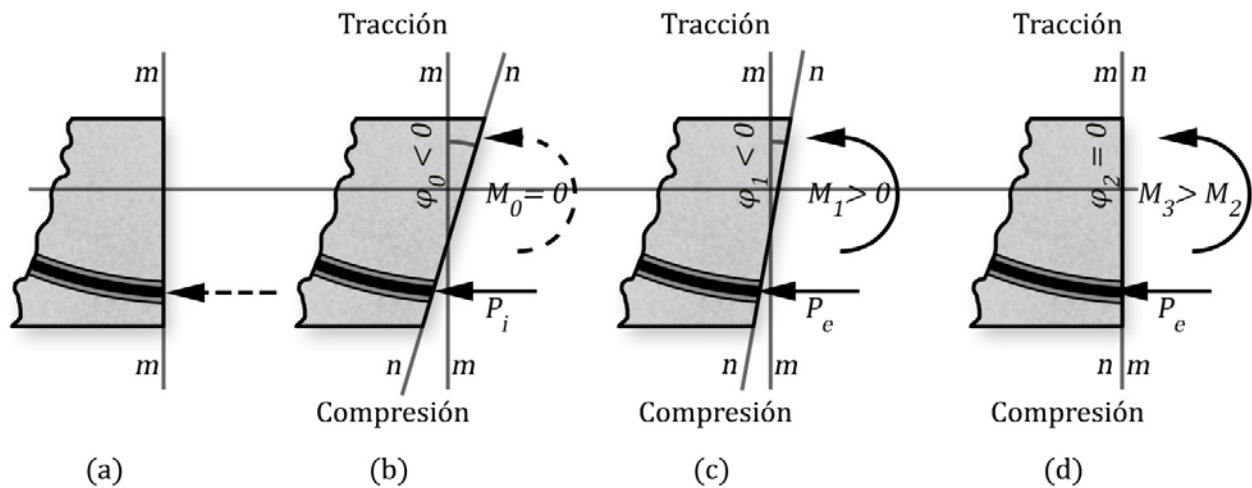


Figura: 2.46 Instantes singulares del comportamiento de secciones pretensadas sometidas a flexión positiva

- c) Cuando la curvatura de la sección se anula ($\varphi = 0$)

Con el incremento de la carga y considerando estable el efecto del pretensado llegará un instante en el que la sección regrese a su estado deformado original (m-m), significando que la curvatura se haga igual a cero. El estudio de este instante es de los más complejo durante el análisis del comportamiento, pues al no existir momento activo en la sección ($M = 0$), el momento reactivo también debe ser nulo lo que obliga a que la compresión que tiene lugar en el hormigón se auto equilibre con la tracción del acero, es decir, que ambas fuerzas sean de igual magnitud y dirección, pero de sentido contrario. La complejidad radica en definir que deformación ha de tener la fibra extrema pre comprimida (ϵ'_{ci}) y con ella la profundidad de la línea neutra, para que se satisfaga el autoequilibrio descrito (Figura 2.46d).

A partir de este instante incrementos sucesivos de la carga exterior continúan ampliando la curvatura positiva de la sección, es decir, aumentando las compresiones de la fibra superior de la sección si es que la flexión es positiva como se viene considerando en este ejemplo, y se resume en la Tabla 2.18.

A) ANÁLISIS DE LA ETAPA EN LA QUE LAS COMPRESIONES TIENEN LUGAR EN LA FIBRA SUPERIOR DE LA SECCIÓN

El análisis de esta etapa se realizará fijando 11 valores diferentes para la deformación a nivel de la fibra en la que la carga exterior (representada por M_i) ejerce una compresión, en este caso la fibra superior. Se mueve esta deformación en el intervalo ($0.0001 \leq \epsilon'_{ci} \leq 0.004$). La Tabla 2.18 recoge los resultados de cada una de estas 11 iteraciones, y sólo a manera de ilustración del procedimiento que ha de seguirse, se aplica a continuación la metodología para una de esas deformaciones.

METODOLOGÍA APLICADA A LA SEXTA ITERACIÓN**Paso 1:** Fijar $\varepsilon'_{c6} = 0.001$

A esta deformación corresponden los siguientes valores de α_{1i} y β_{1i} (Ver Tabla 2.1 para el diagrama parabólico):

$$\Omega_6 = \varepsilon'_{c6} / \varepsilon_o = 0.001 / 0.002 = 0.50 \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} \alpha_{i(6)} = \frac{6[1-\Omega/3]^2}{4/\Omega-1} = \frac{6[1-\frac{0.50}{3}]^2}{\frac{4}{0.50}-1} = 0.5952 \\ \beta_{i(6)} = \frac{4-\Omega}{6-2\Omega} = \frac{4-0.50}{6-2(0.50)} = 0.7000 \end{cases}$$

Paso 2: Obtener la posición de la línea neutra (c_6)

Si se supone que para esta deformación la armadura fluye ($f_{s6} = f_{py} = 1\,600\text{MPa}$), entonces:

$$c_6 = \frac{A_p f_{py}}{[\alpha_{1(6)} \beta_{1(6)}] f'_c b} = \frac{(382\text{mm}^2)(1\,600\text{MPa})}{(0.5952)(0.7000)(30\text{MPa})(300\text{mm})} = 163\text{mm} = 0.163\text{m}$$

Este resultado debe verificar la entrada en fluencia del acero para ratificarlo, de lo contrario debe ser rectificado y para ello se debe investigar la deformación del acero:

$$\varepsilon_{p2(6)} = \frac{d_p - c_6}{c_6} \varepsilon'_{c7} = \frac{0.540\text{m} - 0.163\text{m}}{0.163\text{m}} (0.0010) = 0.0023$$

$$\varepsilon_{p6} = \varepsilon_{pe} + \varepsilon_{p2(6)} = 0.0045 + 0.0023 = 0.0068 < \varepsilon_{py} \quad \Rightarrow \quad \text{La armadura no fluye}$$

Esta conclusión obliga a reevaluar el valor de c_6 , considerando que en realidad la tensión de la armadura es inferior a la de fluencia, lo que implica resolver la ecuación de segundo grado siguiente:

$$[[\alpha_{1(6)} \beta_{1(6)}] f'_c b] c_6^2 + A_p E_p (\varepsilon'_{c6} - \varepsilon_{pe}) c_6 - (A_p E_p d_p) \varepsilon'_{c6} = 0$$

Que sustituyendo conduce a:

$$3\,750(c_6)^2 - 267\,400(c_6) - 41\,256\,000 = 0$$

Cuyas soluciones son:

$$c_{6(1)} = 1464\text{mm} = 0.146\text{m} \quad \text{y} \quad c_{6(2)} = -75\text{mm} = -0.075\text{m}$$

De ellas dos, sólo la primera posee sentido físico; ya se explicó la razón en el caso de la sección de hormigón armado, lo que obliga a determinar para ella la tensión real de trabajo del acero pretensado:

$$\varepsilon_{p2(6)} = \frac{d_p - c_6}{c_6} \varepsilon'_{c6} = \frac{0.540\text{m} - 0.1464\text{m}}{0.1464\text{m}} (0.001) = 0.00276$$

$$\varepsilon_{p6} = \varepsilon_{pe} + \varepsilon_{p2(6)} = 0.0045 + 0.0027 = 0.0072$$

$$< 0.008 \quad \text{Reafirma que la armadura no fluye}$$

$$\therefore f_{p6} = E_p \cdot \varepsilon_{p6} = (2 \cdot 10^5 \text{MPa})(0.0027) = 1\,437\text{MPa} < 1\,600\text{MPa}$$

Paso 3: Determinar el momento flector M_6 recurriendo a la ecuación de equilibrio de momento

$$M_6 = (0.5952)(0.7000)(30\text{MPa})(300\text{mm})(1464\text{mm}) \left[540\text{mm} - \frac{1}{2}(0.5952)(1464\text{mm}) \right] \\ = 268\,388\,125\text{N} \cdot \text{mm}$$

$$\therefore M_6 \cong 268.39\text{kN} \cdot \text{m}$$

Paso 4: Calcular el ángulo de giro φ_6 .

$$\varphi_6 = \varepsilon'_{c6}/c_6 = 0.0010/14.6 \text{ cm} \approx 0.68 \cdot 10^{-4} \text{ rad/cm}$$

B) ANÁLISIS DEL ESTADO DEFORMACIONAL CORRESPONDIENTE A CURVATURA NULA

Se establecerá para esta iteración el valor $i = 1$. Al transferirse el pretensado, si es excéntrico, la sección experimenta un giro de sentido contrario al que luego origina la carga exterior, y sólo cuando esta carga comienza a actuar se va recuperando ese giro hasta llegar a pasar por la condición $\varphi_1 = 0$, es decir, a diferencia de los elementos de hormigón armado, en los elementos pretensados cuando la curvatura o ángulo de giro es nulo, el momento flector es desigual a cero ($M_1 \neq 0$), ocurriendo deformaciones de compresión uniforme en toda la altura de la sección. La Figura 2.47 ilustra este instante.

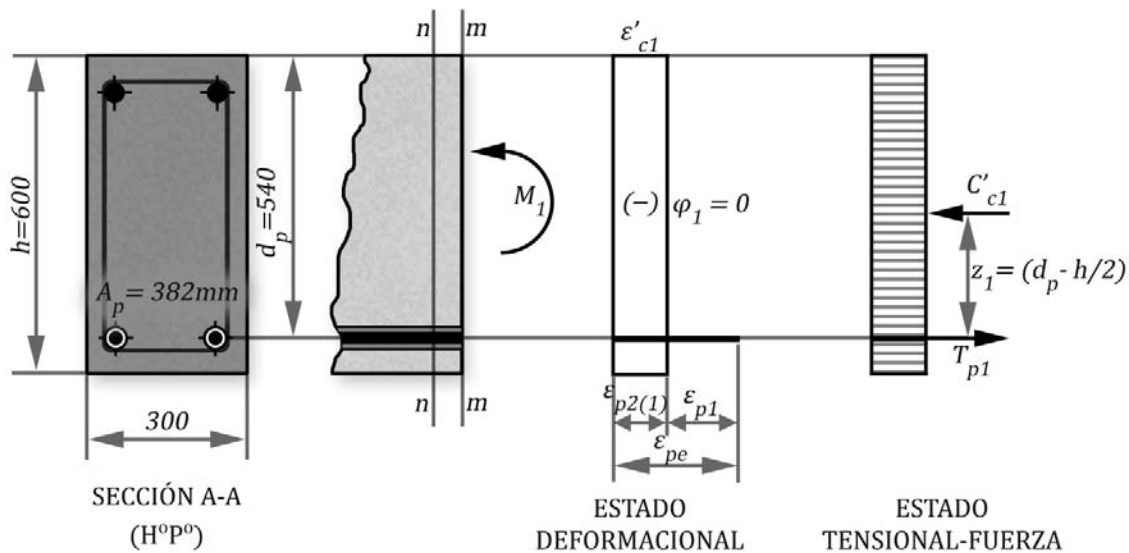


Figura 2.47 Estados deformacional y tensional para el caso en que se registre un giro nulo en la sección.

SOLUCIÓN:

Condiciones de equilibrio

$$\text{FUERZA:} \quad \sum F_x = 0 \quad \Rightarrow \quad C_{c1} = T_{p1}$$

$$\text{MOMENTO:} \quad \sum M = 0 \quad \Rightarrow \quad M_1 = C_{c1} \cdot z_1 = C_{c1} \left(d_p - \frac{h}{2} \right)$$

Ecuación Física o Constitutivas de los materiales

Hormigón

Para el instante que se analiza la sección está uniformemente comprimida en toda su altura y no se justifica recurrir al diagrama rectangular equivalente, sino a la ecuación constitutiva misma que se ha fijado.

Para el diagrama parabólico de Collins y suponiendo cargas de corta duración esta ley es:

$$\begin{aligned}\sigma'_{c1} &= f'_c \left[2 \left(\frac{\varepsilon'_{c1}}{0.002} \right) - \left(\frac{\varepsilon'_{c1}}{0.002} \right)^2 \right] = 1000(30)[\varepsilon'_{c1} - 250(\varepsilon'_{c1})^2] \\ &= 30\,000[\varepsilon'_{c1} - 250(\varepsilon'_{c1})^2]\end{aligned}$$

Acero

Las deformaciones en el acero continúan siendo menores que la de fluencia, el acero estará trabajando en el rango elástico, entonces $f_{p1} = E_p \cdot \varepsilon_{p1}$:

$$\therefore T_{p1} = A_p f_{p1} = A_p (E_p \varepsilon_{p1})$$

Ecuación de Compatibilidad de las deformaciones

Como se trata de un acortamiento en el hormigón ($\varepsilon'_{c1} < 0$), se verifica que:

$$\varepsilon_{p2(1)} = -\varepsilon'_{c1}$$

$$\varepsilon_{p1} = \varepsilon_{pe} + \varepsilon_{p2(1)} = (\varepsilon_{pe} - \varepsilon'_{c1}) \quad \text{Se trata de un acortamiento}$$

Solución de las ecuaciones de campo

$$C_{c1} = T_{p1} \Rightarrow \sigma'_{c1} b h = A_p E_p (\varepsilon_{pe} - \varepsilon'_{c1})$$

Sustituyendo los datos de este ejemplo en la expresión anterior se obtiene finalmente la ecuación:

$$\begin{aligned}30\,000[\varepsilon'_{c1} - 250(\varepsilon'_{c1})^2](300\text{mm})(600\text{mm}) &= (382\text{mm}^2)(200\,000\text{ N/mm}^2)(0.0045 - \varepsilon'_{c1}) \\ \therefore 6\,750\,000(\varepsilon'_{c1})^2 - 27\,382(\varepsilon'_{c1}) + 1.719 &= 0\end{aligned}$$

La solución de esta ecuación cuadrática conduce a dos resultados:

$$\varepsilon'_{c1(1)} \cong 0.004 \quad \text{y} \quad \varepsilon'_{c1(2)} \cong 6.38 \cdot 10^{-5}$$

El primero de estos resultados se ignora pues resulta demasiado grande para el estado de carga que se analiza (nótese que coincide con la deformación máxima del hormigón de 0.004), entonces el segundo de ellos será el resultado con sentido físico.

Comprobación del equilibrio interior de la sección**Fuerzas interiores:**

$$\begin{aligned}C_{c1} &= 30\,000 \left[6.38 \cdot 10^{-5} - 250(6.38 \cdot 10^{-5})^2 \right] (300\text{mm})(600\text{mm}) \approx 339\,025\text{N} \\ &\approx 339\text{kN}\end{aligned}$$

$$T_{p1} = (382\text{mm}^2)(200\,000\text{ N/mm}^2)(0.0045 - 6.38 \cdot 10^{-5}) \approx 338\,926\text{N} \approx 339\text{kN}$$

También se puede conocer la tensión en la fibra más comprimida del hormigón:

$$\sigma'_{c1} = 30\,000 \left[6.38 \cdot 10^{-5} - 250(6.38 \cdot 10^{-5})^2 \right] = 1.88\text{MPa}$$

Repárese en la tensión tan baja a la que trabaja el hormigón cuando actúa una carga tal que revierte y anula el giro que produjo el pretensado transferido a la sección.

Determinación de la Curvatura

El momento flector que llega a descomprimir al hormigón a nivel del acero pretensado viene dado por:

$$M_1 = C_{c1} \cdot z_1 = C_{c1} \cdot \left(d_p - \frac{h}{2} \right) = 339\text{kN} \left(0.54\text{m} - \frac{0.60\text{m}}{2} \right) = 81.4\text{kN.m}$$

Determinación de la Curvatura

$$\varphi_1 = \frac{\varepsilon'_{c1}}{c_1} = \frac{6.38 \cdot 10^{-5}}{-\infty} = 0\text{ rad/cm}$$

Obteniéndose las coordenadas del punto **(0 , 81.4kN.m)**

C) ANÁLISIS DE LA ETAPA EN LA QUE LAS COMPRESIONES TIENEN LUGAR EN LA FIBRA INFERIOR DE LA SECCIÓN

Se mueve esta deformación en el intervalo $(-0.0001 \leq \varepsilon'_{ci} \leq -0.000436)$, el último en punto de momento cero. La Tabla 2.18 recoge los resultados de cada una de estas iteraciones, y sólo a manera de ilustración del procedimiento que ha de seguirse, se aplica a continuación la metodología para una de esas deformaciones, teniendo el apoyo de la figura 2,48

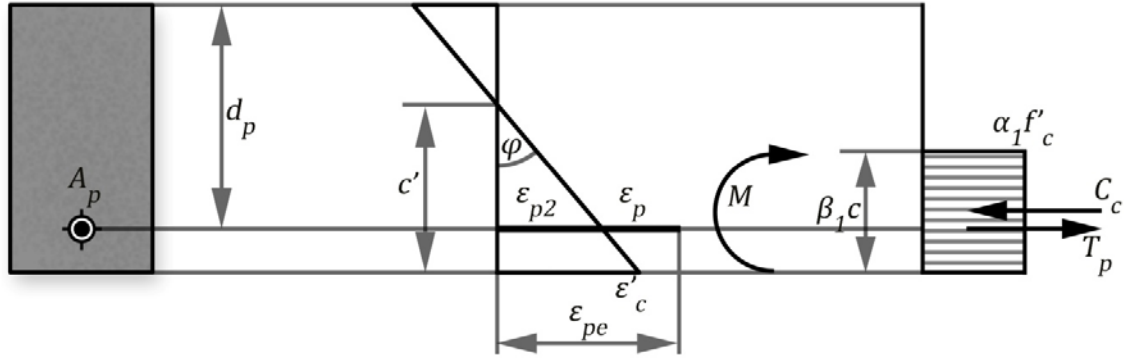


Figura 2,48: Aporte del hormigón a tracción. Fibra superior traccionada

Paso 1: Fijar $\varepsilon'_{c14} = -0.0015$

A esta deformación corresponden los siguientes valores de α_{1i} y β_{1i} (Ver Tabla 2.13 para el diagrama parabólico):

$$\Omega_7 = \varepsilon'_{c14} / \varepsilon_o = 0.00015 / 0.002 = 0.075$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \alpha_{1(14)} = \frac{6[1-\Omega/3]^2}{4/\Omega-1} = \frac{6[1-\frac{0.075}{3}]^2}{\frac{4}{0.075}-1} = 0.109 \\ \beta_{1(14)} = \frac{4-\Omega}{6-2\Omega} = \frac{4-0.075}{6-2(0.075)} = 0.671 \end{cases}$$

Paso 2: Obtener la posición de la línea neutra (c_{14})

La tensión de la armadura es inferior a la de fluencia, lo que implica resolver la ecuación de segundo grado siguiente:

$$(\alpha_{1(14)} f'_c)(\beta_{1(14)} c_{14})b - A_p E_s \left(\varepsilon_{pe} - \frac{c_{14} - d_{ps}}{c_{14}} \varepsilon'_{c14} \right) = 0$$

$$[\alpha_{1(14)} \beta_{1(14)}] f'_c b c_{14}^2 + A_p E_p (\varepsilon'_{c14} - \varepsilon_{pe}) c_{14} - (A_p E_p d_{ps}) \varepsilon'_{c14} = 0$$

Cuyas soluciones son:

$$c_{14(1)} = 507 \text{ mm} = 0.507 \text{ m} \quad \text{y} \quad c_{14(2)} = -75 \text{ mm} = -0.075 \text{ m}$$

De ellas dos, sólo la primera posee sentido físico; lo que obliga a determinar para ella la tensión real de trabajo del acero pretensado:

$$\frac{\varepsilon'_c}{c_{14}} = \frac{\varepsilon_{p2(14)}}{c_{14} - d_{ps}}$$

$$\varepsilon_{p2(14)} = \frac{c_{14} - d_{ps}}{c_{14}} \varepsilon'_{c14} = \frac{0.507 \text{ m} - 0.06 \text{ m}}{0.507 \text{ m}} (0.00015) = 0.000132$$

$$\varepsilon_{p(14)} = \varepsilon_{po} - \varepsilon_{p2(14)} = 0.0045 - 0.000132 = 0.004368$$

< 0.008 Reafirma que la armadura no fluye

$$\therefore f_{p14} = E_p \cdot \varepsilon_{p14} = (2 \cdot 10^5 \text{ MPa})(0.0004368) = 873,6 \text{ MPa} < 1\,600 \text{ MPa}$$

Paso 3: Determinar el momento flector M_{12} recurriendo a la ecuación de equilibrio de momento

$$M_{14} = (\alpha_{1(14)} \beta_{1(14)}) f'_c b c_{14} \left(\frac{1}{2} \beta_{1(14)} c_{14} - d_{ps} \right)$$

$$M_{14} = (0.109)(0.671)(30 \text{ MPa})(300 \text{ mm})(507 \text{ mm}) \left[\frac{1}{2} (0.671)(507 \text{ mm}) - 60 \text{ mm} \right]$$

$$= 36\,738\,925 \text{ N} \cdot \text{mm}$$

$$\therefore M_{14} \cong 36,74 \text{ kN} \cdot \text{m}$$

Paso 4: Calcular el ángulo de giro φ_{12} .

$$\varphi_{14} = \varepsilon'_{c14} / c_{14} = -0.00015 / 50,7 \text{ cm} \cong -0.03 \cdot 10^{-4} \text{ rad/cm}$$

Los resultados para este punto se muestran en la tabla 2.18.

En la figura 2.51 se señala también el supuesto caso de que el acero pretensado no se someta a la deformación previa, $\varepsilon_{pe} = 0$, o sea que se estaría en presencia de una sección de HA. Aquí se aprecian las virtudes del HP en cuanto al mejoramiento del comportamiento de la sección en la etapa de servicio.

D) ANÁLISIS DEL ESTADO DEFORMACIONAL CORRESPONDIENTE A CARGA EXTERIOR NULA

Estableciendo esta iteración como $i = 0$, se trata de hallar la curvatura de la sección ($\varphi_0 \neq 0$) para la condición $M_0 = 0$. Comprender el significado de que exista giro, aun cuando no exista momento exterior, exige interiorizar la idea de que las fuerzas reactivas en la sección deben ser colineales, condición que se observa en la Figura 2.49.

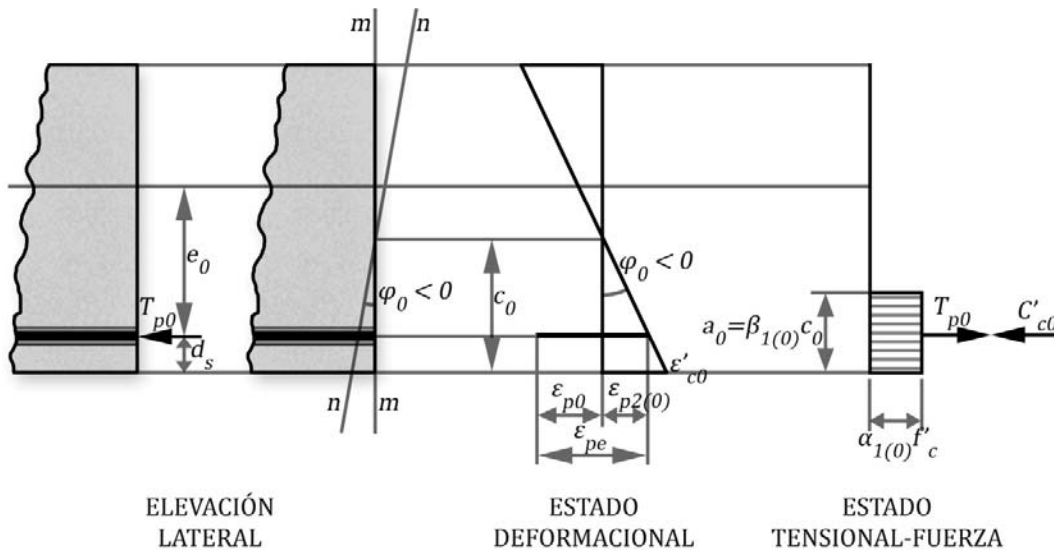


Figura. 2.49 Estados deformacional y tensional para el caso en que no exista carga exterior y sólo actúe sobre la sección la fuerza excéntrica de pretensado ($\varphi_i < 0$, $M_{ext.} = 0$).

SOLUCIÓN:**Condiciones de equilibrio**

FUERZA: $\sum F_x = 0 \Rightarrow C_{c0} = T_{p0}$

MOMENTO: Como el momento exterior es nulo las fuerzas reactivas (acero traccionado y hormigón comprimido), tienen que ser colineales, es decir, el brazo del par formado por ellas es nulo. Entonces:

$$\frac{\beta_{1(0)} \cdot c_0}{2} = d_s \Rightarrow \frac{\beta_{1(0)}}{2} = \frac{d_s}{c_0}$$

Ecuación Física o Constitutivas de los materiales**Hormigón**

Transformando la ley constitutiva del hormigón en el diagrama rectangular que le es equivalente mediante los coeficientes $\alpha_{1(0)}$ y $\beta_{1(0)}$ se puede escribir la contribución en fuerza de este material mediante la igualdad:

$$C_{c0} = [\alpha_{1(0)} f'_c] [\beta_{1(0)} c_0] b$$

En la Tabla 2.1 se puede comprobar que para el diagrama parabólico estos coeficientes adoptan las siguientes leyes:

$$\alpha_{1(0)} = \frac{6[1 - \Omega/3]^2}{4/\Omega - 1} = \frac{6 \left[1 - \frac{\varepsilon'_{c0}}{3\varepsilon_o}\right]^2}{\frac{4\varepsilon_o}{\varepsilon'_{c0}} - 1} \Rightarrow \alpha_{1(0)}|_{\varepsilon_o=0.002} = \frac{6\varepsilon'_{c0}(1 - 166.66\varepsilon'_{c0})^2}{0.008 - \varepsilon'_{c0}}$$

$$\beta_{1(0)} = \frac{4 - \Omega}{6 - 2\Omega} = \frac{4 - \frac{\varepsilon'_{c0}}{\varepsilon_o}}{6 - 2\left(\frac{\varepsilon'_{c0}}{\varepsilon_o}\right)} \Rightarrow \beta_{1(0)}|_{\varepsilon_o=0.002} = \frac{0.008 - \varepsilon'_{c0}}{0.012 - 2\varepsilon'_{c0}}$$

Acero

A su vez el acero, para esta situación, pierde tensión porque se acorta, y si el estiramiento previo queda muy por debajo de la deformación de fluencia, se puede garantizar que $f_{p0} < f_{py}$, y en consecuencia $f_{p0} = E_p \varepsilon_{p0}$, entonces:

$$\therefore T_{p0} = A_p f_{p0} = A_p (E_p \varepsilon_{p0})$$

Ecuación de Compatibilidad de las deformaciones

$$\frac{\varepsilon_{p2(0)}}{c_0 - d_s} = \frac{\varepsilon'_{c0}}{c_0} \Rightarrow \varepsilon_{p2(0)} = \frac{c_0 - d_s}{c_0} \varepsilon'_{c0} = \left(1 - \frac{d_s}{c_0}\right) \varepsilon'_{c0}$$

$$\varepsilon_{p0} = \varepsilon_{pe} - \varepsilon_{p2(0)} \quad \text{Se trata de un acortamiento}$$

Sustituyendo la conclusión de la segunda condición de equilibrio (en este caso brazo nulo, $d_s/c_0 = \beta_{1(0)}/2$), en la expresión de $\varepsilon_{p2(0)}$, se llega a:

$$\varepsilon_{p2(0)} = \left(1 - \frac{\beta_{1(0)}}{2}\right) \varepsilon'_{c0}$$

El giro que se está evaluando produce un acortamiento de la deformación previa provocada, de manera que:

$$\varepsilon_{p0} = (\varepsilon_{pe} - \varepsilon_{p2(0)}) = \varepsilon_{pe} + \frac{\beta_{1(0)} \varepsilon'_{c0}}{2} - \varepsilon'_{c0}$$

Solución de las ecuaciones de campo

Sustituyendo en la ecuación de equilibrio de fuerzas el resultado de las deducciones que se han realizado hasta aquí, se llega a una expresión que depende sólo de ε'_{c0} , cuya solución física permite hallar la curvatura que se investiga:

$$[\alpha_{1(0)}\beta_{1(0)}]f'_c b c_0 = A_p E_p \varepsilon_{p0} \Rightarrow \alpha_{1(0)} f'_c \left(\frac{2d_s}{c_0}\right) c_0 b = A_p E_p \left(\varepsilon_{pe} + \frac{\beta_{1(0)} \varepsilon'_{c0}}{2} - \varepsilon'_{c0}\right)$$

$$\therefore 2\alpha_{1(0)} f'_c d_s b = A_p E_p \left(\varepsilon_{pe} + \frac{\beta_{1(0)} \varepsilon'_{c0}}{2} - \varepsilon'_{c0}\right)$$

Expresando $\alpha_{1(0)}$ y $\beta_{1(0)}$ como función de ε'_{c0} se llega a la ecuación:

$$2 \left[\frac{6\varepsilon'_{c0}(1 - 166.66\varepsilon'_{c0})^2}{0.008 - \varepsilon'_{c0}} \right] f'_c d_s b = A_p E_p \left[0.0045 + 0.5 \left(\frac{0.008 - \varepsilon'_{c0}}{0.012 - 2\varepsilon'_{c0}} \right) \varepsilon'_{c0} - \varepsilon'_{c0} \right]$$

Y sustituyendo los datos de este ejemplo en la expresión anterior se obtiene finalmente la ecuación:

$$72\,000(\varepsilon'_{c0})^4 - 1\,318.92(\varepsilon'_{c0})^3 + 8.21912(\varepsilon'_{c0})^2 - 0.0184552(\varepsilon'_{c0}) + 0.0000066 = 0$$

La solución analítica de esta ecuación es ajena a los fines del texto, sin embargo, se sugiere recurrir a MathCad para resolverla y comprobar que la única solución con sentido físico es $\varepsilon'_{c0} = \mathbf{0.0004368}$.

Para este resultado se obtienen los siguientes valores de las variables físicas del problema:

$$\alpha_{1(0)} = \frac{6(0.0004368)[1 - 166.66(0.0004368)]^2}{0.008 - 0.0004368} = \mathbf{0.2979}$$

$$\beta_{1(0)} = \frac{0.008 - 0.0004368}{0.012 - 2(0.0004368)} = \mathbf{0.6797}$$

$$\varepsilon_{p0} = \varepsilon_{pe} + \frac{\beta_{1(0)} \varepsilon'_{c0}}{2} - \varepsilon'_{c0} = 0.0045 + \frac{0.6797(0.0004368)}{2} - 0.0004368 = \mathbf{0.00421}$$

$$< \varepsilon_{py}$$

$$c_0 = \frac{A_p E_p}{\alpha_{1(0)} \beta_{1(0)} f'_c b} (\varepsilon_{p0}) = \frac{(382\text{mm}^2)(2 \cdot 10^5 \text{ N/mm}^2)}{(0.2979)(0.6797)(30 \text{ N/mm}^2)(300\text{mm})} (0.00421)$$

$$= \mathbf{176.5\text{mm}}$$

A los efectos del cálculo de la curvatura de la sección, el valor de c_0 calculado se debe considerar negativo porque se está evaluando desde la fibra inferior de la sección.

Comprobación del equilibrio interior de la sección**Fuerzas interiores:**

$$C_{c0} = [\alpha_{1(0)}\beta_{1(0)}]f'_c b c_0 = (0.2979)(0.6797)(30 \text{ N/mm}^2)(300\text{mm})(176.5\text{mm})$$

$$= 321\,643\text{N} \approx \mathbf{321.6\text{kN}}$$

$$T_{p0} = A_p E_p \varepsilon_{p0} = (382\text{mm}^2)(2 \cdot 10^5 \text{ N/mm}^2)(0.00421) = 321\,644\text{N} \approx \mathbf{321.6\text{kN}}$$

Momento

En este análisis la condición de momento ($\sum M = 0$) se satisface sólo si el brazo del par interior es cero ya que las fuerzas interiores no lo son. A su vez para que el brazo sea nulo debe satisfacerse la condición:

$$\frac{\beta_{1(0)} \cdot c_0}{2} = d_s \Rightarrow \frac{(0.6797)(176.5\text{mm})}{2} = 60\text{mm}$$

$$59.98\text{mm} \cong 60\text{mm} \quad \text{¡VERIFICA!}$$

Estos dos últimos resultados verifican el equilibrio de fuerzas en la sección. En efecto:

FUERZA: $\sum F_x = 0 \Rightarrow 321.6kN - 321.6kN = 0 \quad \text{¡VERIFICA!}$

MOMENTO: $\sum M = 0 \Rightarrow \begin{cases} M = C_{c0} \cdot (\text{Brazo}) = 321.6kN(0) = 0 \\ M = T_{p0} \cdot (\text{Brazo}) = 321.6kN(0) = 0 \end{cases}$

¡VERIFICA!

Determinación de la Curvatura

La curvatura que se está determinando será en este caso:

$$\varphi_0 = \frac{\varepsilon'_{c0}}{c_0} = \frac{0.0004368}{-17.65cm} = -0.247 \cdot 10^{-4} \text{ rad/cm}$$

Finalmente, las coordenadas del punto que se investiga con esta iteración, y que se incorpora a la Tabla 2.18, resultan ser: **$(-0.247 \cdot 10^{-4} \text{ rad/cm}, 0)$**

Graficando los resultados se obtiene la curva de comportamiento que se ilustra en la siguiente Figura.2.50

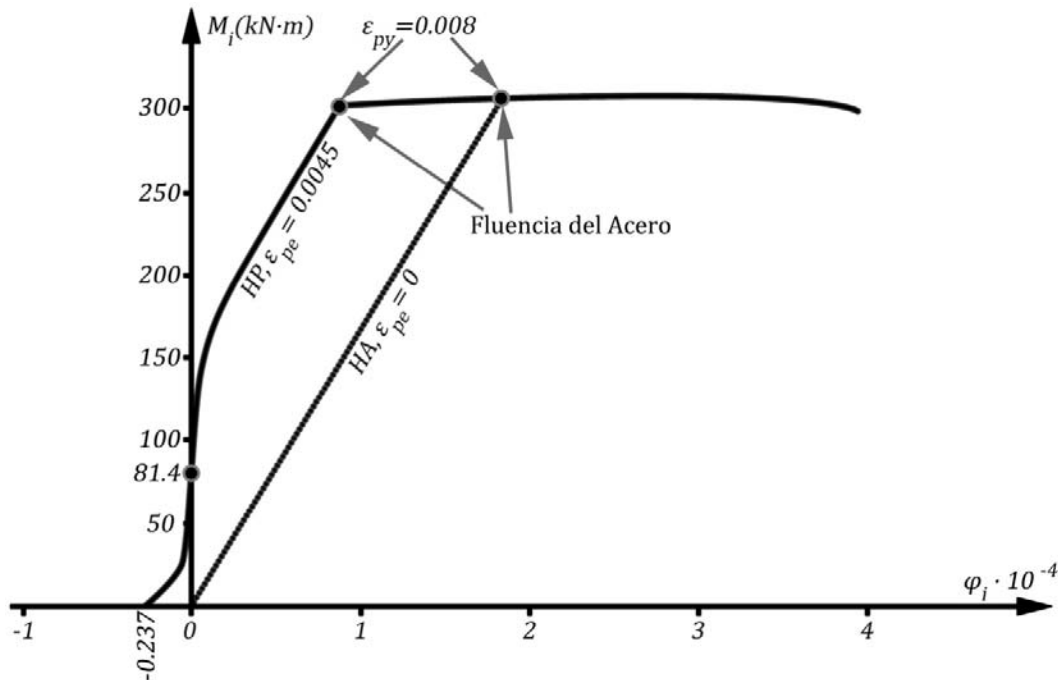


Figura 2.50 Curva de comportamiento de la sección de hormigón pretensado

Repárese en el hecho de que durante la solución del ejercicio se ha ignorado la capacidad resistente del hormigón a tracción, a pesar de su favorable influencia en la etapa de trabajo bajo cargas de utilización, y también la presencia de la armadura en compresión, ya sea ordinaria o pretensada, influencia que será evaluada detalladamente posteriormente. Un análisis de la curva de comportamiento obtenida en este ejemplo permite arribar a las siguientes conclusiones:

- Después que el acero fluye la capacidad resistente de la sección tiene pequeñas variaciones en un rango amplio de valores de ε'_c , específicamente en el rango de deformaciones comprendido en el intervalo $0.0015 \leq \varepsilon'_c \leq 0.004$, tal como ocurrió en las secciones de hormigón armado.

- b) En la etapa de agotamiento, propia de deformaciones situadas en el mismo intervalo anterior, la variación del brazo del par se mantiene prácticamente invariable como puede verse en la Tabla 2.18.

TABLA 2.18 Ordenadas de puntos (M_i, φ_i) para construir la curva de comportamiento de la sección de hormigón pretensado

	$\varepsilon'_{ci} \cdot 10^{-3}$	Ω	α_i	β_i	c_i (cm)	ε_{pi}	f_{pi} (MPa)	z_i (cm)	M_i (kN · m)	$\varphi_i \cdot 10^{-4}$ (rad/cm)
1	4.0	2.00	0.6667	1.0000	10.19	0.0217	1 600	48.91	298.92	3.93
2	3.5	1.75	0.8102	0.9000	9.31	0.0213	1 600	49.81	304.43	3.76
3	3.0	1.50	0.9000	0.8333	9.05	0.0194	1 600	50.23	306.99	3.31
4	2.5	1.25	0.9280	0.7857	9.31	0.0165	1 600	50.34	307.68	2.68
5	1.5	0.75	0.7788	0.7222	12.07	0.0097	1 600	49.64	303.40	1.24
6	1.0	0.50	0.5952	0.7000	16.3	0.0068	Como $\varepsilon_{pi} < \varepsilon_{py}$ la armadura no fluye y el valor de c_i que se calculara bajo ese presupuesto se rechaza			
	1.222	0,611	0,686	0,709	13.96	0.008	1600		299,79	0.88
	1.0	0.50	0.5952	0.7000	14.64	0.0072	1437.5	48.87	268.39	0.68
7	0.5	0.25	0.3361	0.6818	19.85	0.0054	1072.0	47.23	193.41	0.25
8	0.2	0.10	0.1438	0.6724	40.12	0.0046	913.8	40.51	141.43	0.05
9	0.1	0.05	0.0734	0.6695	77.18	0.0045	894.0	28.15	96.19	0.01
10	0.0638	-	-	-	$-\infty$	0.0044	887	24	81.34	0.00
11	-0.15	0,075	0,109	0,671	- 50.70	0.00437	874	11,01	36.74	-0.0296
12	-0.20	0,1	0,144	0,672	- 38.09	0.00433	866	6,80	22.47	-0.0526
13	-0.4368	0.218	0.2979	0.6797	- 17.65	0.00421	842	0	0.00	-0.247

Nota: En las tres últimas iteraciones el signo de ε'_{ci} se ha considerado negativo indicando que se refieren a una compresión, pero a nivel de la fibra inferior de la sección.

- c) En el rango propio de las cargas de servicio $\varepsilon'_c \leq 0.0005$ el brazo varía significativamente, llegando incluso a ser nulo, pero lo hace con escasa variación en la tensión del acero, cualidad distintiva del hormigón pretensado que procura el reacomodo de la capacidad resistente de la sección mediante la variación del brazo en lugar de la fuerza, mientras que el hormigón armado lo hace de manera contraria. Obsérvese el resumen que relacionan las Tablas 2.19 y 2.20.
- d) Esta conclusión es cierta sólo dentro de la etapa de servicio, es decir, mientras el acero no se acerque a la fluencia; en cuyo caso la respuesta de la sección se invierte; y las deformaciones que refieren ambas tablas son propias de esta etapa. En efecto, para asegurar que en servicio el hormigón trabaje en régimen “cuasi” elástico debe verificarse la condición $\sigma'_{c1}/f'_c < 0.45$, lo que sucede para valores de $\varepsilon'_c \leq 0.0005$:

$$\frac{\sigma'_{c1}}{f'_c} = \frac{f'_c [2(\varepsilon'_{c1}/0.002) - (\varepsilon'_{c1}/0.002)^2]}{f'_c} = \frac{f'_c [2(0.0005/0.002) - (0.0005\varepsilon'_{c1}/0.002)^2]}{f'_c} = 0.438 < 0.45$$

Tabla 2.19 Variación que experimente la tensión del acero y el brazo en la etapa de servicio en la sección de hormigón pretensado analizada en el Ejercicio 2,10.

ε'_{ci}	f_{pi} (MPa)	$\Delta f_p = (f_{pi} - f_{p(i-1)})/f_{pi}$ (%)	z_i (cm)	$\Delta z = (z_i - z_{(i-1)})/z_i$ (%)
0.0005	1072.0		47.23	
0.0003	954.0	11	44.40	6
0.0002	913.8	4.2	40.51	8.8
0.0001	894.0	2.1	28.15	30
0.0004368	842	5.8	0	Muy elevado

Tabla 2.20 Variación que experimente la tensión del acero y el brazo en la etapa de servicio en la sección de hormigón armado analizada en el Ejercicio 2,8.

ε'_{ci}	f_{pi} (MPa)	$\Delta f_p = (f_{pi} - f_{p(i-1)})/f_{pi}$ (%)	z_i (cm)	$\Delta z = (z_i - z_{(i-1)})/z_i$ (%)
0.0005	188.9	-	47.63	-
0.0003	115.8	38.7	47.78	0.3
0.0002	78.0	32.6	47.85	0.1
0.0001	39.4	49.5	47.92	0.1
0.0000	0.00	Muy elevado	0.00	-

- e) Al igual que en el caso de la sección de hormigón armado, para la cuantía de refuerzo que se ha utilizado en este ejemplo, al entrar en fluencia el acero la sección sufre grandes deformaciones (curvatura); es como si anunciara la inminencia de su fallo, o sea, ocurre un fallo de tipo dúctil. Un aumento de la cantidad de refuerzo puede dar lugar a un fallo frágil.
- f) La curva de comportamiento (M vs φ) revela dos regiones cualitativamente diferentes: una inicial en la que la respuesta de la sección es prácticamente lineal y lo es en un rango de deformación mucho más amplio que en la sección de hormigón armado; y una segunda que confirma la plastificación del hormigón a partir de la entrada en fluencia del acero, y con ella la constancia de la capacidad de la sección. La primera se ajusta a una recta con una pendiente elevada que denota la mayor rigidez en este rango de carga, correspondiente a las cargas normalizadas de servicio (de ahí que en pretensado se puedan utilizar las expresiones de la resistencia de materiales para modelar esta etapa, por ejemplo, la expresión de Navier para evaluar los esfuerzos normales que tienen lugar en la sección de hormigón bajo el efecto combinado del pretensado y la carga exterior), mientras que la segunda puede asociarse también a una recta, pero cuasi horizontal, esto último cuando se trata de cuantías de acero que aseguren ductilidad.
- g) En el rango de deformaciones (cargas) que se ha estudiado la sección ha estado trabajando desde parcialmente comprimida, con acortamiento máximos en la fibra superior, a parcialmente comprimida en la fibra inferior con acortamientos máximos hacia esa región de la sección. Para un estado de carga específico la sección se encuentra uniformemente comprimida ($\varphi = 0$), aun existiendo carga exterior, lo que no sucede nunca en hormigón armado.

- h) Como el pretensado asegura con sus pre compresiones que la sección sea efectiva prácticamente en toda su altura durante la etapa de servicio (comprimida en su altura h), se justifica la utilización hormigones de alta calidad.

2.7.8.1 INFLUENCIA DE LA RESISTENCIA A TRACCIÓN DEL HORMIGÓN

Como se demostró para secciones de Hormigón Armado despreciar el aporte a tracción del hormigón no tiene ningún peso en el comportamiento de estas a flexión. En el caso de secciones de Hormigón Pretensado, donde el momento de fisuración es mucho mayor, tiene una significación mayor. Para demostrar lo anterior se comparan dos soluciones:

1. **Despreciando el aporte del hormigón a tracción** tanto cuando se tracciona la fibra superior como la inferior. Los resultados se muestran en la tabla 2,24, calculados como el ejercicio anterior.

$$\begin{array}{llll} b = 30\text{cm} & h = 60\text{cm} & f'_c = 30\text{MPa} & f_{py} = 1400\text{MPa} \\ E_s = 2 \cdot 10^5\text{MPa} & \varepsilon_{po} = 0.005 & d_{ps} = 10\text{cm} & A_p = 10\text{cm}^2 \end{array}$$

DIAGRAMA PARABÓLICO

TABLA 2,24: Curva de comportamiento sin el aporte del hormigón a tracción.

ε'_{ci} (%)	Ω	α_i	β_i	ε_{pi} (%)	c_i (cm)	M_i (kN · m)	$\varphi_i \cdot 10^{-4}$ (rad/cm)
0.4	2	0.667	1.000	0.96	23.33	536.67	1.71
0.35	1.75	0.810	0.900	0.97	21.33	565.6	1.64
0.3	1.5	0.900	0.833	0.92	20.74	579.01	1.45
0.25	1.25	0.928	0.786	0.84	21.33	582.67	1.17
0.2	1	0.889	0.750	0.73	23.33	577.5	0.86
0.15	0.75	0.779	0.722	0.64	25.46	526.01	0.59
0.1	0.5	0.595	0.700	0.57	30.17	446.24	0.33
0.05	0.25	0.336	0.682	0.5	48.62	335.19	0.1
-0.05	0.25	0.336	0.682	0.494	44.721	48.384	-0.112
-0.075	0.375	0.475	0.69	0.452	30.451	4.612	-0.246
-0.0794	0.397	0.554	0.692	0.413	28,906	0,024	-0.275

2. **Considerando el aporte del hormigón a tracción**, se abordan las ecuaciones de diseño por separado cuando está traccionada la fibra inferior y cuando lo está la superior. A continuación se detallan las correspondientes al primer caso (ver figura 2,51)

Las ecuaciones de compatibilidad

$$\begin{aligned} \frac{\varepsilon'_c}{c} &= \frac{\varepsilon_{p2}}{d_p - c} = \frac{\varepsilon_{cmax}}{x} \\ \varepsilon_{cmax} &= 0,0001 & \varepsilon_p &= \varepsilon_{p2} + \varepsilon_{po} \\ f_r &= \varepsilon_{cmax} E_c \\ E_c &= 4700 \sqrt{f'_c} \end{aligned}$$

Y las ecuaciones de equilibrio:

$$\Sigma F = 0 \quad \Rightarrow \quad C_c - T_c - T_p = 0$$

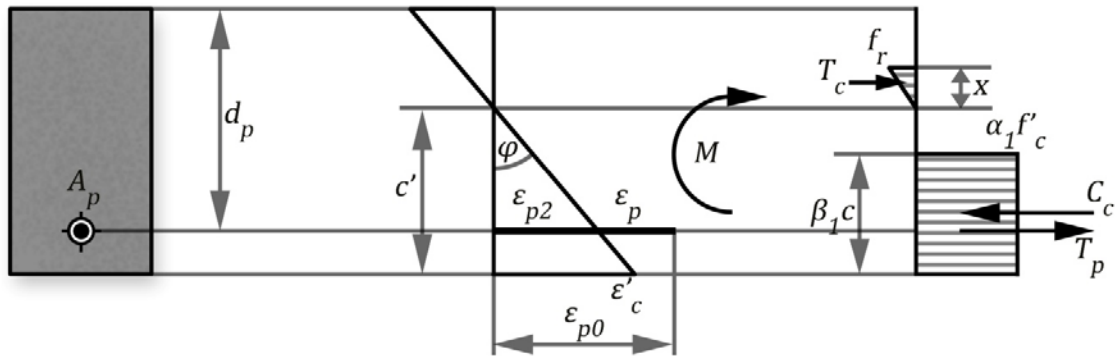


Figura 2,52: Aporte del hormigón a tracción. Fibra superior traccionada

Las ecuaciones de compatibilidad

$$\frac{\epsilon'_c}{c'} = \frac{\epsilon_{p2}}{c' - d_{ps}} = \frac{\epsilon_{cmax}}{x}$$

$$\epsilon_p = \epsilon_{p0} - \epsilon_{p2}$$

Y las ecuaciones de equilibrio:

$$\sum F = 0 \Rightarrow C_c - T_c - T_p = 0$$

$$(\alpha_1 f'_c)(\beta_1 c')b - \frac{1}{2} f_r b \frac{\epsilon_{cmax}}{\epsilon'_c} c' - A_s E_s \left(\epsilon_{p0} - \frac{c' - d_{ps}}{c'} \epsilon'_c \right) = 0$$

$$\sum M = 0 \quad (\text{respecto a } A_p)$$

$$M = C_c j d - T_c z_2$$

$$M = (\alpha_1 \beta_1) f'_c b c' \left(\frac{1}{2} \beta_1 c' - d_{ps} \right) - \frac{1}{2} f_r b x \left(c' + \frac{2}{3} x \right)$$

Y entonces se calculan los puntos notables: **Momento de fisuración**, cuando $c' + x = h$ y **momento cero**.

Los resultados para este punto se muestran en la tabla 2,25a:

TABLA 2,25a: Curva de comportamiento con el aporte del hormigón a tracción. Fibra superior fisurada

ϵ'_{ci} (%)	Ω	α_i	β_i	ϵ_{pi} (%)	c_i (cm)	x_i (cm)	M_i (kN · m)	$\phi_i \cdot 10^{-4}$ (rad/cm)
-0.0475	0.238	0.322	0.681	0.4621	49,56	10,44	37,15	-0.096
-0,0758	0,379	0,479	0,691	0,4488	30,81	4,07	0,0842	-0,246

Las curvas de comportamiento se comparan en la figura 2,53:

Un análisis comparativo permite establecer dos zonas perfectamente diferenciadas: la ZONA FISURADA y la NO FISURADA, cuyas características son:

- En la **zona fisurada** el considerar el aporte del hormigón a tracción es muy poco significativo, despreciable, tanto para cuando se fisura la fibra inferior o la superior, confirmandose lo señalado para Hormigón Armado.

- En la **zona no fisurada** se producen ligeros cambios, sobre todo al calcular los momentos de fisuración para ambas fibras. Para esta zona se recomienda emplear el diagrama lineal ya que las deformaciones del hormigón son pequeñas, rango en que este modelo resulta recomendable.

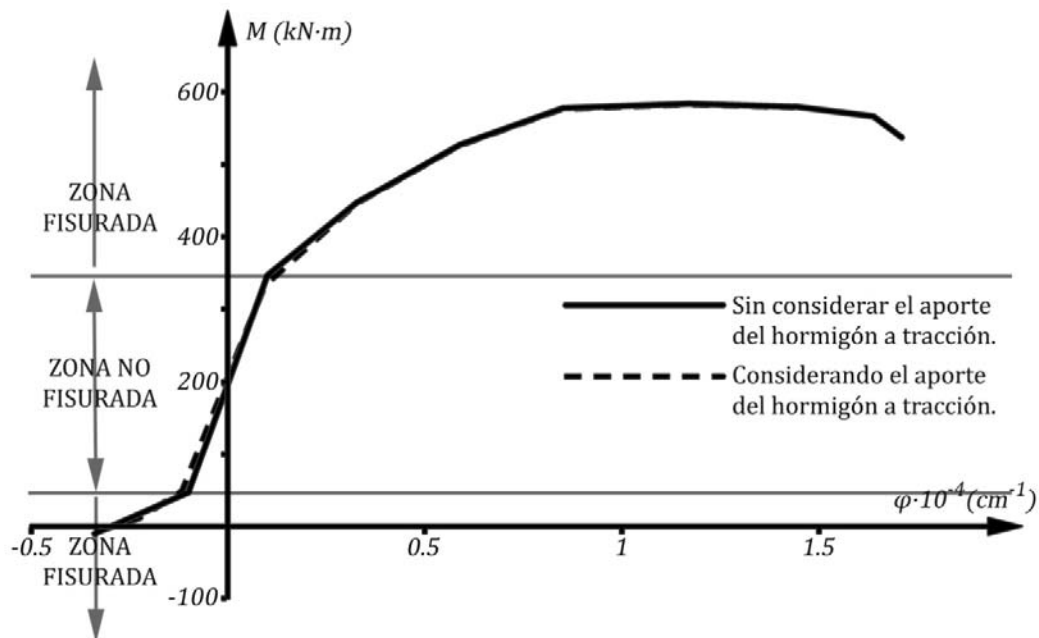


Figura 2,53: Aporte del hormigón a tracción. Comparación.

2.7.8.2 CURVAS SIMPLIFICADAS M vs ϕ PARA HORMIGÓN PRETENSADO.

Un análisis de la curva de comportamiento para Hormigón Pretensado permite repetir la solución simplificada ya lograda en las de Hormigón Armado. Para Hormigón Pretensado el punto para la fisuración adquiere mayor importancia que para el Hormigón Armado, pues produce un cambio notable en el comportamiento de la sección además se suma la inversión de la curvatura que se produce para pequeños momentos flectores.

La curva simplificada podría representarse calculando los siguientes puntos notables, como se aprecia en la figura 2,54:

1. $\phi_n - M_n$	Rotura de la sección
2. $\phi_y - M_y$	Fluencia del acero pretensado
3. $\phi_{cr} - M_{cr}$	Momento de fisuración para la fibra inferior
4. $0 - M_o$	Curvatura cero
5. $\phi_{cr}' - M_{cr}'$	Momento de fisuración para la fibra superior
6. $\phi_o - 0$	Momento cero

A continuación los procedimientos para el cálculo de cada punto

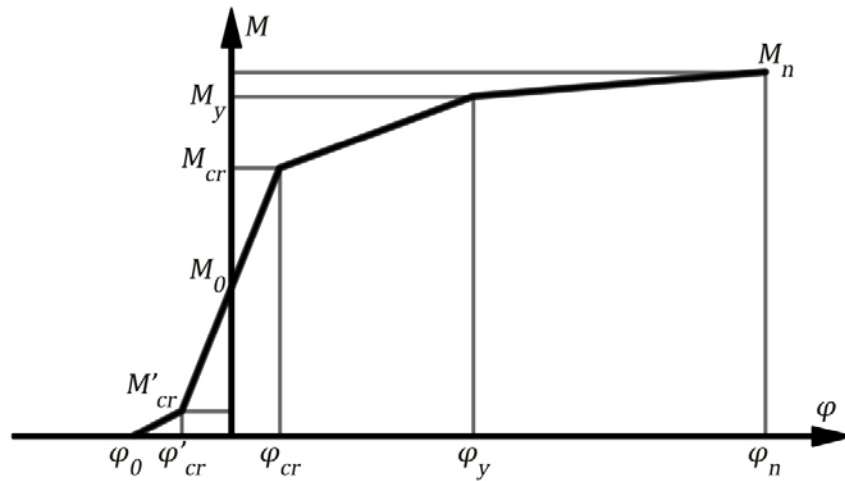


Figura 2,54: Curva de comportamiento simplificada para HP

1. Rotura

Es el mismo procedimiento que para el Hormigón Armado, considerar un valor de ε'_c máximo para el que se considera que la sección alcanza su capacidad soportante máxima. Entonces

$$\varepsilon'_{cmax} = 0,003 \quad (\text{ACI}) \quad \varepsilon'_{cmax} = 0,0035 \quad (\text{CEB - FIB})$$

En esta zona no es recomendable el empleo del modelo lineal, pero puede despreciarse el aporte del hormigón a tracción.

2. Fluencia

Se alcanza cuando el acero pretensado trabaja a su deformación de fluencia, $\varepsilon_p = \varepsilon_{py}$, conociendo que el efecto del pretensado provoca que este punto se alcance para curvaturas menores que en el Hormigón Armado.

Si existe refuerzo ordinario lo más frecuente es que el acero traccionado este fluyendo, pero para el comprimido $\varepsilon'_s < \varepsilon_y$ situación para la que puede obtenerse la ecuación de equilibrio en función de la posición real de la línea neutra. Puede manejarse la variante simplificada de considerar el MODELO LINEAL ó despreciar el aporte de A'_s .

De las ecuaciones de compatibilidad y con el apoyo de la figura 2,55:

$$\frac{\varepsilon'_c}{c} = \frac{\varepsilon_{p2}}{d_p - c} = \frac{\varepsilon_s}{d - c} = \frac{\varepsilon'_s}{c - d'}$$

$$\varepsilon_p = \varepsilon_{p2} + \varepsilon_{po} = \varepsilon_{py} \quad \varepsilon_{p2} = \varepsilon_{py} - \varepsilon_{po}$$

De la ecuación de fuerzas

$$\frac{1}{2} \frac{c_y}{d_p - c_y} (\varepsilon_{py} - \varepsilon_{po}) E_c b c_y + A'_s E_s \frac{c_y - d'}{d_p - c_y} (\varepsilon_{py} - \varepsilon_{po}) = A_p f_p + A_s f_y$$

$$\varphi_y = \frac{\varepsilon_{py} - \varepsilon_{po}}{d_p - c_y}$$

Y de la ecuación de momento respecto a A_p

$$M_y = C_c \left(d_p - \frac{c_y}{3} \right) + C_s (d_p - d') + T_s (d_{ps} - d_s)$$

Donde

$$C_c = \frac{1}{2} f_c b c_y, \quad f_c = \varepsilon'_{cy} E_c, \quad \varepsilon'_{cy} = \frac{c_y}{d_p - c_y} (\varepsilon_{py} - \varepsilon_{po})$$

$$T_s = A_s f_y$$

Calculando

$$\varepsilon'_{sy} = \frac{c_y - d'}{d_p - c_y} (\varepsilon_{py} - \varepsilon_{po})$$

$$\text{Si} \quad \begin{array}{ll} \varepsilon'_{sy} < \varepsilon_y & f'_{sy} = \varepsilon'_{sy} E_c \\ \varepsilon'_{sy} \geq \varepsilon_y & f'_{sy} = f_y \end{array}$$

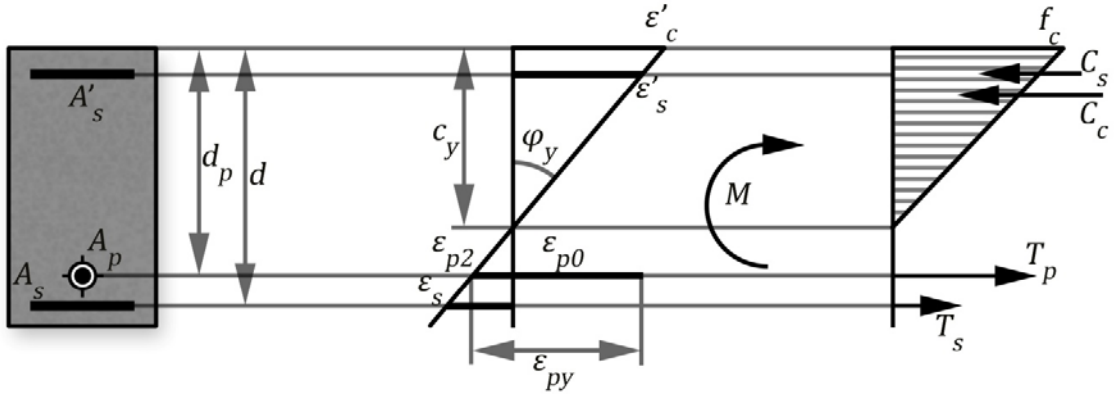


Figura 2,55: Fluencia del acero pretensado. Modelo lineal.

Sin embargo este enfoque tiene la misma limitación que para el Hormigón Armado, de que no resulta válido si $f_c > 0,7 f'_c$. En este caso podría trabajarse con cualquier otro diagrama, pero habría que poner en función de la posición de la línea neutra no solo la tensión del refuerzo comprimido, sino también los coeficientes α_1 y β_1 . Por ejemplo para el diagrama parabólico:

$$\Omega = \frac{\varepsilon'_{cy}}{0,002} = \frac{c_y}{d_p - c_y} \cdot \frac{\varepsilon_{py} - \varepsilon_{po}}{0,002}$$

$$\alpha_1 = \frac{6(1 - \Omega/3)^2}{(4/\Omega - 1)} = \frac{6 \left(1 - \frac{c_y}{3(d_p - c_y)} \cdot \frac{\varepsilon_{py} - \varepsilon_{po}}{0,002} \right)^2}{\left(\frac{0,008(d_p - c_y)}{c_y(\varepsilon_{py} - \varepsilon_{po})} - 1 \right)}$$

$$\beta_1 = \frac{(4 - \Omega)}{(6 - 2\Omega)} = \frac{\left(4 - \frac{c_y}{d_p - c_y} \cdot \frac{\varepsilon_{py} - \varepsilon_{po}}{0,002} \right)}{\left(6 - \frac{2c_y}{d_p - c_y} \cdot \frac{\varepsilon_{py} - \varepsilon_{po}}{0,002} \right)}$$

Y de la ecuación de fuerzas y con el apoyo de la figura 2,56:

$$\sum F = 0 \Rightarrow C_c + C_s - T_s - T_p = 0$$

$$(\alpha_1 f'_c)(\beta_1 c_y)b + A'_s f'_s - A_s f_y - A_p f_{yp} = 0$$

La que en función de c_y quedaría:

$$\frac{6 \left(1 - \frac{c_y}{3(d_p - c_y)} \cdot \frac{\varepsilon_{py} - \varepsilon_{po}}{0,002} \right)^2}{\left(\frac{0,008(d_p - c_y)}{c_y(\varepsilon_{py} - \varepsilon_{po})} - 1 \right)} f'_c b \frac{\left(4 - \frac{c_y}{d_p - c_y} \cdot \frac{\varepsilon_{py} - \varepsilon_{po}}{0,002} \right)}{\left(6 - \frac{2c_y}{d_p - c_y} \cdot \frac{\varepsilon_{py} - \varepsilon_{po}}{0,002} \right)} c_y + A'_s E_s \frac{c_y - d'}{d_p - c_y} (\varepsilon_{py} - \varepsilon_{po}) - A_s f_y - A_p f_{yp} = 0$$

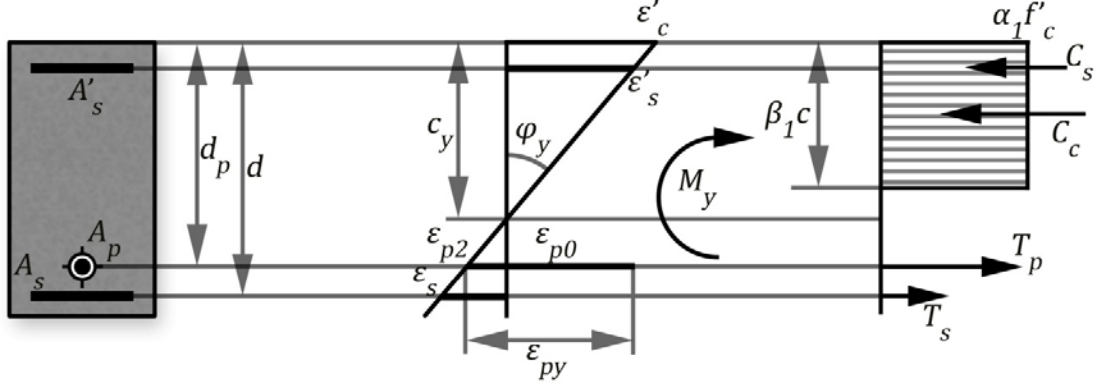


Figura 2,56: Fluencia del acero pretensado. Diagrama Rectangular Equivalente.

3. Fisuración

El momento de fisuración se alcanza cuando $\varepsilon_c < \varepsilon_{cmax}$ en la fibra inferior. Este valor puede determinarse fijando el valor de $\varepsilon_{cmax} \cong 0,0001$ o el valor de $f_r = 0,62\sqrt{f'_c}$

Empleando el Modelo Lineal, puede plantearse el esquema que se ilustra en la figura 2,57

Las ecuaciones de compatibilidad

$$\varphi_{cr} = \frac{\varepsilon'_c}{c_{cr}} = \frac{\varepsilon_{p2}}{d_p - c_{cr}} = \frac{\varepsilon_s}{d - c_{cr}} = \frac{\varepsilon'_s}{c_{cr} - d'} = \frac{\varepsilon_{cmax}}{h - c_{cr}}$$

$$\varepsilon_p = \varepsilon_{p2} + \varepsilon_{p0}$$

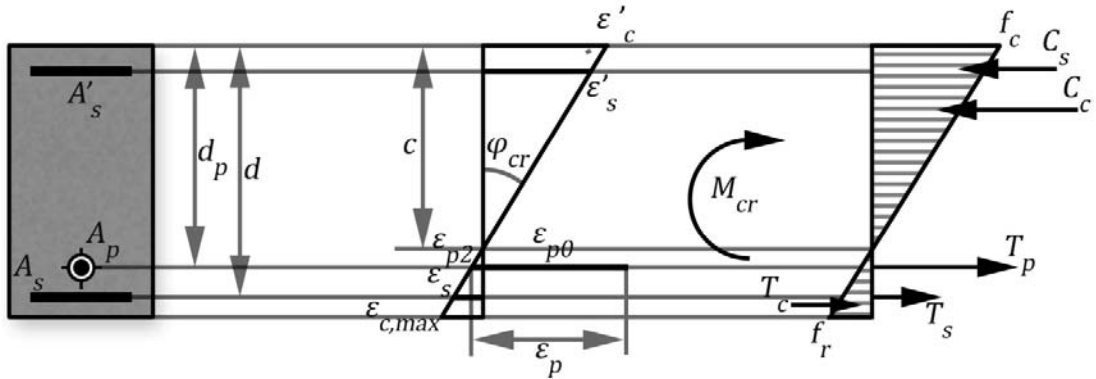


Figura 2,57: Momento de fisuración para la fibra inferior traccionada. Modelo lineal.

De la ecuación de Fuerzas

$$\sum F = 0 \Rightarrow C_c + C_s - T_s - T_p - T_c = 0$$

$$\frac{1}{2} f_c b c_{cr} + A'_s f'_s - A_s f_s - A_p f_p - \frac{1}{2} f_r b (h - c_{cr}) = 0$$

Considerando que ningún refuerzo fluye como variante más probable:

$$\begin{aligned} f_c &= \varepsilon'_c E_c & f_r &= \varepsilon_{cmax} E_c \\ f_s &= \varepsilon_s E_s & f'_s &= \varepsilon'_s E_s & f_p &= \varepsilon_p E_s = (\varepsilon_{p2} + \varepsilon_{p0}) E_s \end{aligned}$$

Sustituyendo en la ecuación de fuerzas en función de ε_{cmax}

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \frac{c_{cr}}{h - c_{cr}} \varepsilon_{cmax} c_{cr} b + A'_s E_s \frac{c_{cr} - d'}{h - c_{cr}} \varepsilon_{cmax} \\ = A_p E_s \left(\frac{d_p - c_{cr}}{h - c_{cr}} \varepsilon_{cmax} + \varepsilon_{p0} \right) - A_s E_s \frac{d - c_{cr}}{h - c_{cr}} \varepsilon_{cmax} + \frac{1}{2} \varepsilon_{cmax} E_c b (h - c_{cr}) \end{aligned}$$

De donde se obtiene la siguiente expresión, conociendo que $n = \frac{E_s}{E_c}$

$$c_{cr} = \frac{n \left[d' A'_s + d A_s + A_p \left(d_p + \frac{\varepsilon_{p0}}{\varepsilon_{cmax}} h \right) \right] + \frac{b h^2}{2}}{n \left[A'_s + A_s + A_p \left(1 + \frac{\varepsilon_{p0}}{\varepsilon_{cmax}} \right) \right] + b h}$$

Finalmente se calcula el M_{cr} por $\sum M = 0$ (respecto a A_p)

$$M_{cr} = C_c \left(d_p - \frac{c_{cr}}{3} \right) + C_s (d_p - d') + T_s (d_{sp} - d_s) - T_c \left(d_{sp} - \frac{h - c_{cr}}{3} \right)$$

Donde

$$\begin{aligned} C_c &= \frac{1}{2} f_c b c_{cr}, & f_c &= \varepsilon'_c E_c, & \varepsilon'_c &= \frac{c_{cr}}{h - c_{cr}} \varepsilon_{cmax} \\ T_s &= A_s f_s & f_s &= \varepsilon_s E_s, & \varepsilon_s &= \frac{d - c_{cr}}{h - c_{cr}} \varepsilon_{cmax} \\ C_s &= A'_s f'_s & f'_s &= \varepsilon'_s E_s, & \varepsilon'_s &= \frac{c_{cr} - d'}{h - c_{cr}} \varepsilon_{cmax} \\ T_c &= \frac{1}{2} f_r b (h - c_{cr}) & \varphi_{cr} &= \frac{\varepsilon'_c}{c_{cr}} \end{aligned}$$

Utilizando las **expresiones de NAVIER** y el pretensado como fuerza interna se puede obtener una **solución simplificada**, como se aprecia en la figura 2,58:

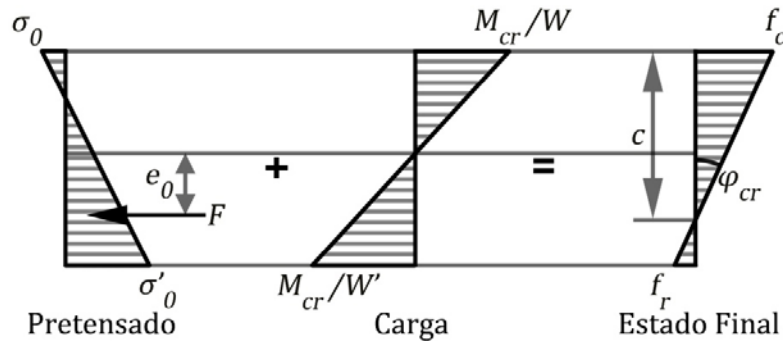


Figura 2,58: Momento de fisuración para la fibra inferior traccionada. Solución por Navier.

Y del equilibrio tensional en la fibra inferior

$$\begin{aligned} \sigma'_0 - \frac{M_{cr}}{W'} &= f_r \\ M_{cr} &= W' (\sigma'_0 + f_r) \end{aligned}$$

Siendo

$$\sigma'_0 = \frac{F}{A_c} + \frac{F e_0}{W'}$$

Donde

$$F = f_{po} A_p, \quad f_{po} = \varepsilon_{po} E_s \quad \text{fuerza de pretensado final}$$

$$W \text{ y } W' \quad \text{módulos de la sección}$$

$$e_o = \frac{h}{2} - d_{sp} \quad \text{excentricidad de } F$$

Para calcular φ_{cr} se obtiene

$$f_c = \sigma_o - \frac{M_{cr}}{W}$$

$$\sigma_o = \frac{F}{A_c} - \frac{F e_o}{W}$$

$$c_{cr} = \frac{f_c}{f_c + f_r} h \quad \varphi_{cr} = \frac{\varepsilon_{cmax}}{h - c_{cr}}$$

Este procedimiento es conservador pues no considera el aporte del refuerzo ordinario, lo que podría atenuarse si se calculan A_c , I , W y W' considerando la sección transformada de hormigón tomando en cuenta este refuerzo

4. Curvatura cero

Se trata de obtener el momento flector que provoca la curvatura cero en la sección. La solución se logra obteniendo el valor de ε'_c de la ecuación de compatibilidad, como ya se demostró en el epígrafe 2.8.1 utilizando el diagrama parabólico. Aquí se calculará con diagrama lineal con el apoyo de la figura 2.59:

$$\varepsilon'_{cc} = \varepsilon'_s = \varepsilon_s = \varepsilon_{p2}$$

$$\varepsilon_p = \varepsilon_{po} - \varepsilon'_{cc}$$

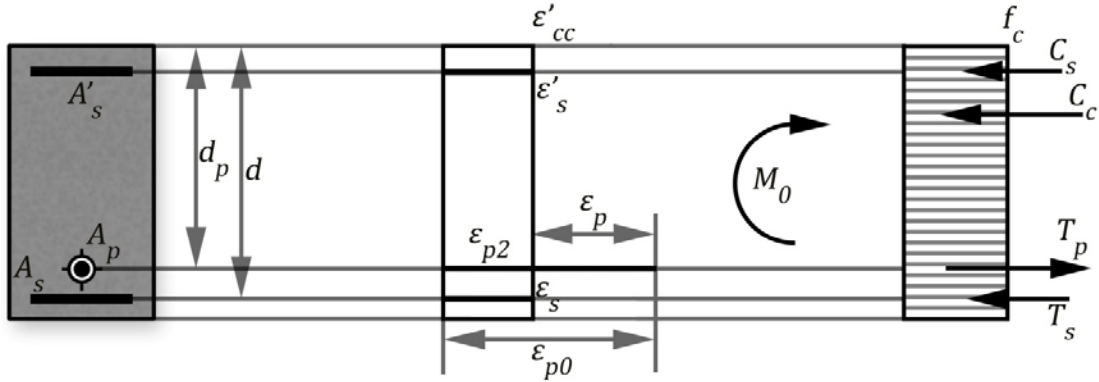


Figura 2.59: Momento para curvatura cero. Modelo lineal.

Y de la ecuación de fuerzas

$$\sum F = 0 \Rightarrow C_c + C_s - T_s - T_p = 0$$

$$\frac{1}{2} \varepsilon'_{cc} E_c b \cdot h + A'_s \varepsilon'_s E_s - A_s \varepsilon_s E_s - A_p E_s (\varepsilon_{po} - \varepsilon'_{cc}) = 0$$

$$\varepsilon'_{cc} = \frac{n A_p \varepsilon_{po}}{b h + n (A'_s + A_s + A_p)}$$

Y finalmente de la ecuación de momento, respecto a A_p

$$M_{cr} = C_c \left(d_p - \frac{c_{cr}}{3} \right) + C_s (d_p - d') + T_s (d_{sp} - d_s) - T_c \left(d_{sp} - \frac{h - c_{cr}}{3} \right)$$

$$M_o = C_c \left(\frac{h}{3} - d_{sp} \right) + C_s (d_p - d') + T_s (d_{sp} - d_s)$$

O respecto al centroide

$$M_o = C_s \left(\frac{h}{2} - d' \right) + T_p \left(\frac{h}{2} - d_{sp} \right) - T_s \left(\frac{h}{2} - d_s \right)$$

Donde

$$\begin{aligned} C_c &= f_c b h, & f_c &= \varepsilon'_{cc} E_c, \\ T_s &= A_s f_s, \\ C_s &= A'_s f'_s, & f_s &= f'_s = \varepsilon'_{cc} E_s, \\ T_p &= A_p f_p, & f_p &= \varepsilon_p E_s \end{aligned} \quad \varepsilon_p = \varepsilon_{po} - \varepsilon'_{cc}$$

Una expresión simplificada puede lograrse despreciando el aporte del refuerzo ordinario

5. Momento cero

Para valores de momento menores de M_o la curvatura se invertirá, hasta llegar a su valor negativo mayor cuando el momento externo es cero, situación cercana al caso en que se tense el refuerzo pretensado y no actúe ni siquiera el peso propio de la viga.

Ante $M = 0$, pueden presentarse dos casos:

1er caso: La sección no se fisura en su fibra superior pues $\varepsilon_c \leq \varepsilon_{cmax}$, $f_t \leq f_r$

2do caso: La sección se fisura y deja de aportar una zona de la viga: $\varepsilon_c > \varepsilon_{cmax}$, $f_t > f_r$

a) Cálculo de φ_o para $M = 0$ en sección NO FISURADA

El comportamiento de la sección se aprecia en la figura 2,60 y trabajando con la ecuación de momento, respecto a A_p se tiene:

$$M = C_c \left(\frac{c'}{3} - d_{sp} \right) - T_c \left(d_p - \frac{h-c'}{3} \right) - C_s (d_p - d') - T_s (d_{sp} - d_s) = 0$$

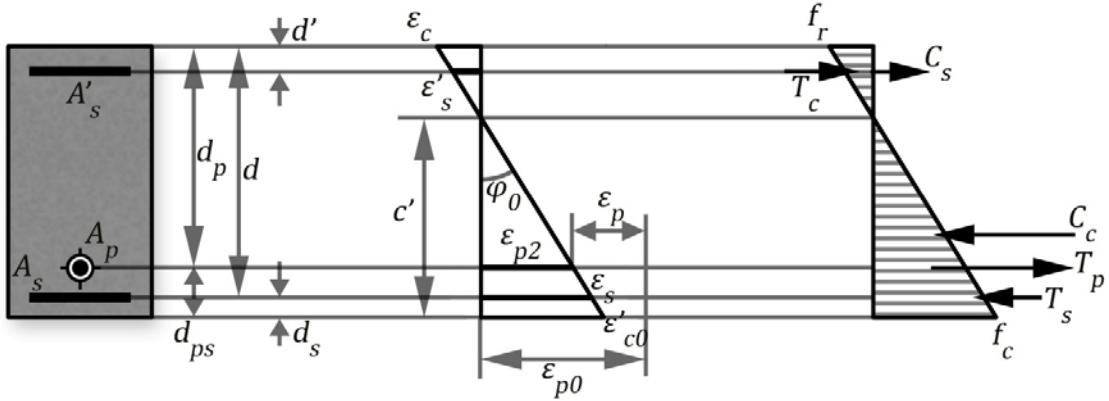


Figura 2,60: Momento cero para sección no fisurada. Modelo lineal.

Donde de la ecuación de compatibilidad

$$\varphi_o = \frac{\varepsilon'_{co}}{c'} = \frac{\varepsilon_{p2}}{c' - d_p} = \frac{\varepsilon_s}{c' - d_s} = \frac{\varepsilon'_s}{h - c' - d'} = \frac{\varepsilon_c}{h - c'}$$

$$\varepsilon_p = \varepsilon_{po} - \varepsilon_{p2}$$

Siendo

$$C_c = \frac{1}{2} f_c b c' = \frac{1}{2} \varepsilon'_{co} E_c b c'$$

$$T_c = \frac{1}{2}f_t b(h - c') = \frac{1}{2}\varepsilon_c E_c b(h - c') = \frac{1}{2}E_c b \frac{(h - c')^2}{c'} \varepsilon'_{co}$$

$$T_s = A_s f_s = A_s E_s \varepsilon_s = A_s E_s \frac{c' - d_s}{c'} \varepsilon'_{co}$$

$$C_s = A'_s f'_s = A'_s E_s \varepsilon'_s = A'_s E_s \frac{h - c' - d'}{c'} \varepsilon'_{co}$$

Del trabajo con la ecuación resulta

$$c' = \frac{n[(h - d')(d_p - d')A'_s - d_s(d_{sp} - d')A_s] + \frac{bh^2}{2}(d_p - \frac{h}{3})}{n[(d_p - d')A'_s + (d_{sp} - d')A_s] + bh(d_p - \frac{h}{2})}$$

Entonces de la ecuación de fuerzas puede obtenerse ε'_c .

$$\sum F = 0 \Rightarrow C_c - C_s + T_s - T_p - T_c = 0$$

$$\frac{1}{2}\varepsilon'_{co} E_c b \cdot c' + A'_s E_s \frac{h - c' - d'}{c'} \varepsilon'_{co} - A_s E_s \frac{c' - d_s}{c'} \varepsilon'_{co} - A_p E_s \left(\varepsilon_{p0} - \frac{c' - d_{sp}}{c'} \varepsilon'_{co} \right) - \frac{1}{2} E_c b \frac{(h - c')^2}{c'} \varepsilon'_{co} = 0$$

Y finalmente

$$\varepsilon'_{co} = \frac{nA_p \varepsilon_{p0} c'}{bhc' - \frac{bh}{2} + n[A_s(c' - d_s) - A'_s(h - c' - d') + A_p(c' - d_{sp})]}$$

$$\varphi_o = \frac{\varepsilon'_{co}}{c'}$$

Un **análisis simplificado** por Navier sería, en función de la figura 2,61

$$\sigma_o' = f_r \quad \sigma_o = f_c$$

Entonces

$$c' = \frac{\sigma_o}{\sigma_o + \sigma_o'} h$$

$$\varepsilon'_{co} = \frac{\sigma_o'}{E_c} \quad \varepsilon_c = \frac{\sigma_o}{E_c}$$

$$\varphi_o = \frac{\varepsilon'_{co}}{c'}$$

b) Cálculo de M'_{cr} para la SECCION FISURADA

Como, en este caso, para $M = 0$ la sección se fisura se presentará un valor de momento de fisuración para la fibra superior $M'_{cr} > 0$. Este momento se calcula cuando se alcanza ε_{cmax} en la fibra superior, como se aprecia en la figura 2,61.

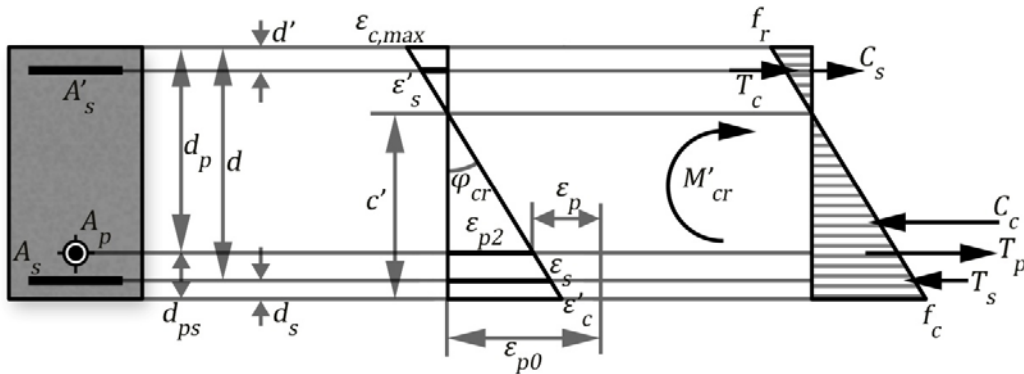


Figura 2,61: Momento de fisuración para la fibra superior traccionada. Modelo

De la ecuación de compatibilidad

$$\varphi_{cr}' = \frac{\varepsilon_c'}{c'_{cr}} = \frac{\varepsilon_{p2}}{c'_{cr} - d_p} = \frac{\varepsilon_s}{c'_{cr} - d_s} = \frac{\varepsilon_s'}{h - c'_{cr} - d'} = \frac{\varepsilon_{cmax}}{h - c'_{cr}}$$

$$\varepsilon_p = \varepsilon_{p0} - \varepsilon_{p2}$$

De la ecuación de fuerzas

$$\sum F = 0 \Rightarrow C_c - C_s + T_s - T_p - T_c = 0$$

$$\frac{1}{2} \varepsilon_c' E_c b \cdot c'_{cr} + A_s' E_s \frac{h - c'_{cr} - d'}{c'_{cr}} \varepsilon_c' - A_s E_s \frac{c'_{cr} - d_s}{c'_{cr}} \varepsilon_c' - A_p E_s \left(\varepsilon_{p0} - \frac{c'_{cr} - d_{sp}}{c'_{cr}} \varepsilon_c' \right) - \frac{1}{2} \varepsilon_{cmax} E_c b (h - c'_{cr}) = 0$$

Y de la ecuación de ecuación de momento respecto a A_p

$$M'_{cr} = C_c \left(\frac{c'_{cr}}{3} - d_{sp} \right) - T_c \left(d_p - \frac{h - c'_{cr}}{3} \right) - C_s (d_p - d') - T_s (d_{sp} - d_s) = 0$$

Donde

$$\begin{aligned} C_c &= \frac{1}{2} f_c b c'_{cr}, & f_c &= \varepsilon_c' E_c, & \varepsilon_c' &= \frac{c'_{cr}}{h - c'_{cr}} \varepsilon_{cmax} \\ T_s &= A_s f_s & f_s &= \varepsilon_s E_s, & \varepsilon_s &= \frac{c'_{cr} - d_s}{h - c'_{cr}} \varepsilon_{cmax} \\ C_s &= A_s' f_s' & f_s' &= \varepsilon_c' E_s, & \varepsilon_s' &= \frac{h - c'_{cr} - d'}{h - c'_{cr}} \varepsilon_{cmax} \\ T_c &= \frac{1}{2} f_r b (h - c'_{cr}) & \varphi'_{cr} &= \frac{\varepsilon_c'}{c'_{cr}} \end{aligned}$$

Podría utilizarse NAVIER para un **análisis simplificado**. Entonces con el apoyo de la figura 2,62 se calcula M'_{cr}

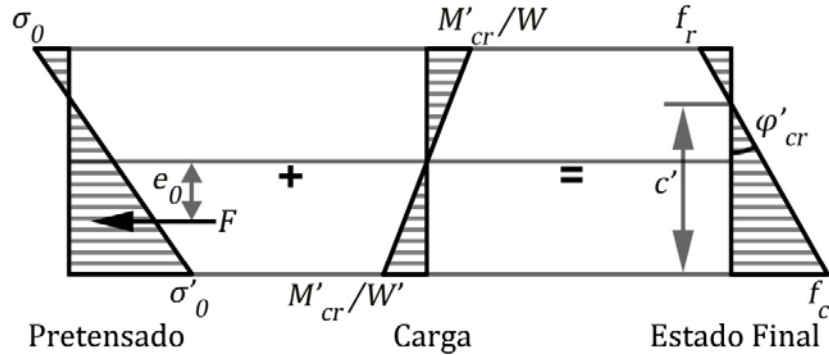


Figura 2,62: Momento de fisuración para la fibra superior traccionada. Solución por Navier.

$$\begin{aligned} f_c &= \sigma_o' - \frac{M'_{cr}}{W} & f_r &= \sigma_o - \frac{M'_{cr}}{W'} \\ M'_{cr} &= W' (f_r + \sigma_o) \\ c'_{cr} &= \frac{f_c}{f_c + f_r} h & \varphi'_{cr} &= \frac{\varepsilon_{cmax}}{h - c'_{cr}} \end{aligned}$$

c) *Calculo de φ_o para $M = 0$ en la SECCION FISURADA*

Esta resulta una solución compleja donde debe acudir a tanteos, pues el diagrama de tensiones no se completa y son desconocidas todas las deformaciones de la sección, como se muestra en la siguiente figura 2,63:

De la ecuación de compatibilidad

$$\varphi_o = \frac{\varepsilon'_c}{c'} = \frac{\varepsilon_{p2}}{c' - d_p} = \frac{\varepsilon_s}{c' - d_s} = \frac{\varepsilon'_s}{h - c' - d'} = \frac{\varepsilon_{cmax}}{x}$$

$$\varepsilon_p = \varepsilon_{p0} - \varepsilon_{p2}$$

$$x = \frac{\varepsilon_{cmax}}{\varepsilon'_c} c'$$

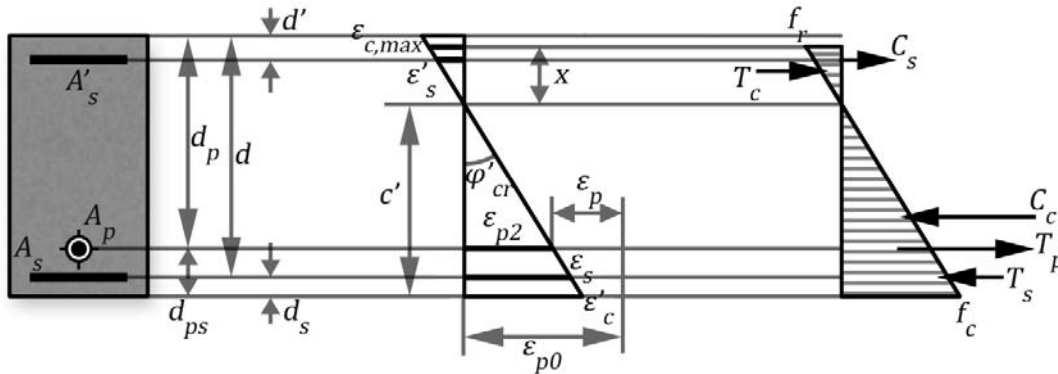


Figura 2,63: Momento cero para sección fisurada. Modelo lineal.

En la ecuación de momentos, respecto a A_p

$$M = C_c \left(\frac{c'}{3} - d_{sp} \right) - T_c \left(d_p - \frac{x}{3} \right) - C_s (d_p - d') - T_s (d_{sp} - d_s) = 0$$

$$\frac{1}{2} \varepsilon'_c E_c b c' \left(\frac{c'}{3} - d_{sp} \right) - \frac{1}{2} \varepsilon_{cmax} E_c b \frac{\varepsilon_{cmax}}{\varepsilon'_c} c' \left(d_p - \frac{\varepsilon_{cmax}}{3 \varepsilon'_c} c' \right) - A'_s E_s \frac{h - c' - d'}{c'} \varepsilon'_c (d_p - d') - A_s E_s \frac{c' - d_s}{c'} \varepsilon'_c (d_{sp} - d_s) = 0$$

Como se aprecia la ecuación depende de c' y ε'_c por lo que debe tantearse con ε'_c hasta obtener el valor de c' en que se logre el equilibrio de fuerzas. Una vez terminado este proceso se calcula

$$\varphi_o = \frac{\varepsilon'_c}{c'}$$

En la tabla 2,26 se exponen los resultados del ejemplo que se trabajó en el epígrafe anterior con solo los cálculos para la curva simplificada y se comparan ambos resultados en la figura 2,64, quedando evidenciada la validez de este procedimiento.

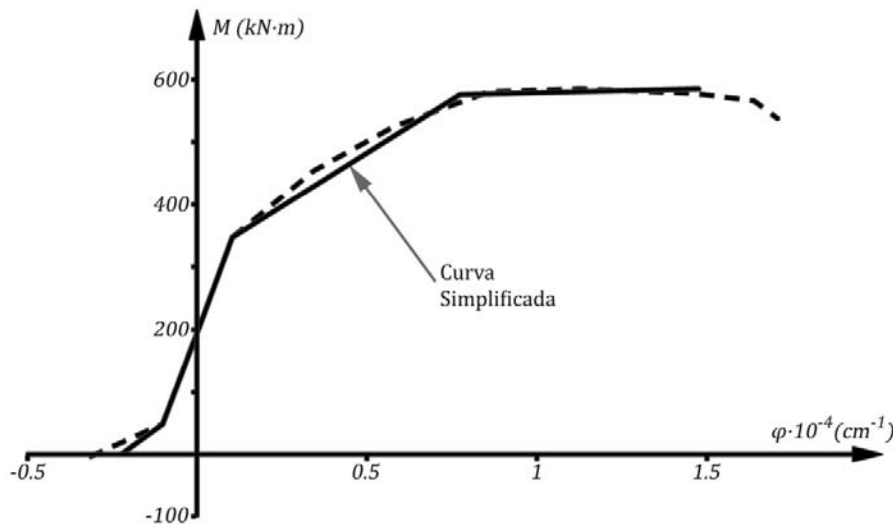


Figura 2,64: Comparación entre Curvas de Comportamiento detallada y Simplificada.

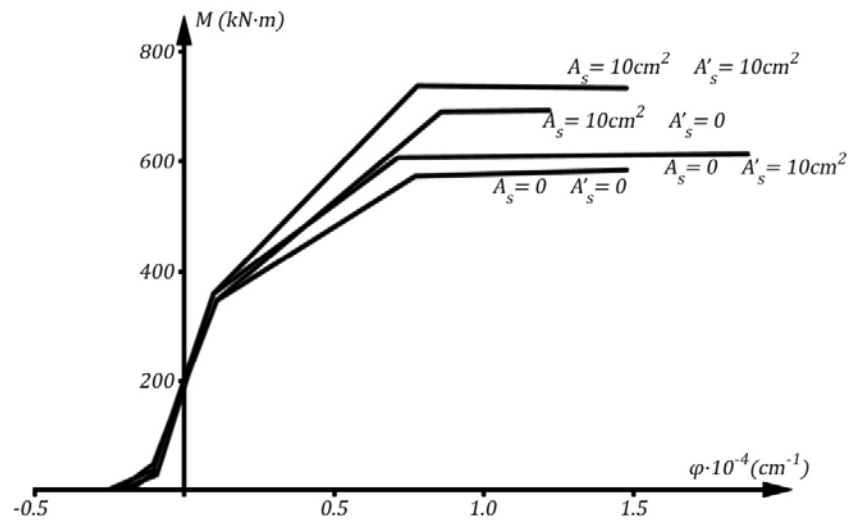
TABLA 2,26: Curva de comportamiento simplificada.

ε'_{ci} (%)	ε_{pi} (%)	c_i (cm)	M_i (kN · m)	$\varphi_i \cdot 10^{-4}$ (rad/cm)	OBSERVACIONES
0.3	0.9384	20.31	583.54	1.48	<i>Agotamiento de la sección</i>
0.1871	0.7	24.16	574.46	0.77	<i>Fluencia del acero pretensado</i>
0.0531	0.4995	50.49	346.03	0.11	<i>Momento de Fisuración. Fibra inferior</i>
0.0207	0.4793	0.00	191.72	0.00	<i>Curvatura cero</i>
-0.0531	0.4632	-49.95	47.43	-0.10	<i>Momento de Fisuración. Fibra superior</i>
-0.0724	0.4497	-32.77	0	-0.22	<i>Momento cero</i>

2.7.8.3 APOORTE DEL ACERO ORDINARIO

Es común en secciones de HP no tomar en cuenta el aporte del refuerzo ordinario, colocado en muchas ocasiones solo con el propósito de contribuir a conformar el esqueleto para el imprescindible refuerzo transversal. En la figura 2,65 se muestra como para secciones relativamente pequeñas y donde el acero pretensado no sea mucho mayor que el refuerzo ordinario este tiene un peso en el comportamiento de la sección. En resumen puede plantearse lo siguiente:

- El aporte del refuerzo ordinario no es muy significativo en la zona no fisurada, ya que trabajan a esfuerzo menores que los máximos y se hacen despreciables comparados con el papel de la sección de hormigón aportando en su conjunto.
- Mas notable resulta el aporte cuando la sección está fisurada y sobre todo en la fase agotamiento de la sección.

**Figura 2,65: Aporte del acero ordinario.**

- Como en el Hormigón Armado el refuerzo a compresión contribuye al incremento de la ductilidad de la sección. Obsérvese sobre todo la variante en que se colocan 10cm^2 a compresión y ninguno a tracción. Para esta sección la contribución a la capacidad portante es poco significativa.

- El incremento de la capacidad portante se logra colocando el refuerzo a tracción, incluso a costa de una disminución de la ductilidad, variante $A_s = 10\text{cm}^2$ y cero a compresión. Cuando se colocan 10cm^2 tanto a tracción como a compresión se logra una ductilidad semejante a la sección con solo pretensado y un notable incremento de la capacidad portante.

En resumen se aconseja considerar el aporte del refuerzo ordinario para valorar el comportamiento de la sección en la fase de rotura de la sección.

2.7.8.4 APORTE DE LA DEFORMACIÓN PREVIA DEL PRETENSADO (ε_{po})

La deformación previa aplicada al refuerzo es la que da sentido al pretensado, es su esencia a diferencia del Hormigón Armado donde $\varepsilon_{po} = 0$. En la figura 2,66 se comparan curvas M vs φ con ε_{po} diferentes. Un análisis de estas ratifican las conclusiones obtenidas anteriormente:

- El valor de ε_{po} no influye en la capacidad portante máxima de la sección, siempre que el fallo sea dúctil, pues al alcanzar el refuerzo su máxima resistencia ($f_p = f_{py}$), desaparece la influencia de la deformación previa.
- Resalta que la esencia del pretensado radica en contribuir significativamente al mejoramiento del comportamiento de la sección bajo cargas de servicio. Nótese como en los elementos de Hormigón Pretensado, el valor de ε_{po} tiene su importancia en el comportamiento en la etapa de servicio,
- Lo anterior se confirma sobre todo al comparar los momentos de fisuración tanto en la fibra inferior como en la superior, como se muestra en la figura 2,66 y en la tabla 2,27

TABLA 2,27: Momentos de Fisuración. Influencia de la deformación previa del pretensado.

	$\varepsilon_{po} = 0,4\%$	$\varepsilon_{po} = 0,45\%$	$\varepsilon_{po} = 0,5\%$	$\varepsilon_{po} = 0,55\%$
$M_{cr} \text{ (kN.m)}$	286.88	316.45	346.03	375.60
$M'_{cr} \text{ (kN.m)}$	28.67	38.05	47.43	56.81

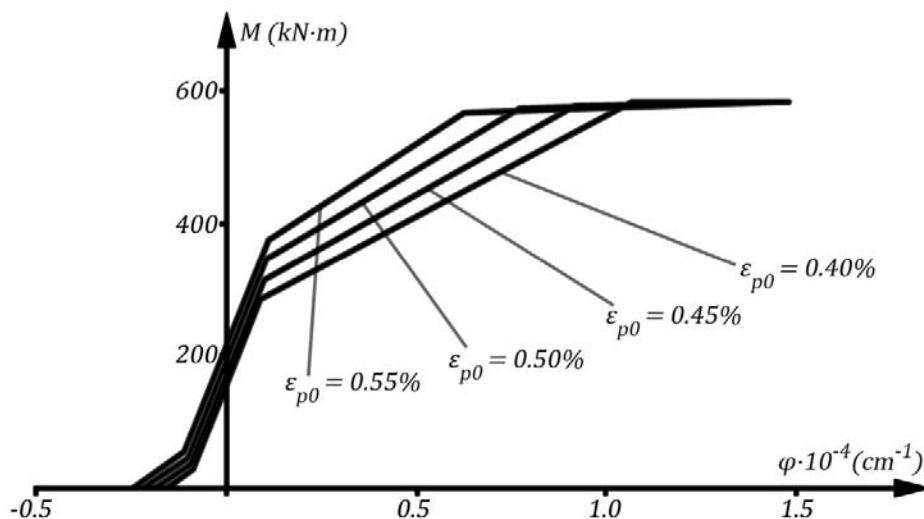


Figura 2,66: Influencia de la deformación previa del pretensado.

2.8 HIPÓTESIS QUE SE DERIVAN DEL COMPORTAMIENTO ANTE SOLICITACIONES NORMALES.

2.8.1 CONSIDERACIONES GENERALES

- 1) El efecto de la fluencia por efecto de las cargas mantenidas, se manifiesta mediante una disminución de la capacidad resistente última de la sección.
- 2) En los elementos de hormigón pretensado el momento de fisuración es grande en comparación con la capacidad última de la sección, y en ellos se justifica aceptar un comportamiento lineal para el rango de trabajo en la etapa de utilización, es decir, podrán aplicarse las fórmulas de la Resistencia de Materiales para el cálculo de tensiones en la sección bajo las cargas de utilización.
- 3) La capacidad máxima de un elemento comprimido viene dada por la suma del aporte del hormigón y del acero.
- 4) La capacidad máxima no es afectada por el efecto de retracción, por tal razón no se tiene en cuenta en los cálculos, salvo que se restrinja el movimiento del elemento.
- 5) La capacidad máxima se ve afectada por el fenómeno de la fluencia del hormigón. En los cálculos se introducen coeficientes que disminuyen la resistencia del hormigón con el fin de tener en cuenta la reducción de la capacidad por efecto de la carga mantenida.

2.8.2 HIPÓTESIS

A partir del análisis del comportamiento de los elementos sometidos a carga axial, cuyos resultados han sido corroborados en numerosas pruebas experimentales, se derivan las hipótesis que contemplan las normas para el cálculo ante tales solicitaciones. A continuación se enumeran las hipótesis fundamentales para el diseño de elementos de hormigón armado y pretensado sometidos a solicitaciones normales:

- 1) Se acepta que la capacidad máxima se produce cuando el hormigón alcanza una deformación unitaria de acortamiento $\varepsilon'_c = 0.003$.
- 2) Durante el estudio de la etapa de agotamiento se desprecia la contribución del hormigón a tracción, mientras que durante la etapa de servicio y hasta tanto no llegue a fisurarse el hormigón ($M < M_{cr}$), la contribución a tracción puede considerarse.
- 3) En los elementos de hormigón reforzado con acero se requiere disponer una cuantía de refuerzo mínima tal que le suministre una fuerza equivalente o un poco mayor que la que provoca la carga de fisuración para evitar la fragilidad del fallo.

EJERCICIOS PROPUESTOS

- 1) Deduzca las expresiones de α_1 y β_1 para las funciones de Kabaila y Desayi-Krishman conociendo que sus leyes tensión-deformación resultan ser:

Kabaila: $\sigma'_c = f'_c(2\Omega - 1.189\Omega^2 + 0.1763\Omega^3 + 0.0027\Omega^4)$

Desayi-Krishman: $\sigma'_c = f'_c[2\Omega/(1 + \Omega^2)]$

Evalúe las expresiones obtenidas para los mismos valores de ε'_c que se utilizan en la Tabla 2.3 y compare los resultados de α_1 y β_1 que allí se ofrecen.

- 2) Para una sección con las siguientes características.

$b = 30\text{cm}$	$f'_c = 30\text{MPa}$	$A'_s = 10\text{cm}^2$
$h = 65\text{cm}$	$f_y = 420\text{MPa}$	$A_s = 40\text{cm}^2$
$d_s = 7\text{cm}$	$d' = 5\text{cm}$	$E_s = 2 \cdot 10^5\text{MPa}$

Considerando el *Modelo Parabólico* de Collins, calcule los valores de α_1 ; β_1 ; f'_s ; f_s para las siguientes situaciones

- | | |
|--|---|
| a) $\varepsilon'_c = 0.3\%$ | $c = 26.67\text{cm}$ |
| b) $\varphi = 1.276 \cdot 10^{-4} \text{rad/cm}$ | $c = 27.43\text{cm}$ |
| c) $\varepsilon_s = 0.282\%$ | $\varepsilon'_s = 0.204\%$ |
| d) $\varepsilon_s = 0.069\%$ | $\varphi = 0.378 \cdot 10^{-4} \text{rad/cm}$ |

- 3) Obtenga para cada uno de los casos anteriores los valores de:

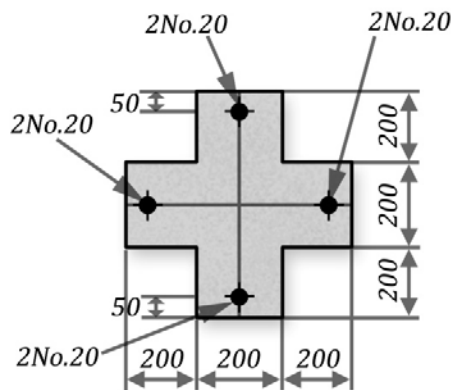
- ♦ Fuerza resultante del hormigón (C_c)
- ♦ Fuerza resultante en el acero en compresión (C_s)
- ♦ Fuerza resultante en el acero en tracción (T_s)
- ♦ La curvatura (φ) cuando no fue dato
- ♦ Brazo mecánico de las fuerzas C_c y C_s respecto al centroide del acero A_s
- ♦ Compruebe en todos los casos el equilibrio de la sección

- 4) Deducir los valores de que se indican en la Tabla 2.9 correspondientes a la acción de cargas sostenidas de compresión.
- 5) Cuán efectivo es el pretensado en elementos axialmente traccionados y axialmente comprimidos. A igualdad de sección transversal, cuantía de refuerzo y calidad de los materiales, en cuál de los dos casos entra primero el acero en fluencia. ¿Por qué?
- 6) Enjuicie críticamente la siguiente afirmación: en elementos de hormigón armado comprimidos o con predominio a la compresión, es razonable emplear aceros de grado inferior o igual al G-60.
- 7) En la sección § 2.3 se ha explicado un procedimiento que permite evaluar la contribución en fuerza y momento del hormigón comprimido mediante los coeficientes α_1 y β_1 , los que resultan de transformar el diagrama σ'_c vs ε'_c en otro rectangular equivalente. Este procedimiento se aplicó durante el estudio del comportamiento de la viga de hormigón armado y pretensada, sin embargo, no así para el caso de los tensores y las columnas. ¿Qué razones existen para justificar esta decisión?
- 8) Deduzca las curvas de comportamiento correspondientes a las secciones de hormigón armado y pretensado que se analizan en los **Ejercicios 2,7 y 2,9**, considerando la presencia del acero en

compresión que aparece en la Figura 2.26b-c si se trata de **2 No. 16**, de grado **G-40** y con que un recubrimiento mecánico igual a $d' = 50\text{mm}$.

- 9) Deduzca las curvas de comportamiento a compresión (N'_i vs Δl_i) correspondiente a la sección de hormigón armado mostrada en la figura 2,67, para cargas de corta duración y las siguientes leyes constitutivas del hormigón a compresión:

- Diagrama parabólico de Collins
- Diagrama de Hognestad
- Diagrama de Rüsç

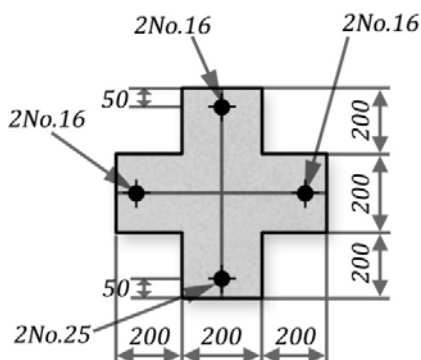


$$\begin{aligned} f'_c &= 30\text{MPa} \\ f_y &= 300\text{MPa} \\ E_s &= 2 \cdot 10^5\text{MPa} \\ \varepsilon_o &= 0.002 \text{ (carga de corta duración)} \end{aligned}$$

Figura 2,67: Ejercicio 9

- 10) Despreciando la contribución del hormigón a tracción, deduzca las curvas de comportamiento (M_i vs ϕ_i) correspondiente a la misma sección de hormigón armado del ejemplo anterior con la modificación del acero que se indica en la figura 2.68, también para cargas de corta duración y las siguientes leyes constitutivas del hormigón a compresión:

- Diagrama parabólico de Collins
- Diagrama de Hognestad
- Diagrama de Rüsç



$$\begin{aligned} f'_c &= 30\text{MPa} \\ f_y &= 300\text{MPa} \\ E_s &= 2 \cdot 10^5\text{MPa} \\ \varepsilon_o &= 0.002 \text{ (carga de corta duración)} \end{aligned}$$

Figura 2,68: Ejercicio 10

- 11) Para una sección con los siguientes características, y trabajando con la ley constitutiva del hormigón definida por **Hognestad**:

$$\begin{array}{lll} b = 40\text{cm} & f'_c = 20\text{MPa} & A'_s = 10\text{cm}^2 \\ h = 80\text{cm} & f_y = 420\text{MPa} & A_s = 50\text{cm}^2 \\ d_s = 7\text{cm} & d' = 5\text{cm} & E_s = 2 \cdot 10^5\text{MPa} \end{array}$$

- a) Calcule los valores de M y φ para los siguientes deformaciones del hormigón
- ♦ $\epsilon'_c = 0.35\%$
 - ♦ $\epsilon'_c = 0.2\%$
 - ♦ $\epsilon'_c = 0.1\%$
- b) Repita los cálculos anteriores considerando $A'_s = 0$
- c) Realice una evaluación en cada caso sobre los cambios que produce esta modificación sobre C_c, M y φ
- d) Sobre los cálculos realizados en el inciso (a) para $\epsilon'_c = 0.35\%$, se decide añadir 10cm^2 a ambas armaduras (tracción y compresión). ¿Qué provocan estos cambios sobre?
- ♦ Profundidad de la línea neutra (c)
 - ♦ Deformación del refuerzo (ϵ'_s, ϵ_s)
 - ♦ Curvatura (φ)
 - ♦ Brazo mecánico de la fuerza (C_c)
 - ♦ Momento flector (M)

Justifique en todos los casos su respuesta

- 12) Construya las **curvas simplificadas** (M vs φ) correspondientes a la sección del ejemplo anterior empleando, en lugar de **Hognestad**, las siguientes leyes constitutivas para el hormigón:

- ☞ Parabólico
- ☞ Lineal
- ☞ Rüschi

Considere las tres propuestas de refuerzo siguiente:

- ♦ $A'_s = 0$ y $A_s = 50\text{cm}^2$
- ♦ $A'_s = 10\text{cm}^2$ y $A_s = 50\text{cm}^2$
- ♦ $A'_s = 20\text{cm}^2$ y $A_s = 50\text{cm}^2$

- a) Compare las curvas simplificadas obtenidas y realice las valoraciones por medio de la comparación del momento nominal (M_n), de la profundidad de la línea neutra (c) de la ductilidad (φ_n/φ_y)

- 13) Para una sección con las siguientes características:

HORMIGÓN: $b = 40\text{cm}$; $h = 80\text{cm}$

ACERO: $A'_s = 10\text{cm}^2$; $A_s = 50\text{cm}^2$; $f_y = 420\text{MPa}$; $d_s = 7\text{cm}$; $d' = 5\text{cm}$; $E_s = 2 \cdot 10^5\text{MPa}$

- a) Construya las curvas de comportamiento simplificadas utilizando el diagrama de Rüschi para las tres calidades de hormigón siguientes:

- ♦ $f'_c = 20\text{MPa}$
- ♦ $f'_c = 30\text{MPa}$

$$\diamond f'_c = 40MPa$$

- b) Realice un análisis de la influencia de la calidad del hormigón (f'_c) sobre el momento resistente y la ductilidad de la sección.
- c) Emita criterios sobre la relación costo beneficio de cada una de las propuestas

14) Para una sección con las siguientes características:

$$\text{HORMIGÓN: } b = 40cm ; \quad h = 80cm ; \quad f'_c = 30MPa$$

$$\text{ACERO: } A'_s = 10cm^2 ; \quad A_s = 50cm^2 ; \quad d_s = 7cm ; \quad d' = 5cm ; \quad E_s = 2 \cdot 10^5 MPa$$

- a) Construya las curvas de comportamiento simplificadas utilizando el diagrama de Collins para las dos calidades de acero siguientes:

$$\diamond f_y = 300MPa$$

$$\diamond f_y = 420MPa$$

- b) Realice un análisis de la influencia de la calidad del acero (f_y) sobre el momento resistente y la ductilidad de la sección.
- c) Emita criterios sobre la relación costo beneficio de cada una de las propuestas

15) Resolver el **Ejercicio 2,9** correspondiente a la sección de hormigón pretensado sometida a flexión adoptando los mismos datos que se definieron para su solución, bajo las siguientes consideraciones:

- Incluya en el estudio la contribución del hormigón a tracción.
- Ignore nuevamente la contribución del hormigón a tracción y considere la presencia del acero en compresión que aparece en la Figura 2.26c, si se trata de **2 No. 16**, de grado **G-40** y con que un recubrimiento mecánico igual a $d' = 50mm$.

BIBLIOGRAFÍA CONSULTADA

1. American Concrete Institute. Building Code Requirements for Reinforced Concrete, ACI 318 – 02, Detroit, Michigan. 2005
2. Bresler, B. Concreto Reforzado en Ingeniería. México: Ed. Limusa. 1981
3. CEB–FIP. Código Modelo del Comité Europeo del hormigón y la Federación Internacional del Pretensado. 1990
4. Collins, M. Comportamiento del Hormigón. Impresiones Ligeras, ISPJAE. 1978
5. Dos Santos Lauro Modesto “Calculo de Concreto. Tomo 1 td EMS LTDA Sao Paulo 1983
6. Hernández Santana, J. y Bermúdez Machado, M. Comportamiento de Secciones Pretensadas. (1^{ra} Parte). Ingeniería Civil, Nro. 117, enero- febrero -marzo, CEDEX, Madrid, España. 2000
7. ----. Comportamiento de Secciones Pretensadas. (2^{da} Parte). Ingeniería Civil, Nro. 118, abril, mayo, junio, CEDEX, Madrid, España. 2000
8. Leonhardt, F. Hormigón Pretensado. Instituto Eduardo Torroja. 1967
9. Mattok, A, Kriz L, Hognestad E. “Rectangular concrete stress distribution in ultimate Stnength Design” Journal ACI feb. 1961
10. N.C. 053–039–1997. Obras de Hormigón Armado. Principios Generales y Métodos de Cálculo. 1997
11. Park, R. y T, Paulay. Estructuras de Concreto Reforzado. México: Ed. Limusa, 1979
12. Poliakov L, Lisenko E, Kurnetsov L, “Zhelezobetonnie konstruksi” Vishcha Shkola, Kiev 1984
13. Rüsch, H, “Researches toward a General Flexural Theory for structural Concrete”. Journal ACI July 1960
14. Rüsch, H. Hormigón Armado y Hormigón Pretensado. México: Ed. Limusa. 1979

CAPÍTULO 3

La seguridad en el diseño estructural

3.1 INTRODUCCIÓN

El diseño de estructuras persigue dos propósitos básicos: garantizar seguridad ante la posibilidad de un **fallo**, o sea, evitar el colapso en términos de rotura, y asegurar un adecuado **funcionamiento** de la estructura para cumplir su cometido. En la búsqueda de esta seguridad se manejan los términos.

CONFIABILIDAD: indica qué probabilidad de ocurrencia existe para determinado fallo.

ECONOMÍA: procura el diseño óptimo para que la estructura sea confiable al menor costo.

Combinar ambos conceptos representa uno de los retos mayores para los proyectistas, sobre todo reconociendo la improbabilidad de garantizar con absoluta certeza que el fallo no se produzca, pues siempre existirá la posibilidad de que se presenten cargas mayores que las previstas, o resistencias menores que las consideradas durante el cálculo. Por eso, se debe asegurar que las estructuras sean capaces de:

- Soportar todas las acciones e influencias medioambientales que previsiblemente puedan ocurrir durante la construcción y la vida efectiva de la estructura.
- Comportarse adecuadamente durante su utilización a través del período de vida útil previsto, que debe ser especificado por el cliente.

En lo anterior se establecen dos puntos de primordial interés:

El primero¹: Tratamiento probabilístico de la seguridad mediante la introducción del concepto de “Probabilidad de puesta fuera de servicio” aceptando, en definitiva, que **la estructura tendrá una confiabilidad determinada**, pero no una seguridad absoluta.

El segundo: El concepto de duración de vida prevista o vida útil, renunciando a la idea de que las estructuras se construyan para siempre.

La Tabla 3.1² indica la vida útil para las que se suelen proyectarse objetos muy diversos. Definir el período de vida útil de una estructura de la manera expuesta en la Tabla 3.1 o de cualquier otra, no implica la incapacidad de proyectar para una vida útil más prolongada, sino que hacerlo sería poco rentable debido a previsibles cambios sociales, económicos y técnicos, que harían necesario su reemplazo y por tanto, prescindir de sus servicios funcionales aun disfrutando de un aceptable estado técnico.

¹ Un concepto pionero en este campo fue el introducido por Eduardo Torroja y A. Páez, en el trabajo titulado: “La determinación del coeficiente de seguridad en las distintas obras”. ITCC. Madrid.

² Tomada de la referencia “The safety of Structures” del autor Pugsley-A (Edward Ltd. London 1966)

TABLA 3.1. Vida Útil de algunas estructuras.

TIPO DE PROYECTO	PERÍODOS DE VIDA ÚTIL CONSIDERADO EN PROYECTO (AÑOS)
Barcos	40
Edificios de vivienda	100
Edificios de oficinas	50
Grandes fábricas	40
Almacenes	80
Puentes de carretera	100
Puentes de ferrocarril	80
Obras de puertos	200
Iglesias	500
Catedrales	1000

Por otro lado, los riesgos de una puesta fuera de servicio son de muy diversos tipos y de compleja valoración, pero pueden agruparse en:

- Riesgo de pérdidas de vidas humanas, de heridas a personas, reacciones de la opinión pública frente a las consecuencias de una eventual puesta fuera de servicio (por ejemplo en hospitales, escuelas, etc.)
- Riesgos económicos, en especial:
 - Los provocados por la interrupción del servicio de la estructura.
 - Los correspondientes a su reparación, si ésta es posible.
 - Los relativos a su eventual demolición y posible reconstrucción.

En definitiva, la respuesta de los sistemas estructurales frente a la acción de las cargas, consta de dos elementos (Figura. 3.1): La *respuesta en términos de fuerzas* y la *respuesta en términos de desplazamientos*.

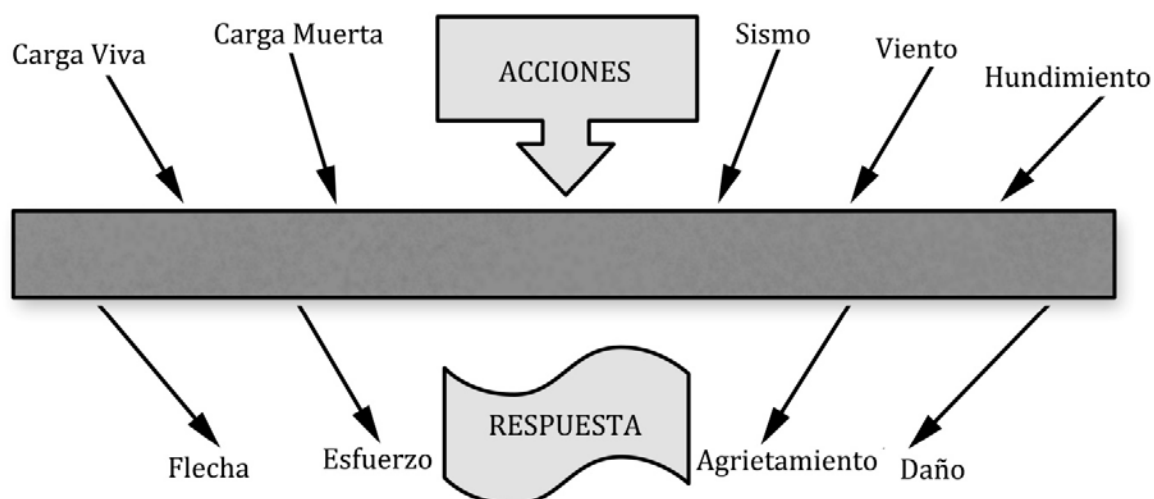


Figura 3.1 *Respuesta de los sistemas estructurales ante las acciones exteriores.*

La seguridad estructural tiene que basarse no sólo en la resistencia del elemento, sino también en su probada aptitud para garantizar su desempeño, por lo que para enfocar el fenómeno en toda su magnitud se establece el concepto de **ESTADO LÍMITE**, definido como cualquier situación particular que interrumpa las funciones de la estructura, es decir, *todo estado de comportamiento estructural que resulte inaceptable, independientemente del tipo de respuesta que se esté evaluando (límites de resistencia o límites de funcionalidad)* (Figura. 3.2).



Figura 3.2 Definición gráfica del concepto Estado Límite.

Los Estados Límites pueden clasificarse en dos grandes grupos, según refiere la Tabla 3.2: **Estados Límites Últimos** (referidos a aquellas situaciones que comprometen los límites de resistencia de una sección, elemento o estructura, llamados también de Rotura o Falla), y los **Estados Límites de Servicio** (relacionados con la servicialidad, aptitud o funcionamiento de cada elemento de la estructura y de toda ella en su conjunto, bajo cargas de servicio).

TABLA 3.2 Clasificación de los principales Estados Límites en estructuras de hormigón

ESTADO LÍMITE	TIPO
ÚLTIMO, DE FALLA, ROTURA O COLAPSO	<ul style="list-style-type: none"> • Agotamiento de secciones críticas (rotura) • Pérdida de estabilidad local o general • Deterioro por fatiga • Inestabilidad por deformación • Conversión de la estructura en un mecanismo
DE SERVICIO O UTILIZACIÓN	<ul style="list-style-type: none"> • Desplazamientos verticales (flechas), horizontales o Giros excesivos • Agrietamiento (fisuración) prematura o excesiva • Vibraciones perjudiciales • Corrosión de las armaduras

En el diseño estructural por estados límites se procura relacionar la respuesta de las secciones críticas con la magnitud de la acción actuante, y para los estados límites de falla se define el concepto de “resistencia” como la magnitud de la carga que moviliza la capacidad portante límite de dichas secciones, y en la Figura 3.3 se esquematiza cómo pueden existir diferentes resistencias en un mismo elemento estructural.

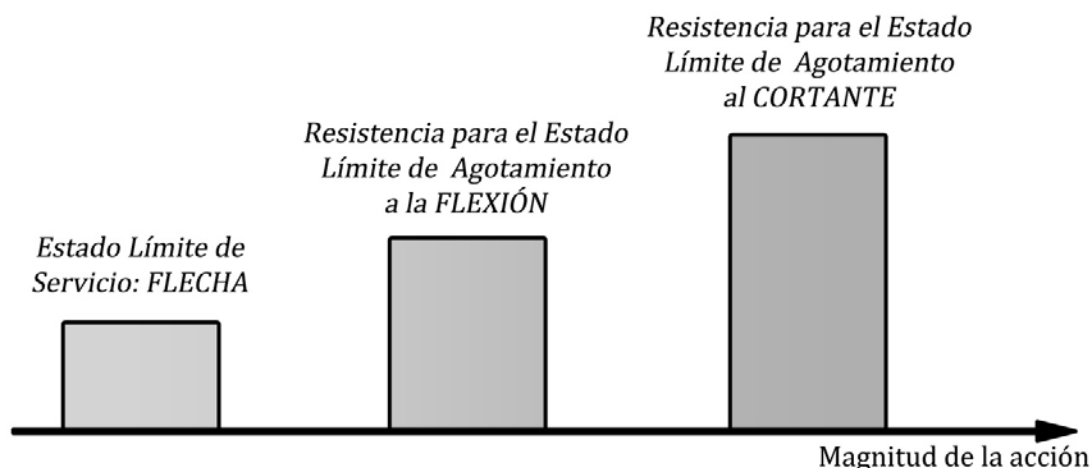


Figura: 3,3: Estados Límites para diferentes estados de carga y la relación entre la acción y la resistencia.

Los estados límites de utilización (flecha o agrietamiento) se presentan para las cargas de servicio, mientras que los de falla para cargas muy superiores, debiéndose manejar criterios sobre la importancia del fallo y las características funcionales del elemento. Por ejemplo, durante el diseño de una viga se defiende siempre que, de producirse el posible fallo, ocurra antes a flexión que a cortante. El primero es un fallo generalmente dúctil mientras el segundo posee rasgos marcadamente frágiles o bruscos.

3.1.1 FACTORES DE INCERTIDUMBRE

En general para lograr la confiabilidad de la estructura deben tomarse en cuenta múltiples factores que inciden en su comportamiento. Llamados FACTORES DE INCERTIDUMBRE, se pueden dividir en:

- **Asociados a las cargas :**
Variaciones en su magnitud, posición, en la duración y frecuencia de la acción, lo mismo que en la posibilidad de que existan combinaciones no previstas.
- **Asociados a la resistencia**
Incluyen la variabilidad en la calidad de los materiales (tensión y deformación), en las dimensiones de los elementos respecto de las de proyecto, en la posición de los aceros de refuerzo, y otros errores constructivos y de diseño generalmente impredecibles.
- **Asociados a las hipótesis y simplificaciones**
Durante la etapa de modelación y diseño estructural se establecen hipótesis y se admiten simplificaciones que permiten transformar la estructura real en un modelo que es precisamente el que se analiza. En esta representación se incluyen las INVARIANTES reconocidas de la modelación estructural: geometría, condiciones de continuidad, cargas y materiales. A la vez, los métodos de cálculo se sustentan en patrones analíticos que interpretan con suficiente precisión el comportamiento ante cargas del modelo físico, pero que introducen inevitablemente errores sistemáticos o accidentales que no pueden evitarse.

- **Asociados a factores subjetivos o no cuantificables estadísticamente**

Toman en cuenta la importancia de la obra, del fallo y su trascendencia, del control en la ejecución, de las condiciones de trabajo de un elemento o material, de las condiciones de fabricación, etc.

Llamar la atención sobre estos factores fue tal vez el propósito fundamental de la idea que recoge Meli Piralla en su texto de Diseño Estructural: *“El diseño estructural es el arte de usar materiales que no conocemos, para formar estructuras que en realidad no podemos analizar, de manera que resistan cargas que en realidad no podemos evaluar, todo esto en modo tal que el público no se de cuenta de nuestra ignorancia.”*

El análisis de estos factores se puede agrupar en dos categorías:

- Aquellos que se pueden modelar, cuantificar y caracterizar estadísticamente, y
- Aquellos que no caen en este campo y que requieren de apreciaciones cualitativas en función de lo que representa la estructura y/o el elemento, y su pérdida de seguridad.

Los métodos más utilizados en la actualidad para introducir la seguridad durante el diseño o para medirla, son del tipo *semi probabilísticos*, porque analizan por separado las funciones y factores que responden a las cargas y las resistencias y, además, porque evalúan estadísticamente aquellos factores en los que resulta posible hacerlo, unido al empleo de coeficientes de seguridad para compensar el empleo de otras variables que no pueden ser tratadas estadísticamente.

3.1.2 PROBABILIDAD DE OCURRENCIA DEL FALLO

Con el propósito de comprender el concepto de confiabilidad mediante un análisis elemental, se puede recurrir a un gráfico de distribuciones probabilística de sólo dos variables, las que resumen las restantes variables aleatorias que intervienen en la seguridad de la estructura. Las dos variables seleccionadas son:

CARGAS O ACCIONES (Y_1 ó S)
RESISTENCIA (Y_2 ó R)

En la Figura 3.4 se ilustra una representación ortogonal de las leyes de variación probabilística de las funciones Carga y Resistencia, mediante un sistema cartesiano en el que el eje horizontal refiere la variable **Cargas Resistentes** para un elemento estructural cualquiera, y el vertical la variable **Cargas Actuantes**. Resulta obvio considerar que la sección **RESISTE** siempre que se satisfaga la condición $R \geq S$, y que **FALLA** cuando se cumpla lo contrario, es decir, $R < S$.

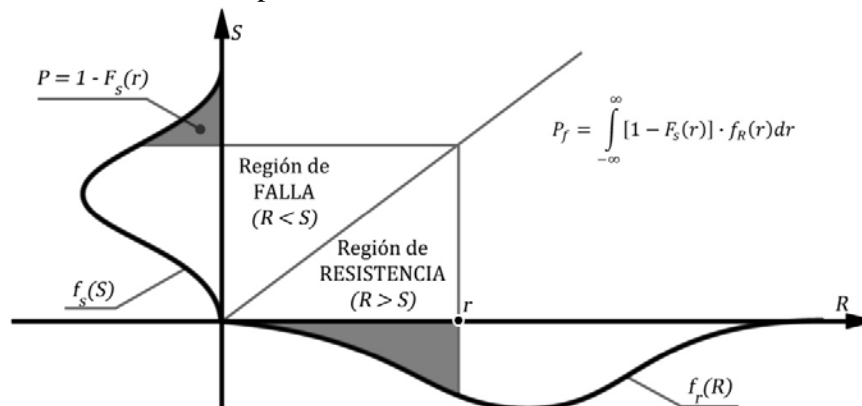


Figura 3.4 *Relacion Acción – Resistencia. Enfoque probabilístico. Representación Ortogonal*

Si se establece una frontera de falla mediante una recta a 45° que pasa por el origen, se observaría que para un valor de resistencia “ r ” prefijado, la probabilidad de ocurrencia del fallo P se daría siempre para un valor de $R \leq S$ que, como se observa en el gráfico, resulta ser $P = 1 - F_S(r)$.

Es evidente que mientras menor sea la resistencia “ r ”, la probabilidad de que se produzca una acción S que la sobrepase será mayor, y por tanto la sección menos segura, menos confiable.

3.1.3 EL FACTOR DE SEGURIDAD

Convendría responder a la siguiente interrogante: ¿Cómo introducir la SEGURIDAD durante el cálculo estructural?

Para comprender el concepto de seguridad resulta conveniente recurrir a una representación coaxial de las leyes de variación probabilística de las funciones Carga y Resistencia como se observa en la Figura 3.5, situando ambas curvas una a continuación de la otra, lo que permitiría definir dos importantes conceptos: **Probabilidad de ocurrencia del fallo** y **Factor de seguridad global**.

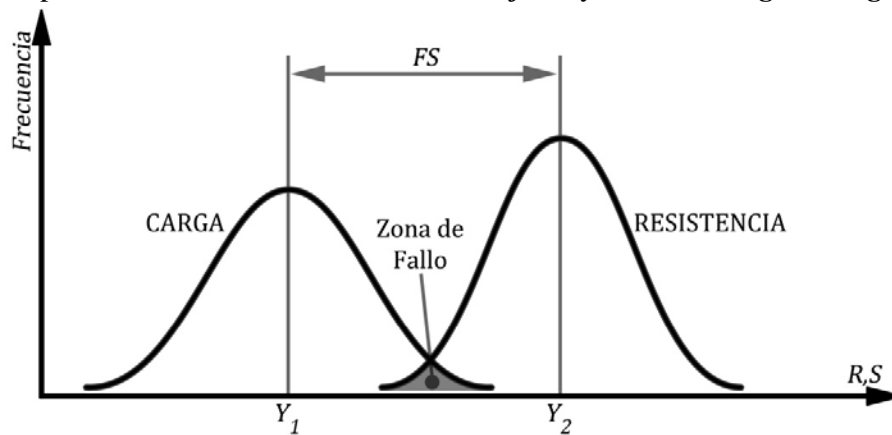


Figura 3.5 Enfoque probabilístico. Representación coaxial.

El factor de seguridad se puede definir mediante la relación funcional que se expresa de la siguiente manera:

$$FS = \frac{Y_2}{Y_1}$$

Siendo Y_2 y Y_1 los valores medios de carga resistente (resistencias) y carga actuante, respectivamente. Esta expresión hace suponer que mientras mayor sea FS , mayor será la seguridad y la confiabilidad, mientras que la probabilidad de fallo será menor. Sin embargo un análisis más detallado conduce a concluir que resultan decisivos otros factores probabilísticos, principalmente el **Tipo de Distribución** que se adopte (normal, extrema, logarítmica, etc.), y la **Dispersión de la Muestra** (σ : desviación estándar; v : coeficiente de variación, etc.)

Para resistencias o cargas medias iguales, distribuciones diferentes pueden provocar probabilidades de fallo diferentes y por tanto distorsionar el factor de seguridad. Por otra parte, existen otros factores que se pueden reflejar en este factor de seguridad FS , por ejemplo: importancia de la obra, características del fallo, tipo de sollicitación, de cargas, etc.

Sin embargo el concepto anterior de FACTOR DE SEGURIDAD GLOBAL requiere de una mayor precisión pues pueden presentarse, desde el punto de vista teórico, las cuatro posibilidades que se ilustran en la Figura 3.6.

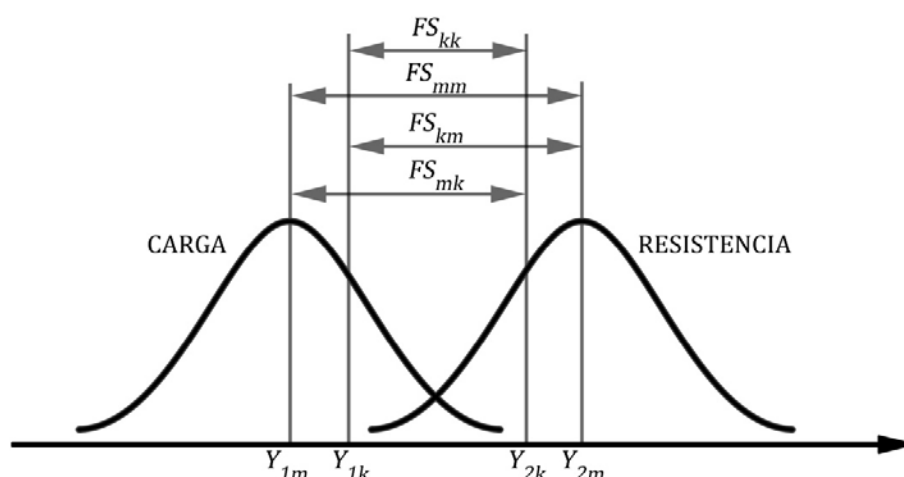


Figura 3.6 Distintas formas de fijar el coeficiente de seguridad global.

1. Cuando se determine el factor de seguridad mediante los valores medios tanto de las cargas como de las resistencias Y_{1m} y Y_{2m} , es decir: FS_{mm}
2. Cuando se determine el factor de seguridad mediante el valor característico de las cargas Y_{1k} y el valor medio de la resistencia Y_{2m} , es decir: FS_{km}
3. Cuando se determine el factor de seguridad mediante el valor característico de la resistencia Y_{2k} y el valor medio de las cargas Y_{1m} , es decir: FS_{mk}
4. Cuando se determine el factor de seguridad mediante el valor característico tanto de las cargas Y_{1k} , como de la resistencia Y_{2k} , es decir: FS_{kk}

Tomando en cuenta que las normativas brindan siempre la función característica de las cargas Y_{1k} , las vías más empleadas para introducir la seguridad en el diseño resultan ser la 2da y la 4ta, dependiendo del método que se siga en el diseño.

Por otro lado al fijar el factor de seguridad más razonable deben introducirse criterios económicos. En la Figura 3.7 se trata de esquematizar esta idea a partir de definir las siguientes variables:

$C_t = C_o + D \cdot P_f$	Costo total
▪ C_o	Costo inicial de la estructura
▪ D	Costo de los daños
▪ P_f	Probabilidad de ocurrencia de fallo.

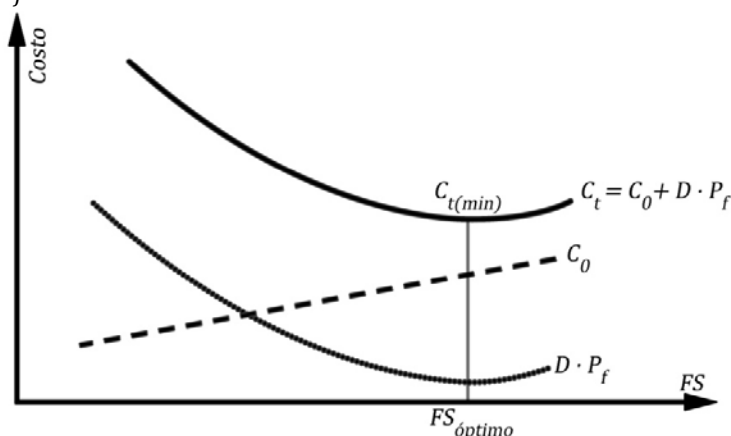


Figura 3.7 Relación Costo – Factor de Seguridad.

El valor óptimo del factor de seguridad ($FS_{\text{óptimo}}$) es aquel que asegure un alto nivel de seguridad con un costo mínimo, como se ilustra en la Figura 3.7.

3.2 DIFERENTES MÉTODOS PARA MEDIR LA SEGURIDAD

La forma de introducir la seguridad en el diseño estructural ha tenido una evolución con el tiempo, incluso los distintos métodos que se conocen coexisten en la actualidad y se aplican a distintos materiales y elementos, con distintas variantes y procedimientos. A continuación se exponen en orden cronológico los diferentes métodos que han sido utilizados en la práctica del diseño estructural, agrupándolos en las siguientes categorías:

- Método de las Tensiones Admisibles.
- Método de Rotura o del Factor de Seguridad Global.
- Método de los Estados Límites.
- Teoría de la Confiabilidad o Seguridad Estructural.

3.2.1 EL MÉTODO DE TENSIONES ADMISIBLES

Uno de los primeros métodos empleados para el diseño fue el de las Tensiones Admisibles, regido por el cumplimiento de la siguiente condición:

$$Y_{1k} \leq Y_{2\text{admisible}}$$

En esta ecuación:

Y_{1k} Representa el valor de tensiones o cargas actuantes, con sus valores normativos o característicos.

$Y_{2\text{admisible}}$ Valor de las tensiones, fuerzas o resistencias admisibles del material con que se trabaja (acero, hormigón, madera, suelo, etc.).

En este método el valor de $Y_{2\text{admisible}}$ se determina de forma experimental o empírica, a veces sin tener en cuenta factores que influyen de forma decisiva en la capacidad portante de los elementos o materiales, por lo que se procura asegurar un trabajo (relación **tensión vs deformación**) dentro del rango de comportamiento lineal del material, y por eso se considera que es suficientemente seguro.

Inicialmente se aplicaba al diseño en acero y madera, pasando posteriormente a aplicarse al hormigón, pero con el tiempo este método fue desechado, ya que su empleo no permite predecir con la precisión deseada cuál es la seguridad que se introduce en el diseño. Además no se toma en cuenta la seguridad en el término que representa la acción de las cargas, y el modelo **tensión vs deformación** que considera para los materiales durante el diseño se aleja demasiado de su comportamiento real, por lo que con este procedimiento los diseños que se obtienen distan bastante de ser óptimos y racionales, siendo una razón más para la búsqueda de métodos de diseño más efectivos y económicos.

Con este método el tratamiento del Hormigón Armado se hace a partir de una derivación de los enfoques que se empleaban en el diseño de acero, aceptando un comportamiento elástico del hormigón, y garantizando que tanto este material como el acero, no sobrepasen determinadas tensiones admisibles establecidas previamente, las que internacionalmente se fijan alrededor de los siguientes límites:

HORMIGÓN: $[f_c] \leq 0.45f'_{cm}$

ACERO: $[f_s] \leq 0.50f_y$

Siendo:

f'_{cm} Resistencia media del hormigón a compresión
 f_y Tensión de fluencia del acero.

Para el caso de un elemento de hormigón armado sometido a flexión, cuyo comportamiento se analizara en el capítulo anterior, las fuerzas interiores que deben aparecer para asegurar el equilibrio a nivel de su sección transversal se ilustran en la Figura 3.8. En este método la condición de diseño se escribe de la forma:

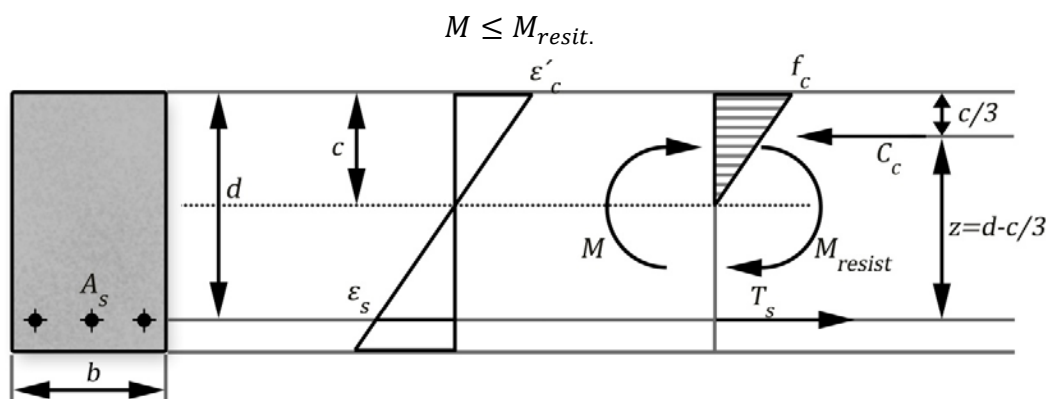


Figura 3.8 Sección, Deformaciones y Fuerzas en el diseño por Tensiones Admisibles.

Y su tratamiento analítico se realiza de la manera siguiente:

$$\sum F_x = 0 \Rightarrow C_c = T_s \quad \text{(EQUILIBRIO DE FUERZAS)}$$

Siendo:

$$\left\{ \begin{array}{l} C_c = \frac{1}{2} f_c (b \cdot c) \\ T_s = f_s A_s \end{array} \right\} \Rightarrow \frac{1}{2} f_c (b \cdot c) = f_s A_s$$

$$\sum M = 0 \Rightarrow M - M_{resist.} = 0 \quad \text{(EQUILIBRIO DE MOMENTOS)}$$

Siendo:

$$M_{resist.} = C_c \left(d - \frac{c}{3} \right) = T_s \left(d - \frac{c}{3} \right)$$

$$\therefore M_{resist.} = \frac{1}{2} f_c (b \cdot c) \left(d - \frac{c}{3} \right) = A_s f_s \left(d - \frac{c}{3} \right)$$

ORDENAMIENTO DEL MODELO ANALÍTICO PARA EL DISEÑO

Paso 1: Se fijan las tensiones admisibles para el hormigón y el acero:

$$f_c \leq [f_c] \Rightarrow f_c = \lambda_c f'_{cm} \quad \text{Debiendo ser } \lambda_c \leq 0.45$$

$$f_s \leq [f_s] \Rightarrow f_s = \lambda_s f_y \quad \text{Debiendo ser } \lambda_s \leq 0.50$$

Paso 2: Se determina la profundidad de la línea neutra mediante la condición de equilibrio de momento $M_{resist.} = M$, y haciendo $f_c = \lambda_c f'_{cm}$:

$$c^2 - (3d)c - \frac{6M}{b\lambda_c f'_{cm}} = 0$$

Paso 3: Se determina y comprueba la tensión de trabajo del acero:

3.1) Evaluación de la deformación a nivel de la fibra de hormigón más comprimida (ϵ'_c):

Asegurando que $\lambda_c \leq 0.45$, puede aceptarse que el hormigón se encuentran trabajando en su intervalo de respuesta elástica (ley de Hooke), y la relación **tensión vs. deformación** será lineal:

$$f_c = E_c \cdot \varepsilon'_c \quad \Rightarrow \quad \varepsilon'_c = \frac{f_c}{E_c} = \frac{\lambda_c f'_{cm}}{E_c}$$

3.2) Evaluación de la deformación a nivel de la armadura en tracción (ε_s):

La necesaria compatibilidad que debe existir entre las deformaciones del hormigón y el acero a causa de la adherencia, exige el cumplimiento de la siguiente condición:

$$\frac{\varepsilon'_c}{c} = \frac{\varepsilon_s}{d - c} \quad \Rightarrow \quad \varepsilon_s = \frac{d - c}{c} \varepsilon'_c \quad \Rightarrow \quad \varepsilon_s = \lambda_c \left(\frac{d - c}{c} \right) \frac{f'_{cm}}{E_c}$$

3.3) Evaluación de la tensión de la armadura en tracción (f_s):

$$f_s = E_s \cdot \varepsilon_s$$

3.4) Comprobación de la tensión de la armadura en tracción:

$$\lambda_{s(calculado)} = \frac{f_s}{f_y} \leq \lambda_s$$

Paso 4: Se determina el área de acero requerida (A_s):

Verificada la condición anterior, se calcula el área de acero mediante la ecuación de equilibrio de fuerza:

$$\therefore A_s = \frac{1}{2} \lambda_c (b \cdot c) \frac{f'_{cm}}{f_s}$$

ORDENAMIENTO DEL MODELO ANALÍTICO PARA LA REVISIÓN

El procedimiento es análogo al descrito anteriormente, sólo que se determina la profundidad de la línea neutra, no a partir de la condición de equilibrio de momentos, sino de fuerzas:

Paso 1: Se fijan las tensiones admisibles para el hormigón y el acero:

$$f_c \leq [f_c] \quad \Rightarrow \quad f_c = \lambda_c f'_{cm} \quad \text{Debiendo ser } \lambda_c \leq 0.45$$

$$f_s \leq [f_s] \quad \Rightarrow \quad f_s = \lambda_s f_y \quad \text{Debiendo ser } \lambda_s \leq 0.50$$

Paso 2: Se determina la profundidad de la línea neutra mediante la condición de equilibrio de fuerzas:

$$\frac{1}{2} f_c (b \cdot c) = f_s A_s \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{2} (E_c \varepsilon'_c) (b \cdot c) = (E_s \varepsilon_s) A_s$$

Haciendo $n = E_s/E_c$, y considerando que según la condición de compatibilidad de las deformaciones a nivel de sección, escrita en el paso 3.2 del procedimiento anterior, se tiene que:

$$\frac{\varepsilon'_c}{\varepsilon_s} = \frac{c}{d - c}$$

Entonces:

$$\frac{1}{2} b c^2 + n A_s c - n \cdot d \cdot A_s = 0$$

Paso 3: Se determina y comprueba la tensión de trabajo del hormigón:

3.1) Obtener la deformación unitaria del acero para el valor de λ_s fijado:

$$\varepsilon_s = \frac{\lambda_s f_y}{E_s}$$

3.2) Obtener la deformación unitaria del hormigón a partir de la ecuación de compatibilidad de las deformaciones:

$$\varepsilon'_c = \left(\frac{c}{d - c} \right) \varepsilon_s$$

3.3) Obtener la tensión del hormigón a nivel de la fibra más comprimida de la sección:

$$f_c = E_c \cdot \varepsilon'_c$$

3.4) Determinar el valor de λ_c :

$$\lambda_c = \frac{f'_c}{f'_{cm}} \quad \text{debiéndose cumplir que } \lambda_c \leq 0.45$$

Paso 4: Evaluar el momento resistente de la sección:

$$M_{resist.} = \frac{1}{2} f_c (b \cdot c) \left(d - \frac{c}{3} \right) = A_s f_s \left(d - \frac{c}{3} \right)$$

Paso 5: Definición de la capacidad resistente de la sección a partir de la comparación entre los momentos actuante y resistente:

Si $M \leq M_{resist.}$, la sección es apta

Si $M > M_{resist.}$, el diseño propuesto debe rechazarse

En resumen, el método tiene las siguientes desventajas o inconsistencias:

- ✓ Emplea tanto para el hormigón como para el acero diagramas lineales en el agotamiento, etapa en la que se sabe que dichas leyes se alejan del comportamiento real, especialmente en el caso del hormigón.
- ✓ No se conoce el valor de momento resistente en la sección, como tampoco la verdadera tensión a que se somete cada material, por tanto, no llega a establecerse el factor de seguridad global y mucho menos el NIVEL DE SEGURIDAD.
- ✓ No se manejan los factores de incertidumbre de las cargas en ninguna dimensión.

Procedimientos similares, lo mismo de diseño que de comprobación, se pueden desarrollar para otras sollicitaciones: tracción, compresión, cortante, torsión, etc.

3.2.2 MÉTODO DE LA ROTURA O DEL FACTOR DE SEGURIDAD GLOBAL

Posteriormente al de tensiones admisibles, surge el Método de Rotura o del Factor de Seguridad Global, cuya ecuación fundamental puede ser escrita de la forma:

$$Y_{1k} \leq \frac{Y_{2m}}{FS}$$

Siendo:

Y_{1k} Función de las tensiones o cargas actuantes determinada a partir de sus valores de servicio o característicos.

Y_{2m} Función de las tensiones o fuerzas resistentes en la rotura, determinada con los valores medios de la resistencia de los materiales.

FS Factor de seguridad global.

En este método se parte de recoger en un único coeficiente, FS , todas las incertidumbres que están presentes en la obtención de los distintos parámetros que intervienen en el diseño, y que determinan cuánto se aleja el diseño de la zona de falla (Figura 3.9).

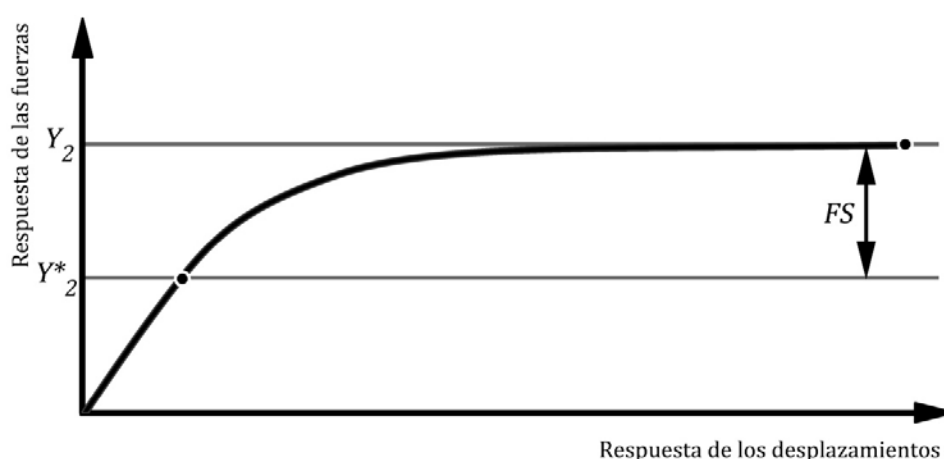


Figura 3.9 El factor de seguridad global

Durante el desarrollo de las investigaciones del hormigón armado surge en la antigua URSS dentro de la tercera década del siglo pasado, un análisis del aporte del hormigón en la rotura con un enfoque totalmente plástico, evaluando el material en su agotamiento mediante leyes que desconocen la linealidad del comportamiento de las secciones al aparecer las rótulas plásticas (Figura 3.10).

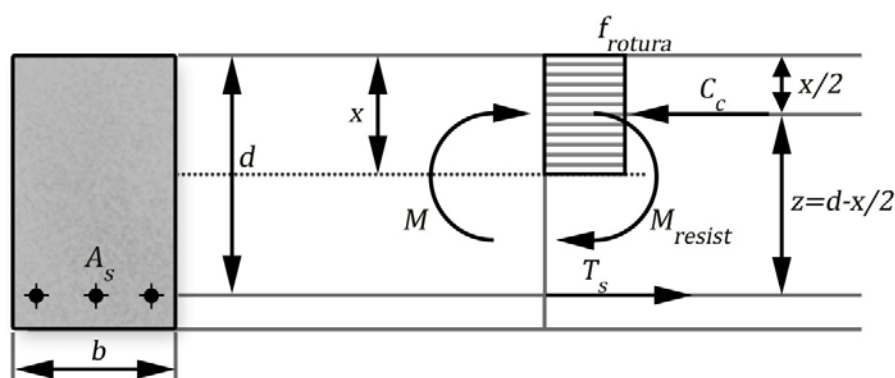


Figura 3.10 Sección, Deformaciones y Fuerzas en el diseño por Rotura.

Los materiales se consideran trabajando a su máxima capacidad, y a las tensiones que se escriben a continuación:

HORMIGÓN: $f_{rotura} = 1.25f'_c$

ACERO: $[f_s] = f_y$

Las ecuaciones de equilibrio serán:

$$\sum F_x = 0 \Rightarrow C_c = T_s$$

(EQUILIBRIO DE FUERZAS)

Siendo:

$$C_c = 1.25f'_c(b \cdot x)$$

$$T_s = f_y A_s$$

$$\therefore 1.25f'_c(b \cdot x) = f_y A_s$$

$$\sum M = 0 \Rightarrow M - M_{resist.} = 0$$

(EQUILIBRIO DE MOMENTOS)

Siendo:

$$M_{resist.} = C_c \left(d - \frac{x}{2} \right) = T_s \left(d - \frac{x}{2} \right)$$

Y al momento flector resistente se le aplica el factor de seguridad global, de forma que:

$$M = \frac{M_{resist.}}{FS}$$

Este método resulta un avance sustancial al introducir un comportamiento más cercano al real en el agotamiento, además del concepto de FS . Sin embargo, entre sus desventajas están:

- No toma en cuenta explícitamente los factores de incertidumbre de los materiales, al sólo admitir sus valores máximos.
- El FS global es muy amplio y no permite tomar en cuenta la variabilidad de las cargas y de los materiales ni su importancia y por tanto no aporta la confiabilidad requerida.

No obstante se avanzó al considerar valores de FS para diferentes tipos de solicitaciones, convirtiéndose en una primera aproximación al Método de Estados Límites. Por ejemplo, para vigas se adoptaron los siguientes valores:

$FS = 1.8$ Para vigas y losas en las que la relación entre las cargas permanentes y accidentales cumple con la condición $L/D \leq 2$.

$FS = 2$ Para vigas y losas en las que la relación entre las cargas permanentes y accidentales cumple con la condición $L/D > 2$.

3.2.3 MÉTODO DE LOS ESTADOS LÍMITES

3.2.3.1 EL MÉTODO DE LOS ESTADOS LÍMITES GENERALIDADES

Como resultado de posteriores investigaciones surge para el diseño estructural el método de los Estados Límites. El método establece dos condiciones límites de diseño:

1^{er} Estado Límite: Estado en que se diseña para lograr la resistencia y estabilidad de la estructura, con los **valores de cálculo** de todas las variables que intervienen (cargas y resistencias).

2^{do} Estado Límite: Estado que garantiza el servicio y utilización de la estructura, comprobándose variables como la deformación y la fisuración para los valores característicos, tanto de las cargas como de las resistencias de los materiales.

Los primeros trabajos sobre la aplicación de este método al diseño estructural aparecen en la década de los 50 como resultado de investigaciones de varios científicos rusos, instaurándose como normativa en la URSS en los años 60. En Cuba, los estudios realizados por el Ing. Pimpo Hernández Pérez permitieron la más pronta introducción del método en el país.

El Método de los Estados Límites (MEL) se fundamenta en la obtención de un diseño donde las cargas y las tensiones a las que está sometido el material que se emplee en el elemento a diseñar, así como las deformaciones y desplazamientos que en ella se originan, tanto en el período de construcción como durante su vida útil, estén cerca de los límites permisibles para cada caso, sin llegar a sobrepasarlos.

La ecuación que rige el diseño del **1^{er} Estado Límite** es:

$$Y_1^* \leq \frac{Y_2^*}{\gamma_s} \quad \text{Si } \gamma_s > 1 \quad \text{ó}$$

$$Y_1^* \leq Y_2^* \cdot \gamma_s \quad \text{Si } \gamma_s < 1$$

Siendo:

- Y_1^* Función de las cargas actuantes con sus valores de cálculo
- Y_2^* Función de las cargas resistentes con sus valores de cálculo
- γ_s Coeficiente de seguridad adicional, que toma en cuenta factores no modelables estadísticamente, como las condiciones de trabajo y de fabricación del elemento, la importancia del mismo y de su fallo, etc. En dependencia de que se considere mayor o menor que la unidad, se emplea una de las dos expresiones enunciadas.

Para este Estado Límite se realiza el diseño justo en la condición límite de fallo, y se garantiza que no llegue a producirse mediante la introducción de los coeficientes de seguridad.

A diferencia del Método de Rotura o del Factor de Seguridad Global, en el diseño por estados límites se introducen varios coeficientes de seguridad, con lo que puede evaluarse de forma más racional la precisión de cada estimación. Se considera frecuentemente como suficiente, tomar tres grupos de coeficientes de seguridad. Ellos se subdividen en:

- Coeficientes de seguridad aplicables a las cargas actuantes (γ_f)
- Coeficientes de seguridad para la resistencia del material (γ_g)
- Coeficientes de seguridad adicional para evaluar las condiciones de trabajo general del elemento (γ_s)

El método asegura un respaldo matemático y estadístico para los coeficientes de seguridad, lo mismo para los que corresponden a las cargas, como para los que se aplican a las resistencias, pero esto se hace de forma independiente, sin tener en cuenta la interrelación entre ambos, a pesar de constituir variables de un mismo evento, lo que provoca que en ocasiones se obtengan casos con sobrediseños y la consecuente penalización de los aspectos económicos, y en otros diseños inseguros. Esta característica, que lo convierte en un método semi probabilístico, solo es superado por la Teoría de la Seguridad que se explica mas adelante. En el MEL ambos términos (cargas y resistencias) se analizan teniendo en cuenta la distribución de frecuencias aprobada para muestras pequeñas según la t de Student (Véase la Figura 3.6)

Entonces, para evaluar el valor del coeficiente de seguridad que se introduce en el diseño, se puede analizar la ecuación de diseño de la siguiente forma:

$$Y_1^* = Y_1 \gamma_f$$

$$Y_2^* = \frac{Y_2}{\gamma_g}$$

Si: $\gamma_s > 1$:

$$Y_1^* \leq \frac{Y_2^*}{\gamma_s} \quad \Rightarrow \quad Y_1 \gamma_f = \frac{Y_2}{\gamma_g \gamma_s} \quad \Rightarrow \quad FS = \frac{Y_2}{Y_1} = \gamma_f \gamma_g \gamma_s$$

Donde:

Y_1, Y_2 : Son las funciones de las cargas actuantes y resistentes, respectivamente.

γ_f : Coeficiente que toma en cuenta la seguridad global introducida en el diseño debido a la acción de las **cargas actuantes**, entre las medias y las de cálculo.

γ_g : Coeficiente que evalúa la seguridad global introducida en el diseño debido a la minoración de la **resistencia de los materiales**, y de la capacidad resistente de la sección.

Cuando en el diseño estructural se tome en cuenta para la carga actuante la función de sus valores característicos Y_{1k} y no los medios (Y_{1m}), mientras que para la resistencia la función de sus valores medios Y_{2m} en lugar de los característicos (Y_{2k}), como suele ocurrir en los diseños geotécnicos, se estaría considerando un factor de seguridad del tipo FS_{km} , o de la 2da variante según lo explicado en la Figura 3.6. Debe entenderse que γ_f no recoge todos los factores de incertidumbre relativos a las cargas.

Finalmente, el factor de seguridad global para estas consideraciones (FS_{km}), puede definirse como:

$$FS_{km} = \frac{Y_{2m}}{Y_{1k}} = (\gamma_f \gamma_g \gamma_s)$$

Mientras tanto, para el 2^{do} **Estado Límite** la ecuación es similar:

$$Y_1 \leq Y_{2(límite)}$$

Donde:

- Y_1 Función de las deformaciones, vibraciones u oscilaciones, de las grietas, etc., que se producen en la estructura bajo las cargas de servicio.
- $Y_{2(límite)}$ Función de los valores límites o permisibles de las deformaciones, oscilaciones, aberturas de fisuras, etc., en el elemento considerado. Resultan ser valores establecidos por los Reglamentos, y pueden variar de uno a otro.

En este 2^{do} **Estado Límite** se verifica el comportamiento lineal o no del material para el nivel de las cargas que se analiza, de acuerdo a las hipótesis que se establezcan durante la modelación del estado límite que se comprueba, ya sean deformaciones, fisuras, oscilaciones, etc.

Garantizando que se satisfaga el cumplimiento de esta condición, se pueden calcular las deformaciones que sufre el elemento por métodos lineales, los cuales son los más empleados en la actualidad para este fin. Además según se establece en los códigos, siempre que el parámetro deformacional que caracteriza el material sea el Módulo de Deformación, es necesario chequear su comportamiento lineal. De lo contrario será necesario valorar métodos para el cálculo de deformaciones que tomen en cuenta el posible comportamiento no lineal del material, que en general, son modelos más complejos.

3.2.3.2 EL MÉTODO DE LOS ESTADOS LÍMITES APLICADO AL HORMIGÓN ARMADO

Detalles del 1er Estado Límite: Estado Límite de Falla o Agotamiento.

En el caso del hormigón armado el factor de seguridad se obtiene a partir de la siguiente expresión, considerando que $\gamma_s > 1$:

$$Y_1^* \leq \frac{Y_2^*}{\gamma_s} \quad \text{ó} \quad S_u \leq \frac{R_u}{\gamma_s}$$

Donde:

$$\begin{aligned} Y_1^* &= Y_{1k} \gamma_f & \text{ó} & & S_u &= S_k \gamma_f \\ Y_2^* &= \frac{Y_{2k}}{\gamma_g} & \text{ó} & & R_u &= \frac{R_n}{\gamma_g} \end{aligned}$$

Apreciándose que el factor de seguridad es del 4to tipo (Figura 3.6), es decir, del tipo FS_{kk} , factor que no incluye los factores de incertidumbre ya recogidos al llevar las cargas y las resistencias de sus valores medios a valores característicos.

Entonces:

$$FS_{km} = \frac{Y_{2k}}{Y_{1k}} = \frac{R_n}{S_k} = (\gamma_f \gamma_g \gamma_s)$$

TRATAMIENTO DE LAS CARGAS:

Los valores normativos de las cargas son obtenidos por medio de análisis estadísticos que resumen sus características como variables aleatorias (tipo de distribución, desviación standard, etc.).

En general:

$$S_n = S_k = \bar{S}(1 \pm t_\alpha \nu)$$

Donde:

t_α : Probabilidad de ocurrencia de que la carga sobrepase un valor dado (t de student).

ν : Coeficiente de variación.

La dualidad del signo (\pm) refleja la posibilidad de considerar lo mismo el valor característico de la carga por encima del valor medio, que por debajo, según sea lo más desfavorable. Por ejemplo, si se estudia la estabilidad al vuelco de la pantalla de hormigón en masa de un muro de contención, lo más razonable sería considerar que la carga estabilizadora (el peso del hormigón de la pantalla) se presente con el valor característico inferior al medio, que es lo más desfavorable, es decir: $S_k = \bar{S}(1 - t_\alpha \nu)$.

Las normas afines al tema de las cargas, reflejan los valores característicos en lugar de los valores medios, que en función de su tipo pueden calcularse como:

$$S_k = D + L + \dots + E$$

Además proponen coeficientes de seguridad del tipo γ_f , cuya magnitud depende del tipo de carga que se considere, y que deben aplicarse según sea el estado límite que se analiza. En general lo hacen de la manera siguiente:

$$S_u = (\gamma_{fD})D + (\gamma_{fL})L + \dots + (\gamma_{fE})E$$

Siendo:

S_k : Valor de carga normativa o característica.

S_u : Valor de carga de cálculo.

D, L, \dots, E : Valores de cargas normativas o características para cargas muertas, vivas, etc.

$\gamma_{fD}, \gamma_{fL}, \gamma_{fE}$: Coeficientes correspondientes a cada carga que en determinado momento pueden ser llegar a ser menor que la unidad.

Por otra parte se aplican correcciones y coeficientes que toman en cuenta la probabilidad de ocurrencia de que se combinen simultáneamente dos, tres o más cargas, y que lo hagan con sus valores máximos.

Debe notarse como S_u se obtiene a partir de las cargas características, no medias, y entonces los coeficientes γ_f relacionan a S_u con S_k . Siendo así, el coeficiente global que representa el efecto de la mayoración o factorización de las cargas, por la incertidumbre en sus valores y combinaciones, sería:

$$\gamma_f = \frac{S_u}{S_k}$$

Por ejemplo, si se tratase de una viga en la que la sollicitación normal predominante es la flexión sería:

$$\gamma_f = \frac{M_u}{M_k}$$

Donde S_k y M_k son los valores asociados a las cargas características o normativas. El resultado γ_f resulta un valor teórico que resume la seguridad global de las cargas, a partir de los coeficientes particulares que se aplican a cada tipo.

A modo de ejemplo se exponen los coeficientes de la Norma Cubana de Cargas, NC 53-38:1985 que establece las siguientes normativas para el cálculo de γ_f . (Ver la Tabla 3.3)

TABLA 3.3: Coeficientes de mayoración para las cargas. (NC 53-38-1985)

TIPO DE CARGA	γ_f	OBSERVACIONES
CARGA PERMANENTE CP (D)	1,2 0,9 1,1	El coeficiente $\gamma_f = 0.9$, sólo para determinar el estado pésimo de estabilidad.
CARGA DE USO CU (L)	1,6 1,5 1,4	Sobrecargas $CU \leq 4 \text{ kN/m}^2$ Sobrecargas $4 \text{ kN/m}^2 < CU \leq 7 \text{ kN/m}^2$ Sobrecargas $CU > 7 \text{ kN/m}^2$
CARGAS ECOLÓGICAS CE (W, E)	1,3	

TRATAMIENTO DE LAS RESISTENCIAS:

El método de Estados Límites (MEL) introduce para las resistencias de los materiales también un análisis estadístico, definiendo el concepto de RESISTENCIA CARACTERÍSTICA mediante el estadígrafo:

$$\text{Para el hormigón: } R'_{bk} = R'_{bm} - t_\alpha \sigma \quad \text{ó} \quad f'_c = f'_{cr} - t_\alpha \sigma$$

$$\text{Para el acero: } R_{ak} = R_{am} - t_\alpha \sigma \quad \text{ó} \quad f_y = f_{sm} - t_\alpha \sigma$$

Donde:

t_α : t de student en función de la probabilidad de que se sobrepase un valor determinado (en general para hormigón: ACI 90%, CEB 95%; mientras que para el Acero 95%)

σ : Desviación típica que caracteriza la calidad con que se fabrica el hormigón y el acero.

En las últimas décadas en Cuba se ha utilizado el enfoque europeo que introduce coeficientes de seguridad para considerar otros factores que influyen en la calidad del material, como también en el proceso de construcción. Entonces se definen los llamados coeficientes de minoración de la resistencia: γ_b (para el hormigón) y γ_a (para el acero), que permiten transformar los valores característicos de resistencia (R_k), en valores de diseño (R^*):

$$\text{Para el hormigón: } R_b^* = R'_{bk} / \gamma_b$$

$$\text{Para el acero: } R_a^* = R_{ak} / \gamma_a$$

Y definiendo a (γ_g) como el coeficiente que toma en cuenta los factores de incertidumbre que tienen que ver con la resistencia de la sección, se tendría: $\gamma_g = R_n / R_u$.

Donde:

R_n : Resistencia de la sección tomando en cuenta los valores característicos o nominales de los materiales: R'_{bk} y R_{ak} .

R_u : Resistencia última de la sección, aplicando la reducción a los materiales: R'_b y R'_a .

Para el caso del momento sería: $\gamma_g = M_n/M_u$

La Norma Cubana NC 53-38-1985 establece los valores que se indican en la **Tabla 3.4** para γ_a y γ_b .

TABLA 3.4: Coeficientes de minoración para resistencias del acero y hormigón. NC 53-38-1985

PARA EL ACERO		
TIPO DE ACERO		γ_a
Para aceros comunes		1,20
Para aceros con resistencia mínima garantizada		1,15
PARA EL HORMIGÓN		
TIPO DE HORMIGÓN	CONDICIONES DE EJECUCIÓN DE OBRAS	γ_b
A	MUY BUENAS	1,50
B	BUENAS	1,60
C	NO BUENAS	1,70

OTROS FACTORES O COEFICIENTES DEL MÉTODO:

Otro coeficiente que emplea el método de Estados Límites en su modelo de seguridad es γ_s , que toma en consideración factores de incertidumbre que tienen que ver con la influencia de uno o varios de los siguientes aspectos:

- La importancia de la obra y de su fallo
- Tipo de control de la ejecución del elemento
- Confiabilidad en los métodos de análisis
- Las condiciones de trabajo y/o fabricación del material o del elemento

En general, se ha considerado al coeficiente γ_s mayor o menor que la unidad, colocándose como multiplicador ó divisor en la expresión en dependencia de la magnitud del valor que se le asigne, pero su efecto es disminuir la resistencia última (R_u) del elemento, o sea, convertir esta resistencia, en resistencia de diseño:

$$R_u^* = \gamma_s R_u \text{ (Primera vía: } \gamma_s < 1) \text{ ó } R_u^* = R_u / \gamma_s \text{ (Segunda vía: } \gamma_s > 1)$$

La Norma Cubana NC 53-38-1985, que reconoce la primera vía para introducir la seguridad, establece las siguientes normativas para el cálculo de γ_s :

$$\gamma_s = \gamma_{s1} \cdot \gamma_{s2}$$

γ_{s1} : Toma en cuenta factores relacionados con la combinación de las cargas.

γ_{s2} : Toma en cuenta factores relacionados con la importancia del fallo, el control en obras y la correspondencia entre hipótesis y realidad.

Los valores de se indican en las Tablas 3.5a y 3.5b:

TABLA 3.5a: Coeficiente γ_{s1} . NC 53-38-1985

γ_{s1}	0.92	Cuando $CP \geq CU_{Total}$ (De corta y Larga duración)
	0.95	Cuando $CP < CU_{Total}$
	1.00	Cuando la combinación de carga incluye alguna carga ecológica

TABLA 3.5b: Coeficiente γ_{s2} . NC 53-38-1985

TIPO DE FALLO	γ_{s2}		
	TIPO DE CONTROL DE LA CALIDAD DE LA OBRA		
	INTENSO	NORMAL	REDUCIDO
MUY GRAVE	0,95	0,85	No se admite
GRAVE	1.00	0,95	0,85
LEVE	1,10	1.00	0,95

Adicionalmente se admite reducir el valor de γ_{s2} en un 10% cuando no exista correspondencia entre las hipótesis de análisis y la realidad en los detalles de anclaje, nudos, apoyos y otros.

Finalmente la seguridad se garantiza cuando: $R_u^* \geq S_u$

Lo que significa que cuando $\gamma_s < 1$:

$$\gamma_s R_u \geq \gamma_f S_k \Rightarrow \gamma_s R_n / \gamma_g \geq \gamma_f S_k \Rightarrow \frac{R_n}{S_k} \geq \left(\frac{\gamma_f \gamma_g}{\gamma_s} \right)$$

O que cuando $\gamma_s > 1$:

$$R_u / \gamma_s \geq \gamma_f S_k \Rightarrow R_n / (\gamma_s \gamma_g) \geq \gamma_f S_k \Rightarrow \frac{R_n}{S_k} \geq (\gamma_s \gamma_f \gamma_g)$$

Si se define el factor de seguridad global como la relación entre la resistencia nominal determinada a partir de los valores característicos de resistencia, y la capacidad resistente característica ($FS_{kk} = R_n / S_k$), entonces:

$$\text{Para } \gamma_s < 1: FS_{kk} = \left(\frac{\gamma_f \gamma_g}{\gamma_s} \right)$$

$$\text{Para } \gamma_s > 1: FS_{kk} = (\gamma_s \gamma_f \gamma_g)$$

Confirmándose cómo el factor de seguridad se obtiene mediante el análisis de diversos factores que pueden manejarse independientemente con mayor dominio por el proyectista.

Detalles del 2do Estado Límite: Deformación y Control de Grietas bajo cargas de servicio.

Para evaluar el comportamiento de los elementos en la etapa servicios se consideran los valores normativos de las cargas, y nominales las resistencias, es decir, en ambos casos característicos. Por tanto, el chequeo de los estados límites de servicio se realiza a través de la medición de los parámetros que caracterizan a la funcionabilidad de la estructura. Los controles se realizan mediante la verificación de las siguientes desigualdades:

$$\text{CONTROL DE FLECHAS: } \Delta_{Total} \leq |\Delta_{adm}|$$

$$\text{CONTROL DE GRIETAS: } a_{fk} \leq |a_f|$$

Es decir, los valores de Δ_{Total} (deformación máxima) y a_{fk} (abertura de fisura máxima), originadas ambas por las cargas de servicio o características, no deben superar la deformación admisible $|\Delta_{adm}|$ y la abertura admisible de grieta $|a_f|$, respectivamente, que son valores regulados por los Reglamentos.

3.2.4 MÉTODOS PROBABILÍSTICOS. TEORÍA DE SEGURIDAD.

El desarrollo teórico de los métodos probabilísticos se remonta al inicio de la década de los 50 del pasado siglo considerándose a Rshchantsin uno de los primeros que investigó sobre la temática, al elaborar teorías desde esa época que mantienen aun su validez, a pesar de que algunas que no han podido ser aplicadas aun por no contar con suficiente información práctica para hacerlo. Esas primeras investigaciones fueron netamente teóricas y sólo a partir de la década de los 90 del propio siglo, se alcanzó una relativamente amplia aplicación de estos métodos, no como procedimientos directos de diseños, sino con el interés de calibrar los coeficientes de seguridad que se utilizan en el diseño por estados límites. No obstante, han sido reportadas algunas investigaciones que han tratado de utilizar estos métodos directamente en el diseño de problemas específicos dentro de la geotecnia, pero las mismas han demostrado su imposibilidad de aplicación práctica con el actual desarrollo de la ingeniería de proyecto.

Los métodos probabilísticos, a diferencia de los analizados con anterioridad, valoran en su conjunto todos los parámetros que se consideran aleatorios en el diseño, y su influencia dentro de la seguridad del mismo, alcanzando una mayor exactitud al evaluarla, pero a su vez un aumento significativo en la complejidad de los procedimientos. En realidad la mayor o menor complejidad está muy relacionada con las consideraciones que se adopten al definir los parámetros que son analizados como aleatorios en el diseño, y con el hecho de contar con suficiente información confiable de la caracterización estadística de los mismos. La gran mayoría de los autores consideran como variables aleatorias las cargas actuantes y las propiedades de los materiales que intervienen en el diseño, existiendo suficiente información sobre la caracterización estadística de las mismas que facilitan su aplicación práctica.

De igual forma se han desarrollado algunas investigaciones en el campo del diseño estructural en las que se ha tratado de incluir otras variables como aleatorias en el análisis, tal es el caso de las dimensiones de los elementos, pero ha conducido a una mayor complejidad de las soluciones obtenidas que en realidad dificultan su aplicación práctica.

En las bases de diseño que consideran estos métodos no se realiza una comparación entre las funciones de las cargas o esfuerzos actuantes, y las cargas o esfuerzos resistentes, sino que se valora la **seguridad introducida** con respecto a la **seguridad requerida**. La forma de valorar la seguridad, siempre a través de procedimientos probabilísticos, puede realizarse a partir de dos parámetros, el **índice de seguridad** β o el **nivel de seguridad** H , siendo las ecuaciones de diseño para los dos enfoques anteriores las siguientes:

$$\begin{aligned} \beta_{diseño} &\geq \beta_{requerido} & \text{ó} \\ H_{diseño} &\geq H_{requerido} \end{aligned}$$

Tanto el índice de seguridad como el nivel de seguridad, son parámetros que tienen una base probabilísticas para su determinación, que se evaluarán posteriormente, y que valoran la seguridad en el diseño a partir de una única ecuación donde intervienen todas las variables que son consideradas

aleatorias, partiendo para ello de la caracterización estadística de la función resultante Y , definida como:

$$Y = (Y_2 - Y_1)$$

La utilización directa de estos métodos implicaría la obtención de diseños con igual seguridad, lo que sin duda es una concepción mucho más correcta que la utilizada por el Método de Esfuerzos Admisibles, el de Rotura e incluso por el MEL, donde lo que se trata es que los diseños tengan similares coeficientes de seguridad, cuando en realidad diferentes diseños pueden requerir valores diferentes de dichos coeficientes, dependiendo fundamentalmente de la variabilidad de los parámetros considerados en dichos diseños. Se sabe que este es un concepto que no se maneja comúnmente entre los especialistas, sobre todo entre los proyectistas, resultando difícil que comprendan que dos diseños con igual coeficiente de seguridad pueden llegar a tener distinta seguridad real.

Para la comprensión de las bases matemáticas generales de los métodos probabilísticos resulta interesante analizar la **Figura 3.11**, en la que se muestra la función de la variable Y , considerando para ella una distribución normal, e ilustrando, además, de una forma esquemática, el significado de los términos β y H .

Resulta evidente de la Figura 3.11 que entre los conceptos “**índice de seguridad**” β , “**nivel de seguridad**” H y “**probabilidad de fallo**” P_f , se puede establecer una función matemática que los relaciona, por lo que sí se define uno de ellos los restantes quedan establecidos. Estas relaciones son del tipo:

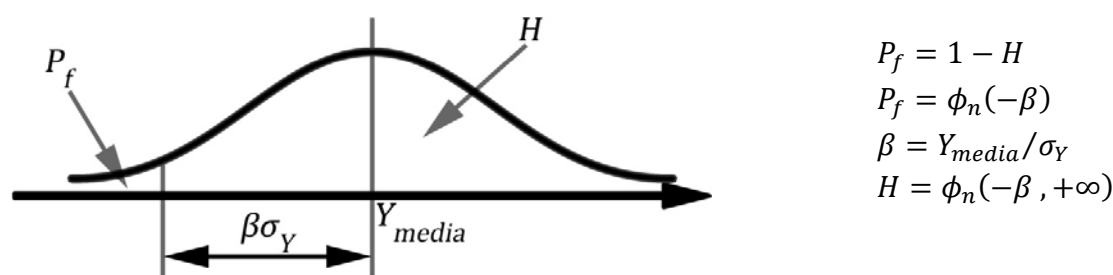


Figura 3.11 Curva de distribución de la variable Y .

Considerando la simetría de la distribución normal y conociendo que la función $\phi_n(0, +\infty)$ es igual a 0.5, toda vez que el área bajo la función Y es igual a la unidad, se puede definir H como:

$$H = 0.5 + \phi_n(-\beta, 0)$$

Siendo:

$$\sigma_Y = \sqrt{(\sigma_{Y1})^2 + (\sigma_{Y2})^2}$$

ϕ_n : Función de Laplace

$$\phi_n[\beta] = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{\beta} e^{-(z^2/2)} \cdot dz$$

$\sigma_Y, \sigma_{Y1}, \sigma_{Y2}$: Desviaciones de las funciones Y, Y_1 y Y_2 , respectivamente

Trabajando con estas ecuaciones se puede obtener la expresión de β :

$$\beta = \frac{Y_{2media} - Y_{1media}}{\sqrt{(\sigma_{Y1})^2 + (\sigma_{Y2})^2}}$$

Como ya se ha comentado, en la actualidad la aplicación práctica que se da a los métodos probabilísticos se focaliza a la evaluación y posible ajuste de los coeficientes de seguridad, los que luego se adoptan por los diferentes Reglamentos que sugieren el empleo de los estados límites para el diseño. A partir de lo anterior resulta necesario establecer una relación entre el nivel de seguridad de diseño H , y el coeficiente de seguridad global introducido FS , medido este entre los valores medios de Y_1 y Y_2 . Para ello se recurre a la forma de determinar FS , y el coeficiente de variación ν de una función cualquiera:

$$FS = Y_2/Y_1 \quad \text{y} \quad \nu_{Y_{1,2}} = \sigma_{Y_{1,2}}/Y_{1,2}$$

Donde:

$\nu_{Y_{1,2}}$: Coeficiente de variación de las funciones Y_1 y Y_2 , respectivamente.

$\sigma_{Y_{1,2}}$: Desviación de las funciones Y_1 y Y_2 , respectivamente.

$Y_{1,2}$: Valor medio de las funciones Y_1 y Y_2 , respectivamente.

Desarrollando una serie de transformaciones matemáticas a la ecuación de β , con el objetivo de establecer la relación buscada entre H y FS , se obtiene la siguiente expresión:

$$H = 0.5 + \phi_n \left[\frac{(FS - 1)}{\sqrt{(\nu_{Y1})^2 + (FS)^2(\nu_{Y2})^2}} \right]$$

La expresión anterior define la relación entre el coeficiente de seguridad global FS y el nivel de seguridad obtenido en el diseño H , y representa la ecuación básica para la aplicación de la teoría de seguridad con el fin establecido, permitiendo una vez definido el valor del nivel de seguridad requerido ($H_{requerida}$), encontrar con facilidad el coeficiente de seguridad óptimo ($FS_{requerido}$) que debe emplearse en el diseño, como ilustra la Figura 3.12.

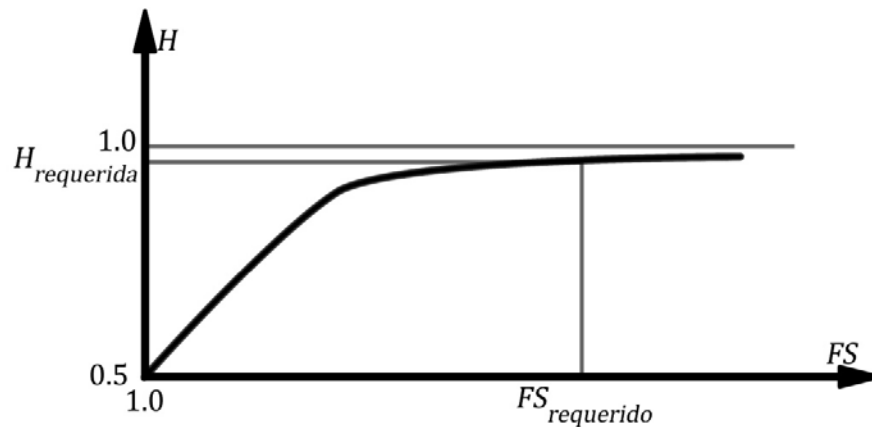


Figura 3.12 Relación entre el nivel de seguridad H y el coeficiente de seguridad global FS .

Resulta de interés realizar una valoración de la relación H vs. FS mediante la Figura 3,12 que corresponde a la representación gráfica que resulta de evaluar la ecuación de la función H , para distintos valores de FS . Existen varios puntos de interés que se deben enfatizar. Por ejemplo, si se

utiliza un coeficiente de seguridad global unitario ($FS = 1$), el nivel de seguridad obtenido es $H = 0.5$, lo que significa que la estructura tiene la misma probabilidad de fallar que de no fallar, pues en realidad no se ha introducido ningún coeficiente de seguridad. Si se aumenta el valor de FS se observa, inicialmente, un rápido crecimiento del nivel de seguridad H , pero luego, a partir de un cierto valor de FS , este crecimiento es prácticamente insignificante desde el punto de vista práctico. Esta observación confirma que a partir de cierto valor del coeficiente de seguridad, su incremento en un diseño dado, no se traduce necesariamente en un significativo aumento del nivel de seguridad alcanzado, concepto que no es manejado con claridad por algunos proyectistas que sobre estiman el papel de los coeficientes de seguridad procurando alcanzar mayores niveles de seguridad, lo que prácticamente no se logra a pesar de la consecuente penalización económica de sus diseños (irracionalidad económica).

Por último, se debe hacer notar que por muy grande que sea el coeficiente de seguridad global FS que se utilice, nunca se obtendrá una seguridad absoluta en el diseño, representada por $H = 1$, ya que la función del nivel de seguridad se hace asintótica a dicho valor, pero no llega a tocarla nunca.

Esto descubre la idea de que por muy elevado que se suponga en un diseño el valor de una acción, o por muy bajos que se predigan los valores de resistencia, siempre habrá una probabilidad finita, aunque sea muy pequeña, de que esos valores sean excedidos del lado desfavorable; es decir, siempre existirá en todo diseño una pequeña zona de incertidumbre o probabilidad de fallo. De todas formas el diseño debe procurar siempre que esta probabilidad, sea todo lo pequeña que posible fuera, se sitúe siempre dentro de los límites que permita la economía.

Estos análisis dejan claro la importancia práctica de la definición del valor de $H_{requerida}$, de donde podrá posteriormente conocerse la probabilidad del fallo y su factor de seguridad. Un resumen elemental de estos conceptos se expone en la Tabla 3.6.

TABLA 3.6: Nivel de seguridad y probabilidad de ocurrencia del fallo.

Para diseños con	β	H	P_f
Elementos de Hormigón Armado	3,8	0,999928	0,000062
Elementos Metálicos	4	0,999968	0,000032
Diseño Geotécnico	2,05	0,98	0,02

Se insiste en la complejidad de los modelos matemáticos y estadísticos que se requieren para aplicar esta poderosa herramienta, lo que ha limitado su introducción en la práctica ingenieril durante el diseño estructural, aunque los códigos que hoy están implementados sobre la base del MEL, proponen coeficientes de seguridad que han sido “calibrados” utilizando los resultados de la teoría de la seguridad mediante métodos probabilísticos, tomando en cuenta que los mismos están relacionados entre sí.

En resumen, la introducción de los resultados que se obtienen con el empleo de la Teoría de la Seguridad en la práctica ingenieril del diseño estructural, exige un proceso que constaría de los siguientes pasos:

1. Caracterización probabilística de la mayor cantidad de variables que intervienen en los eventos de diseño y que sean estadísticamente modelables

2. Determinación del nivel de seguridad requerida $H_{requerida}$, que se solicita en cada tipo de elemento o material a emplear
3. Determinación, a partir del $H_{requerida}$ que se calcule en el paso anterior, del valor de $FS_{requerida}$ que le corresponde.
4. Definir los coeficientes de seguridad parciales que responden a los valores de $FS_{requerida}$ obtenidos en el paso 3. Estos deben valorar los distintos factores de incertidumbre señalados anteriormente.

3.3 LA SEGURIDAD EN EL ACI

El American Concrete Institute (ACI), es la Institución que norma en los EEUU el diseño y ejecución de obras de hormigón. El ACI introduce el Método de Estados Límites pasado un tiempo después de que se diera a conocer, pero lo hizo bajo el nombre de Diseño por Resistencia, en un inicio como método alternativo dentro del Reglamento (mantuvieron hasta muy tarde el Método de Tensiones de Trabajo), y posteriormente como normativa principal. Paulatinamente el Método de Tensiones de Trabajo fue relegado hasta que a fines de los años 90 del pasado siglo, desaparece del Código.

La forma en que introduce la **SEGURIDAD AL AGOTAMIENTO** se fundamenta en la siguiente base de diseño:

$$S_u \leq \phi(R_n)$$

Siendo:

S_u : Resistencia mínima requerida evaluada a partir de los factores de carga que deben emplearse

R_n : Resistencia nominal evaluada a partir de los valores de resistencia característica de los materiales

ϕ : Factor de reducción de la resistencia

El **factor de reducción de la resistencia** ϕ toma en cuenta la probabilidad de que la resistencia de un elemento sea menor que la supuesta debido a las variaciones en la resistencia de los materiales, de sus dimensiones, de las imprecisiones de las ecuaciones de diseño, del grado de ductilidad y la confiabilidad requerida del elemento cargado, y la importancia que tenga el elemento dentro de la estructura.

La **resistencia nominal** de un elemento o sección transversal se determina usando las hipótesis y ecuaciones de resistencia del Método de Diseño por Resistencia, antes de aplicar cualquier factor de reducción de la resistencia.

La **resistencia mínima requerida o solicitud de cálculo** se determina al mayorar las cargas o solicitaciones de servicio, aplicando los factores de carga.

Los **factores de carga** incrementan la magnitud de las cargas normalizadas para considerar la probable variación de sus magnitudes respecto de sus valores característicos o de servicio.

Las **solicitudes de Servicio** obtienen a partir de las cargas especificadas por el código de construcción correspondiente

3.3.1 TRATAMIENTO DE LA RESISTENCIA DEL HORMIGÓN (f'_c)

Admitiendo que la distribución de frecuencias de la resistencia a compresión del hormigón sigue una ley normal (tipo Gauss), el valor característico de la resistencia se rige por la expresión:

$$f'_c = f'_{cr} - t \cdot s = f'_{cr}(1 - t \cdot \delta)$$

En la que f'_{cr} representa el valor de **resistencia promedio o resistencia requerida** a la compresión del hormigón, empleada como base de su dosificación.

En la práctica la expresión escrita anteriormente se emplea por aquellas entidades encargadas de elaborar y servir el hormigón, básicamente en Plantas que pueden llevar registros que permitan cualificar su producción mediante la desviación estándar (s) de la misma, y en consecuencia la tendencia actual de los Reglamentos normativos es ofrecer un instrumento para que el productor del hormigón pueda definir el valor de resistencia promedio (f'_{cr}) con el que debe diseñar una dosificación para alcanzar el valor característico deseado (f'_c), y otro para la evaluación del hormigón servido por parte de aquellos que lo reciben.

(A) CRITERIOS PARA EVALUAR LA CONFORMIDAD DEL HORMIGÓN POR PARTE DEL EJECUTOR OBRA.

El Reglamento cubano ofrecerá dos criterios prácticos para evaluar la conformidad de un hormigón servido en obra, es decir, para decidir su aceptación o su rechazo. Para **aceptar** el hormigón servido los criterios son los siguientes:

CRITERIO 1: El promedio aritmético de tres ensayos consecutivos ($\bar{f}'_{c(1-3)}$) ha de ser igual o superior a la **resistencia especificada del hormigón** (f'_c) que se haya considerado.

$$\therefore \bar{f}'_{c(1-3)} \geq f'_c$$

CRITERIO 2: La resistencia individual de cualquier ensayo (promedio de al menos tres probetas) debe cumplir las siguientes condiciones:

$$f'_{ci} \geq \begin{cases} f'_c - 3.5 \text{ MPa} & \text{Para hormigones con } f'_c \leq 35 \text{ MPa} \\ 0.9 f'_c & \text{Para hormigones con } f'_c > 35 \text{ MPa} \end{cases}$$

(B) EVALUACIÓN DE LA RESISTENCIA PROMEDIO POR PARTE DEL PRODUCTOR DEL HORMIGÓN.

Si se define a " n " como la cantidad de pruebas u observaciones que se tengan registradas por parte de un productor de hormigón, y " s " a la desviación estándar de los resultados de resistencia a compresión de dicha cantidad, el valor de la resistencia media de rotura a compresión (f'_{cr}) que debe emplearse para el diseño de la mezcla, se realiza de la manera siguiente:

Para hormigones con $f'_c \leq 35 \text{ MPa}$ y $n \geq 30$

$$f'_{cr} \geq \begin{cases} f'_c + 1.34s \\ f'_c + 2.33s - 3.5 \text{ MPa} \end{cases}$$

Para hormigones con $f'_c > 35 \text{ MPa}$ y $n \geq 30$

$$f'_{cr} \geq \begin{cases} f'_c + 1.34s \\ 0.90f'_c + 2.33s \end{cases}$$

Cuando se dispongan de menos de 30 pruebas pero más de 15 ($15 \leq n < 30$), la desviación estándar " s " se debe afectar por el coeficiente indicado en la Tabla 3.7, que dependerá de la cantidad de pruebas que se tengan.

Tabla 3.7 Factor de corrección de la desviación estándar para $15 < n < 30$.

No. de Pruebas	Factor de corrección de la desviación estándar
Menos de 15	Emplear la Tabla 3.8
15	1.16
20	1.08
25	1.03
≥ 30	1.00

Sin embargo, si se cuenta con menos de 15 observaciones ($n < 15$) se debe recurrir a lo indicado en la Tabla 3.8.

Mientras tanto, la **desviación estándar de la muestra** (s) cuando se cuenta con sólo un registro de ensayo, se determina mediante la expresión:

$$s = \sqrt{\frac{\sum_{i=0}^{i=n} (f'_{ci} - f'_{cr})^2}{n - 1}} \quad \text{siendo:} \quad f'_{cr} = \frac{\sum_{i=0}^{i=n} (f'_{ci})}{n}$$

TABLA 3.8³ Resistencia promedio a la compresión requerida cuando los datos son insuficientes para establecer la desviación estándar (menos de 15 Pruebas)

Resistencia a la compresión característica (especificada)	Resistencia promedio a la compresión requerida
$f'_c \leq 20MPa$	$f'_{cr} = f'_c + 7MPa$
$20MPa < f'_c < 35MPa$	$f'_{cr} = f'_c + 8.4MPa$
$f'_c > 35MPa$	$f'_{cr} = 1.1f'_c + 5MPa$

Cuando sean dos los registros de ensayo, el primero con n_1 ensayos y el segundo con n_2 , entonces el promedio estadístico de la desviación estándar se evalúa mediante la siguiente expresión:

$$\bar{s} = \sqrt{\frac{(n_1 - 1) \cdot (s_1)^2 + (n_2 - 1) \cdot (s_2)^2}{n_1 + n_2 - 2}}$$

Algunos autores emplean el **coeficiente de variación** (δ), que representa la desviación estándar de la muestra expresada como porcentaje de la resistencia promedio, y que se expresa de la manera siguiente:

³ Esta Tabla se emplea también cuando no se posean registros históricos para determinar la desviación estándar de una Planta.

$$\delta = \frac{s}{\overline{f'_{cr}}} = \frac{1}{\overline{f'_{cr}}} \sqrt{\frac{\sum_{i=0}^n (f'_{ci} - \overline{f'_{cr}})^2}{n-1}}$$

Este estimador estadístico permite establecer la calidad de la población cuya muestra se ensayó, y algunas Instrucciones proponen los criterios que se ilustran en las Tablas 3.9 y 3.10.

TABLA 3.9: Definición del Grado de Control en la elaboración de un hormigón a partir del coeficiente de variación.⁴

TIPO DE OPERACIÓN	Grado de Control				
	Excelente	Muy Bueno	Bueno	Aceptable	Deficiente
Control de Campo (A pie de Obra o en Planta)	$\delta < 3\%$	$3\% \leq \delta < 4\%$	$4\% \leq \delta < 5\%$	$5\% \leq \delta < 6\%$	$\delta \geq 6\%$
Mezcla de Prueba (En el Laboratorio)	$\delta < 2\%$	$2\% \leq \delta < 3\%$	$3\% \leq \delta < 4\%$	$4\% \leq \delta < 5\%$	$\delta \geq 5\%$

TABLA 3.10: Inferencia de la calidad de un hormigón servido a partir del coeficiente de variación.

Calidad	δ
Muy Buena	$\delta < 10\%$
Buena	$10\% \leq \delta < 15\%$
Normal	$15\% \leq \delta < 20\%$
Mala	$20\% \leq \delta < 25\%$
Muy Mala	$\delta \geq 25\%$

La Figura 3.13 ilustra la representación gráfica de la resistencia característica para un nivel de confianza dado.

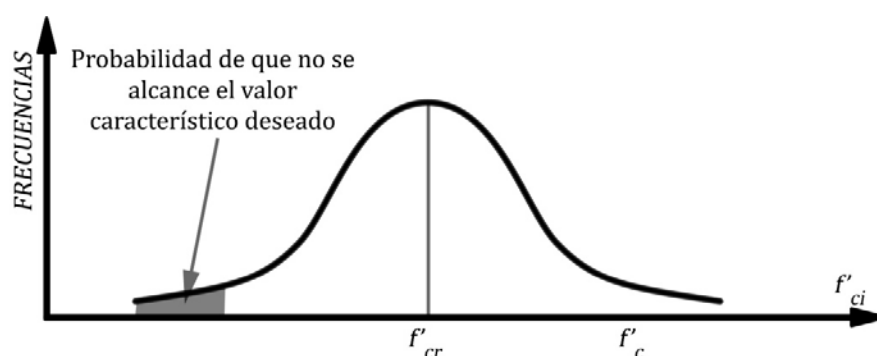


Figura 3.13 Resistencia Característica o Especificada del hormigón a compresión.

⁴ Tomado de la NC 192:2002 "Hormigón Hidráulico. Cálculo de la resistencia característica real a compresión"

En Cuba, la NC 250:2005 establece los valores de resistencia característica que se indican en la Tabla 3.11.

TABLA 3.11: Valores de $(a/c)_{max}$, contenido mínimo de cemento y resistencia característica mínima atendiendo al nivel de agresividad.

Parámetro	Tipo de hormigón	Nivel de Agresividad			
		Muy Alta	Alta	Media	Baja
Máxima relación a/c	En Masa	0.50	0.55	0.65	0.65
	Armado	0.40	0.45	0.50	0.55
	Pretensado	0.40	0.40	0.45	0.50
Contenido mínimo de Cemento (kg/m ³)	En Masa	200	200	200	200
	Armado	350	325	300	275
	Pretensado	350	325	325	300
f'_c (MPa)	En Masa	20	15	15	15
	Armado	30	30	25	20
	Pretensado	35	35	30	30

Ejercicio 3.1

Durante el proyecto de la cimentación de un edificio de 10 niveles resuelto mediante el empleo de 50 cimientos aislados de hormigón armado, el proyectista decide fijar una resistencia característica del hormigón de $f'_c = 25\text{MPa}$. Durante el vaciado del hormigón de los cimientos, que requieren un total de 52m^3 , se exige tomar la muestra de hormigón para aplicar los criterios de evaluación (aceptación o rechazo), mediante tres probetas por cada camión mezclador de 5m^3 que llega a obra. El registro que recibe el proyectista, luego de haberse realizado el ensayo a compresión de cada probeta transcurrido los 28 días, es el que se ilustra en la Tabla 3.12. ¿Aceptaría Ud. el hormigón colocado?

TABLA 3.12 Registro recibido por el proyectista para certificar la calidad del hormigón que fuera servido en obra.

Número del Camión	Volumen muestreado acumulado (m ³)	Registro de Ensayo (j)	Probeta 1	Probeta 2	Probeta 3	$\overline{f'_{cj}} = \frac{f'_{c1} + f'_{c2} + f'_{c3}}{3}$ (MPa)
			f'_{c1} (MPa)	f'_{c2} (MPa)	f'_{c3} (MPa)	
101	5	1	22,3	29,5	26,1	25,97
102	10	2	28,2	27,4	31,1	28,90
103	15	3	22,2	25,4	28,5	25,37
104	20	4	25,2	24,7	21,2	23,70
105	25	5	24,4	26,3	28,6	26,43
106	30	6	30,1	30	28,5	29,53
107	35	7	26,3	29,1	28,6	28,00
108	40	8	25,2	23,6	24,4	24,40

109	45	9	26,3	24,2	27,1	25,87
110	50	10	29,3	26,5	27,2	27,67
111	52	11	27,8	28,2	26,6	27,53

Cálculos y discusión

A la obra llegan 11 camiones mezcladores y la resistencia promedio de las tres probetas que se toman de cada uno representa el resultado de un único ensayo. La Tabla 3.12 ofrece los resultados correspondientes a estos cálculos (\bar{f}'_{cj}).

Por ejemplo, para el **Registro No.3** se tiene: \bar{f}'_{c3}

$$\bar{f}'_{c3} = \frac{\sum_{i=0}^n (f'_{ci})}{n} = \frac{22.2 + 25.4 + 28.5 \text{ MPa}}{3} = 25,37 \text{ MPa}$$

VERIFICACIÓN DEL PRIMER CRITERIO DE CONFORMIDAD: “El promedio aritmético de tres ensayos de resistencia consecutivos, tiene que ser igual o superior que f'_c ”

La determinación de este promedio se ilustra en la Tabla 3.13. , observándose que todos cumplen con este criterio, incluso el menor de ellos (**25,19 MPa** > f'_c)

TABLA 3.13 Evaluación de la resistencia promedio de cada Registro (f'_{cr}).

GRUPO	Registro de Ensayo	\bar{f}'_{cj} (MPa)	$\bar{f}'_{c(\text{grupo})} : f'_c$ (MPa)
1	j = 1	25,97	$\frac{25,97+28,90+25,37}{3} = 26,74 \text{ MPa} > f'_c$ (OK)
	j = 2	28,90	
	j = 3	25,37	
2	j = 2	28,90	$\frac{28,90+25,37+23,70}{3} = 25,99 \text{ MPa} > f'_c$ (OK)
	j = 3	25,37	
	j = 4	23,70	
3	j = 3	25,37	$\frac{25,37+23,70+26,43}{3} = 25,17 \text{ MPa} > f'_c$ (OK)
	j = 4	23,70	
	j = 5	26,43	
4	j = 4	23,70	$\frac{23,70+26,43+29,53}{3} = 26,56 \text{ MPa} > f'_c$ (OK)
	j = 5	26,43	
	j = 6	29,53	
5	j = 5	26,43	$\frac{26,43+29,53+28,00}{3} = 27,99 \text{ MPa} > f'_c$ (OK)
	j = 6	29,53	
	j = 7	28,00	
6	j = 6	29,53	$\frac{29,53+28,00+24,40}{3} = 27,31 \text{ MPa} > f'_c$ (OK)
	j = 7	28,00	
	j = 8	24,40	
7	j = 7	28,00	$\frac{28,00+24,40+25,87}{3} = 26,09 \text{ MPa} > f'_c$

	$j = 8$	24,40	(OK)
	$j = 9$	25,87	
8	$j = 8$	24,40	$\frac{24,40+25,87+27,67}{3} = 25,98 \text{ MPa} > f'_c$ (OK)
	$j = 9$	25,87	
	$j = 10$	27,67	
9	$j = 9$	25,87	$\frac{25,87+27,67+27,53}{3} = 27,02 \text{ MPa} > f'_c$ (OK)
	$j = 10$	27,67	
	$j = 11$	27,53	

VERIFICACIÓN DEL SEGUNDO CRITERIO DE CONFORMIDAD: Como se trata en este ejemplo de un hormigón con $f'_c = 25 \text{ MPa}$, ningún valor individual de resistencia puede ser menor que 21.5 MPa , ya que el Reglamento establece que para ese caso ($f'_c \leq 35 \text{ MPa}$) se debe cumplir que:

$$f'_{ci} \geq f'_c - 3.5 \text{ MPa}$$

En la Tabla 3.12. se puede observar que el registro de menor resistencia es el No. 4 cuyo valor es $23,70 \text{ MPa} > 21.5 \text{ MPa}$, que aunque es menor que f'_c cumple con el 2do criterio de evaluación, lo que ocurre también con el ensayo No 8. Por tanto puede concluirse que todos los envíos cumplen con los requerimientos del proyecto.

3.3.2 LOS FACTORES DE CARGA

Las cargas permanentes o muertas son, teóricamente, invariables en magnitud, dirección, sentido e, incluso, en el tiempo. En realidad pueden cambiar por las variaciones en las dimensiones de los elementos, de la densidad de los materiales y las propias modificaciones estructurales y no estructurales que tienen lugar. Mientras tanto, las sobrecargas o cargas vivas varían considerablemente en función del tiempo y de la edificación de la que se trate. Unido a ello, existen incertidumbres en el cálculo de las solicitaciones, en las suposiciones de las rigideces, longitudes de tramo, etc., además de las que se involucran en el modelado de las estructuras tridimensionales que conducen a diferencias entre las tensiones que realmente ocurren en la estructura y aquellas que se estiman por el diseñador en el análisis.

Para considerar la inevitable variación de las cargas respecto de sus valores característicos y la consecuente aparición de acciones extraordinarias por incremento posible de las cargas, surge la necesidad de introducir un factor de carga que permita mayorarlas, término que no significa necesariamente hacerlas de mayor magnitud, sino de efecto más desfavorable.

En esencia el procedimiento consiste en introducir un factor de carga (γ_f) que, como fue definido al abordar el método de los estados límites, permite transformar la acción característica (S_k) en acción de diseño (S_u):

$$S_u = \gamma_f(S_k)$$

Sin embargo no existe un solo factor de carga, este depende de las características de estas, y por tanto la expresión anterior se convierte realmente en:

$$S_u = \gamma_{fD}D + \gamma_{fL}L + \dots \dots \gamma_{fE}E$$

Las combinaciones básicas sugeridas por el ACI 318-08, y los factores de carga que entran en cada combinación, se escriben a continuación, pudiéndose apreciar que se manejan factores de incertidumbre atribuibles tanto a las características de las cargas, como a sus combinaciones.

$$S_u = 1.4(D + F) \quad (3.1)$$

$$S_u = 1.2(D + F + T) + 1.6(L + H) + 0.5(L_r \text{ ó } S \text{ ó } R) \quad (3.2)$$

$$S_u = 1.2(D) + 1.6(L_r \text{ ó } S \text{ ó } R) + (1.0L \text{ ó } 0.87W) \quad (3.3)$$

$$S_u = 1.2(D) + 1.6(W) + 1.0(L) + 0.5(L_r \text{ ó } S \text{ ó } R) \quad (3.4)$$

$$S_u = 1.2(D) + 1.0(E) + 1.0(L) + 0.2(S) \quad (3.5)$$

$$S_u = 0.9(D) + 1.6(W) + 1.6(H) \quad (3.6)$$

$$S_u = 0.9(D) + 1.0(E) + 1.6(H) \quad (3.7)$$

Donde las cargas o las solicitaciones correspondientes se denominan:

- D* Cargas Permanentes o Muertas
- E* Efectos de carga de las Fuerzas Sísmicas
- F* Cargas debidas al peso y presión de fluidos con densidades bien definidas y alturas máximas controlables
- H* Cargas debidas al peso y presión lateral del suelo, del agua en el suelo, u otros materiales
- L* Cargas de uso, sobrecargas o cargas vivas
- L_r* Sobrecarga en la cubierta
- R* Cargas provenientes de la lluvia,
- S* Carga de nieve
- T* Efectos acumulativos de la contracción o expansión resultante de las variaciones de temperatura, la fluencia lenta, la contracción y el hormigón de contracción compensada
- W* Carga de Viento

Durante el análisis y diseño de muchos de los elementos que a diario se proyectan, la combinación que gobierna el diseño (combinación pésima) incluye sólo los siguientes estados de carga: la carga muerta (incluyendo el peso propio), la sobrecarga, la carga de viento, o la carga sísmica, y ninguna combinación debe incluir la acción simultánea de las cargas de viento y sismo debido a la escasa probabilidad de que ocurran simultáneamente esos dos eventos naturales extremos: el huracán y el sismo.

Nótese cómo hay variaciones en los coeficientes de una combinación a otra, lo que se debe a tomar en cuenta la probabilidad, mayor o menor, de que estas se produzcan simultáneamente.

Una simplificación conservadora consiste en incluir la sobrecarga en las cubiertas *L_r* junto con la sobrecarga *L*, y aplicar en las ecuaciones el factor de carga más elevado correspondiente a *L* ó *L_r*. La Norma cubana NC 450: 2006 “Edificaciones, factores de carga o ponderación y combinaciones” establece las combinaciones básicas de cálculo que son en su esencia semejantes a las propuestas el ACI y expuestas anteriormente. En la tabla 3,14 se resumen las combinaciones más comunes con algunas recomendaciones para su empleo.

TABLA 3,14: Combinaciones de cargas mayoradas para determinar la resistencia requerida S_u

COMBINACIÓN	COMENTARIOS
a) $1,4 (D+F)$	Para cargas gravitatorias, en depósitos y tanques con mínima fluctuación de la altura del fluido
b) $1,2D+1,6L+0,5L_r$	Es lo común en el cálculo de entresijos considerando $L_r=0$ y para columnas, tímpanos y muros al considerar simultáneamente L y L_r
c) $1,2D+1,6L_r+(0,5L \text{ ó } 0,8W)$	Es la combinación para evaluar las cubiertas. Se le suma $0,8W$ cuando el viento actúa en la misma dirección que la carga de uso de la cubierta.
d) $1,2D+1,4W+0,5L+0,5L_r$	Toma en cuenta el accionar simultáneo del viento o el sismo con parte de la carga de uso. En el caso de garajes, áreas con lugares de reuniones públicas y donde la carga de uso sea mayor que $5kN/m^2$, el coeficiente se toma igual a 1
e) $1,2D+1,4E+0,5L+0,5L_r$	
f) $0,9D+1,4W$	Se emplea cuando la combinación más desfavorable sobre columnas es la carga axial menor.
g) $0,9D+1,4E$	

3.3.3 EL FACTOR DE REDUCCIÓN DE RESISTENCIA

La reducción de la resistencia nominal o característica se engloba en un único coeficiente que recoge los factores de incertidumbre que tienen que ver con esta reducción, precisamente el factor de reducción (ϕ). Entonces puede plantearse:

$$R_u \leq \phi R_n$$

El ACI hace depender al factor de reducción, básicamente, del tipo de sollicitación, reconociéndose que esta forma de medir la resistencia resulta más completa, pues la capacidad de la sección no depende sólo de la calidad de los materiales de que se compone sino, sobre todo, de la combinación de estos en un nuevo material encargado de resistir las cargas externas. Al emplear coeficientes separados para el hormigón y acero, el CEB-FIB esconde la realidad, ya que en determinados elementos el aporte relativo de uno u otro es poco significativo. Si se deseara establecer una equivalencia entre el enfoque de la seguridad que prevalece en Europa con el ACI, se pudiera escribir de manera simplificada que $\phi \cong (1/\gamma_g\gamma_s)$

A partir del 2002, el Comité 318 del ACI introdujo nuevas definiciones que resultan imprescindibles en los procedimientos para introducir la seguridad en el caso de secciones sujetas a esfuerzos normales. Estos son los conceptos de **Tracción Controlada** y de **Compresión Controlada**, a partir de la deformación que experimente el acero más traccionado. Para ello establece un valor de $\varepsilon_s = \varepsilon_t = 0.005$ como criterio de la caracterización de la ductilidad de la sección.

En la Figura 3.14 se ilustra que el **refuerzo más traccionado**, es aquel situado en el nivel más alejado de la fibra de máxima compresión, al que corresponde un peralte efectivo que se simboliza por d_t y una deformación representada por ε_t .

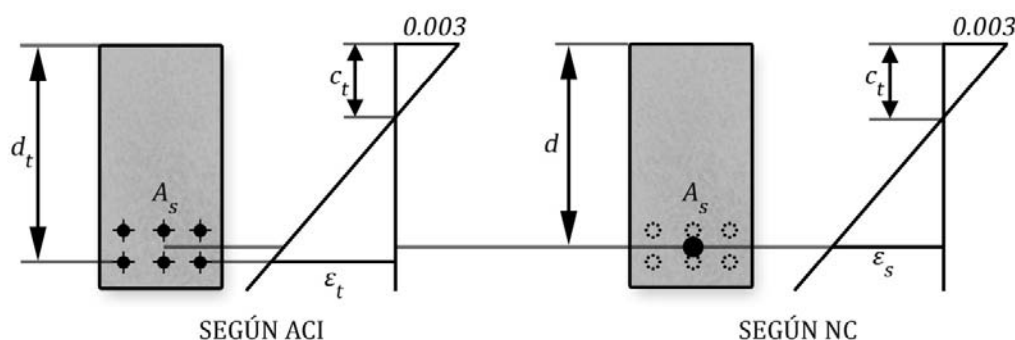


Figura 3.14 Deformación en el acero más traccionado

Sin embargo las normativas cubanas han simplificado los procedimientos, definiendo al refuerzo más traccionado, no al que se asocia a la definición anterior, sino al acero virtual cuya posición en la sección coincide con la resultante de todo el refuerzo situado en la zona traccionada, al que corresponde el peralte efectivo d y la deformación ε_s .

SECCIONES EN TRACCIÓN CONTROLADA: Son aquellas en las que el estado deformacional último asociado al límite de resistencia de la sección, asegura que el acero traccionado alcanza una deformación que supera el 0.5%, es decir, cuando ($\varepsilon_t \geq 0.005$) ó ($\varepsilon_s \geq 0.005$).

SECCIONES EN COMPRESIÓN CONTROLADA: Son aquellas en las que el estado deformacional último asociado al límite de resistencia de la sección, asegura que el acero traccionado no llega a alcanzar tan siquiera la deformación de fluencia, es decir, cuando ($\varepsilon_t \leq \varepsilon_y$) ó ($\varepsilon_s \leq \varepsilon_y$)

SECCIONES EN TRANSICIÓN: Son aquellas en las que el estado deformacional último asociado al límite de resistencia de la sección es tal, que el acero traccionado llega a fluir pero sin alcanzar la deformación unitaria de 0.5%, es decir, cuando ($\varepsilon_y < \varepsilon_t < 0.005$) ó ($\varepsilon_y < \varepsilon_s < 0.005$)

Para definir el factor de reducción de resistencia en el caso de las solicitaciones normales (compresión, tracción, flexión, flexocompresión, flexotracción), es imprescindible identificar si se trata de secciones controladas por tracción, por compresión, o de transición, y para ello se deben establecer las fronteras entre ellas, como se muestra en la Figura 3.15.

La frontera que limita las **secciones con tracción controlada** es un estado deformacional para el que se cumple $\varepsilon_s = 0.005$ y $\varepsilon'_c = \varepsilon'_{cmax} = 0.003$. De las ecuaciones de compatibilidad de las deformaciones para estas condiciones⁵, puede determinarse sin dificultad que esta deformación tiene lugar cuando $c = c_t = 0.375d$.

Por su parte, la frontera que limita las **secciones con compresión controlada**, asociada como se verá más adelante al llamado fallo balanceado, se asocia a una deformación a nivel del acero más traccionado igual $\varepsilon_s = \varepsilon_y$, y por tanto le corresponde una profundidad de la línea neutra igual a $c = c_b = k_b d$.

⁵ En efecto, de la Figura 3.14 se confirma que $0.003/c_t = \varepsilon_s/(d - c_t)$, y si se hace $\varepsilon_s = 0.005$, entonces $c_t = 0.375d$.

Como esta frontera responde a la condición $0.003/c_b = \varepsilon_s/(d - c_b)$, entonces $c_b = [0.003/(0.003 + \varepsilon_y)]d$

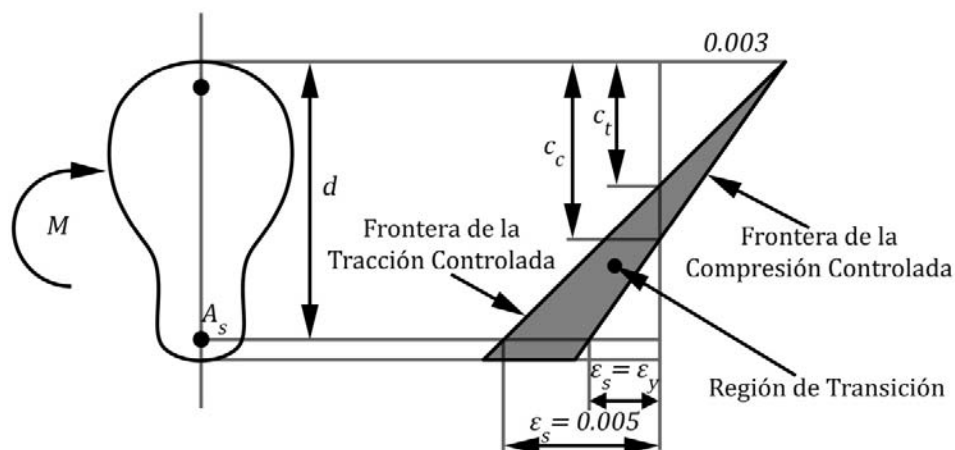


Figura 3.15 Estados deformacionales fronteras correspondientes a secciones en tracción y compresión controlada.

Los valores del factor de reducción ϕ recomendados por el ACI se muestran en la TABLA 3.15, mientras que en las Figuras 3.16a y 3.16b se grafica su función de variación a partir de la deformación (ε_s) que experimenta el acero más traccionado, y de la profundidad de la línea neutra (c), respectivamente.

TABLA 3.15: Coeficiente de reducción de resistencia ϕ

Solicitación	ϕ
Tracción debida a cargas externas	0.90
Flexión y Flexo Compresión en <i>secciones con tracción controlada</i>	0.90
Flexocompresión en <i>secciones con compresión controlada</i> debido a cargas externas (no al pretensado)	
• Piezas con refuerzo transversal en espiral.	0.70
• En las restantes piezas	0.65
Flexión y Flexocompresión en la <i>región de transición</i>	
• Piezas con refuerzo transversal en espiral	$\phi = f_1(\varepsilon_s)$ ó $\phi = g_1(c)$
• En las restantes piezas	$\phi = f_2(\varepsilon_s)$ ó $\phi = g_2(c)$
Cortante	0.75
Torsión	0.75
Aplastamiento del hormigón (excepto para las zonas de anclaje en postesado y cuando se utiliza el modelo de bielas y tirantes.	0.65
Zonas de anclaje en postesado	0.85
Modelo de bielas y tirantes	0.75

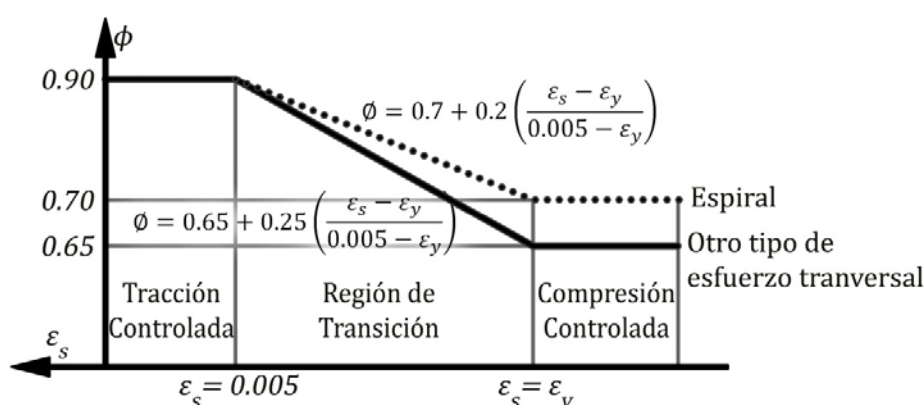


Figura: 3.10a variación de ϕ con deformación ε_s del acero mas traccionado, para el caso de las solicitaciones normales.

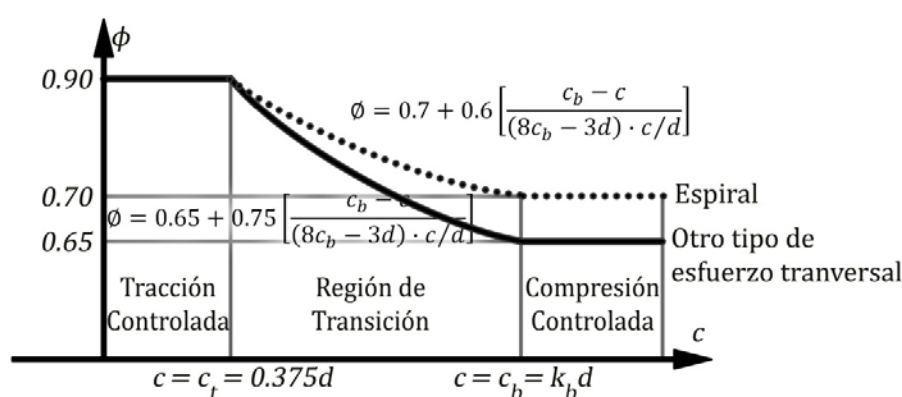


Figura: 3.10b variación de ϕ con la profundidad de la línea neutra c para el caso de las solicitaciones normales.

El factor de reducción de la capacidad nominal ϕ indicado en la Tabla 3.15 está calibrado para las condiciones de los EEUU, y presuponen un alto nivel de control de calidad. En consecuencia no responde necesariamente a otras condiciones menos favorables en las que el control de ejecución en obra sea menos estricto y sistemático, aspectos que no se reflejan en la calibración mostrada, que sólo depende del tipo de solicitación, e indirectamente de las características del fallo. Estudios en desarrollo actualmente recomiendan, para las condiciones cubanas, incluir un coeficiente de seguridad adicional γ_s , que tome en cuenta estos últimos factores.

Como en la región de transición el factor de reducción depende de ε_y o de c_b , se regirá por expresiones diferentes, para calidades de acero diferentes. La Tabla 3.20 muestra estas expresiones para los dos tipos de acero que con mayor frecuencia se emplean como armadura longitudinal en Cuba, en el caso del hormigón armado.

Por otro lado, ya se señaló que la base de los estados límites de resistencia se fundamenta en la solución de la inequación ($S_u \leq \phi R_n$), y como se observará en el tratamiento a la flexión compuesta, en el modelo analítico para las solicitaciones normales se escribe el término R_n como una función de la profundidad de la línea neutra c , razón que justifica adoptar el factor de reducción ϕ , también como función de c , como se ilustra en la tabla 3.16

El cálculo de ϕ también puede generalizarse de la siguiente forma:

$$\phi = \xi_1 + \frac{\xi_2}{c/d}$$

Los valores de ξ_1 y ξ_2 se indican en la Tabla 3.17.

El Reglamento norteamericano propone como simplificación que para todos los aceros que cumplan con la condición $f_y \geq 420 \text{ MPa}$, se puede adoptar $\varepsilon_s = \varepsilon_y = 0.002$ y en consecuencia $c_b = \mathbf{0.60d}$, lo que permite escribir el valor del factor ϕ de la manera siguiente:

Para **ESTRIBOS**: $\phi = 0.48 + 83\varepsilon_s$ ó $\phi = 0.231 + \frac{0.249}{c/d}$

Para **ESPIRALES**: $\phi = 0.567 + 66.7\varepsilon_s$ ó $\phi = 0.367 + \frac{0.20}{c/d}$

TABLA 3.16 Valores de ϕ en función de ε_s y de c para Secciones en Transición.

			<i>Factor de reducción de resistencia ϕ</i>	
	GRADO	ε_y	$\phi = f(\varepsilon_s)$	$\phi = f(c)$
ESTRIBOS	G-40	0.0015	$0.543 + 71.4\varepsilon_s$	$0.329 + \frac{0.214}{c/d}$
	G-60	0.0021	$0.469 + 86.2\varepsilon_s$	$0.21 + \frac{0.259}{c/d}$
ESPIRALES	G-40	0.0015	$0.614 + 57.1\varepsilon_s$	$0.443 + \frac{0.171}{c/d}$
	G-60	0.0021	$0.555 + 69\varepsilon_s$	$0.348 + \frac{0.207}{c/d}$

TABLA 3.17 Valores de ξ_1 y ξ_2 para determinar el factor de reducción ϕ en función de c .

		<i>Factor de reducción de resistencia $\phi = f(c)$</i>	
	GRADO	ξ_1	ξ_2
ESTRIBOS	G-40	0.329	0.214
	G-60	0.21	0.259
ESPIRALES	G-40	0.443	0.171
	G-60	0.348	0.207

Esta simplificación no es del todo consistente, especialmente para los aceros pretensados, o incluso para algunos aceros naturales de mayor graduación que tienden a producirse en otros países.

En resumen, el coeficiente ϕ considera marcadamente la ductilidad o no del fallo y la contribución del hormigón en la capacidad portante de la sección que se evalúa. Obsérvese cómo es menor para las solicitaciones donde la resistencia del hormigón tiene mayor influencia, lo que sucede en el cortante y la compresión controlada. Además reconoce indirectamente la importancia del fallo al diferenciar el que puede producirse en un elemento en flexión compuesta por tracción controlada, y en una columna en flexión compuesta por compresión, pero también, aunque de forma sutil, prevé la más limitada confiabilidad de los modelos relacionados con las solicitaciones tangenciales de torsión y cortante, al adoptar valores menores para estos casos. Sin embargo, este enfoque ignora explícitamente otros

factores y sobre todo la importancia de la obra y la calidad del control, como lo reconoce el coeficiente γ_s empleado en el MEL.

3.3.4 FACTOR DE SEGURIDAD GLOBAL EN EL ACI

Se comprende luego de considerar los aspectos relacionados en los párrafos anteriores, que el Factor de Seguridad Global bajo el enfoque del ACI, puede definirse de la manera siguiente: $FS = \gamma_f / \phi$

En realidad el factor ϕ agrupa los coeficientes γ_g y γ_s que reconoce el CEB-FIP. Por otra parte FS relaciona entre si los factores de incertidumbre existentes a partir los valores característicos de cargas y resistencias por lo que es también del tipo FS_{kk} como se prefiere en el diseño de elementos de Hormigón Armado.

En la Figura 3.17 puede evaluarse con claridad las implicaciones que provoca en la seguridad de secciones a flexión las modificaciones introducidas por el ACI 318-02. Se comparan los factores de seguridad (FS) obtenidos por las regulaciones del ACI 318-99 y 318-02.

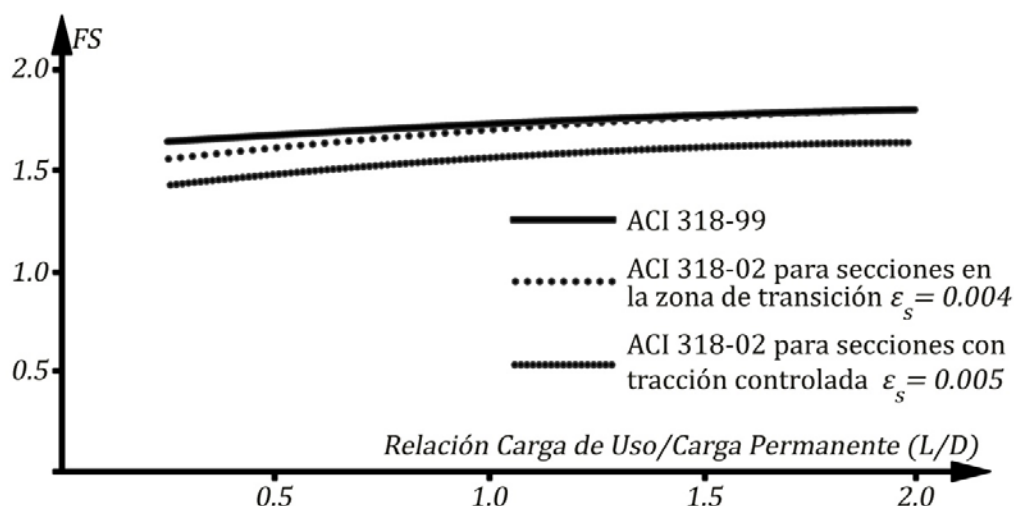


Figura 3.17 / Factor de seguridad global. Análisis comparativo

El gráfico de la Figura 3.17 ratifica importantes conclusiones para el diseño:

- ❖ Si se garantiza que $\epsilon_s \geq 0.005$, entonces $\phi = 0.9$ y se alcanzan secciones con un Factor de Seguridad Global, FS , menor y por tanto menos conservadoras pero a la vez más económicas que las obtenidas por las regulaciones del ACI 318:99. Este concepto no debe confundirse ya que no se trata de reducir seguridad para ganar en economía, sino asignar la seguridad necesaria, y no existen dudas al decidir una menor penalización cuando se trata de modelar problemas suficientemente conocidos, como es el caso del predominio de la flexión con suficiente ductilidad.
- ❖ Si $\epsilon_s = 0.004$, entonces $\phi < 0.9$. Como el gráfico se obtuvo para el acero G-40 y refuerzo transversal en forma de estribo, le corresponde un factor de reducción:

$$\phi|_{\epsilon_s=0.004} = 0.543 + 71.4(0.004) = 0.828$$

Se aprecia entonces cómo el **FS** es semejante al obtenido para el ACI 318:99, lo que brinda argumentos adicionales a su elección como regulador de la cuantía máxima.

Esta conclusión puede ser mejor comprendida si se observa la Figura 3.18, en la que se analiza el **FS** para secciones con diferentes ductilidades. Para secciones que alcancen su equilibrio en el límite de resistencia con una profundidad de la línea neutra que satisfaga la condición ($c/d > 3/7$), se superan los **FS** establecidos anteriormente, y no son diseños aconsejables.

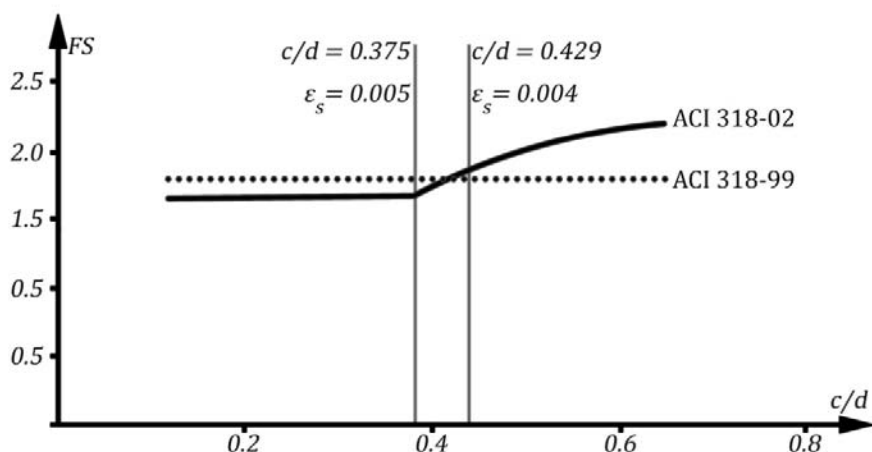


Figura 3.16 *Factor de seguridad global. Análisis comparativo para el caso en que $L/D = 2$*

- ❖ Es obvio que buscando diseños en que $\phi = 0.9$ se alcanzarán secciones mas racionales que trabajando para la cuantía máxima, es decir, secciones en las que ($\omega < \omega_b$). Téngase en cuenta que acotar $\epsilon_t = 0.005$ es equivalente a fijar una relación entre la cuantía mecánica y la cuantía balanceada igual a 0.63 para el acero G60, que es lo que hacía el Reglamento hasta 1999⁶

Finalmente se comenta que los factores de carga que adopta el ACI en la actualidad, y los valores que se fijan para el factor de reducción de la capacidad nominal, presuponen la siguiente hipótesis “*si la probabilidad de que haya elementos de menor resistencia que la supuesta es de aproximadamente 1 en 100, y la probabilidad de que haya exceso de carga es de aproximadamente 1 en 1000, la probabilidad de que haya elementos con menor resistencia que la supuesta sujetos a exceso de carga es de aproximadamente 1 en 100 000*”.

3.3.5 LA SEGURIDAD DENTRO DE LA ETAPA DE SERVICIO.

El ACI reconoce los mismos conceptos generales que establece el MEL para evaluar el comportamiento de los elementos en la etapa servicio, es decir, considera los valores normativos de las cargas, y los valores nominales la resistencia, ambos valores característicos.

Por tanto, el chequeo de los estados límites se realiza a través de la medición de los parámetros que caracterizan a la funcionabilidad de la estructura: el estado límite de deformación mediante la

⁶ Cuando en el Capítulo IV se deduzcan las ecuaciones de equilibrio para la sección rectangular con refuerzo simple, se demostrará que $\omega = 0.85\beta_1 k$, es decir, que $\omega/\omega_b = k/k_b$. Como al valor de $\epsilon_t = 0.005$ corresponde un valor de $k = 0.375$, y además para el acero G60 se tiene $k_b = 0.588$, considerar $\epsilon_t = 0.005$ es análogo a suponer $\omega/\omega_b = 0.375/0.588 = 0.63$.

condición $\Delta_{Total} \leq |\Delta_{adm}|$, y el estado límite de agrietamiento mediante la condición $a_{fk} \leq |a_f|$, aunque en realidad esta última se modifica para aquellos casos en los que la fisuración no es un factor determinante (ambientes poco agresivos o estructuras no estancas), y se hace mediante la distribución en la sección de hormigón del refuerzo en tracción, especialmente de su separación y recubrimiento. Estos aspectos serán suficientemente tratados en el Capítulo VII

3.6 COMBINACIÓN PÉSIMA

La identificación de la combinación pésima o más desfavorable de las cargas que actúan sobre la estructura que se analiza, es uno de los procesos más importantes y a la vez complejo que enfrenta el proyectista. En ocasiones donde decide la racionalidad y la seguridad de la estructura. Las combinaciones de cargas se definen no sólo mediante la combinación de múltiples efectos de diferente origen, sino también por la ocurrencia diversa de un solo tipo de carga.

Los destacados profesores cubanos Medina y Ruiz plantean que estas combinaciones deben cumplir los siguientes requisitos:

- ❖ Deben ser reales, lógicas y factibles.
- ❖ Deben ser compatibles, racionales.
- ❖ Deben ser relativamente frecuentes.

Uno de los casos más gráficos para ilustrar esta problemática es la definición de las combinaciones de carga que incluyen a la carga de viento extremo. Por ejemplo no tiene sentido combinar cargas máximas de viento con máximas cargas tecnológicas o de uso, pues es muy improbable que bajos los efectos de un huracán estén en servicio industrias o edificios públicos. Tampoco resulta racional combinar la carga de viento con la sobrecarga total en cubierta.

Como ilustración se evalúa el caso de una viga de cubierta con voladizo sometida a la combinación de cargas muertas (permanentes) (D) y vivas (de uso) (L), debido al peso de personas. Como se muestra en la Figura 3.19 pueden analizarse tres combinaciones $(A + B)$, $(A + C)$ y $(A + D)$:

- ❖ Obsérvese que la primera de las combinaciones escritas, es decir, $(A + B)$, corresponde a la acción simultánea de la carga muerta y viva en toda la longitud de la viga, y paradójicamente no conduce a una situación pésima de carga para el diseño de la armadura en el vano, para el momento positivo.
- ❖ La combinación $(A + C)$, asociada a la actuación de la carga viva sólo en el vano, provoca el máximo momento en el centro de la luz principal, o sea, el mayor momento positivo. De manera que como el diseño de la armadura positiva de la viga exige el valor mayorado del momento flector, si se decide evaluarlo a partir de los factores de carga del ACI, se tendrá:

$$M_u^+ = 1.2M_{a(D)}^+ + 1.6M_{a(L)}^+ = 1.2(210) + 1.6(160) = \mathbf{508kN \cdot m}$$

- ❖ Mientras tanto, la combinación $(A + D)$, asociada a la actuación de la carga viva sólo en el voladizo derecho, provoca el máximo momento negativo sobre el apoyo derecho. De manera que para el diseño de la armadura negativa de la viga se debe emplear el momento flector mayorado siguiente:

$$M_u^- = 1.2M_{b(D)}^- + 1.6M_{b(L)}^+ = 1.2(60) + 1.6(40) = \mathbf{136kN \cdot m}$$

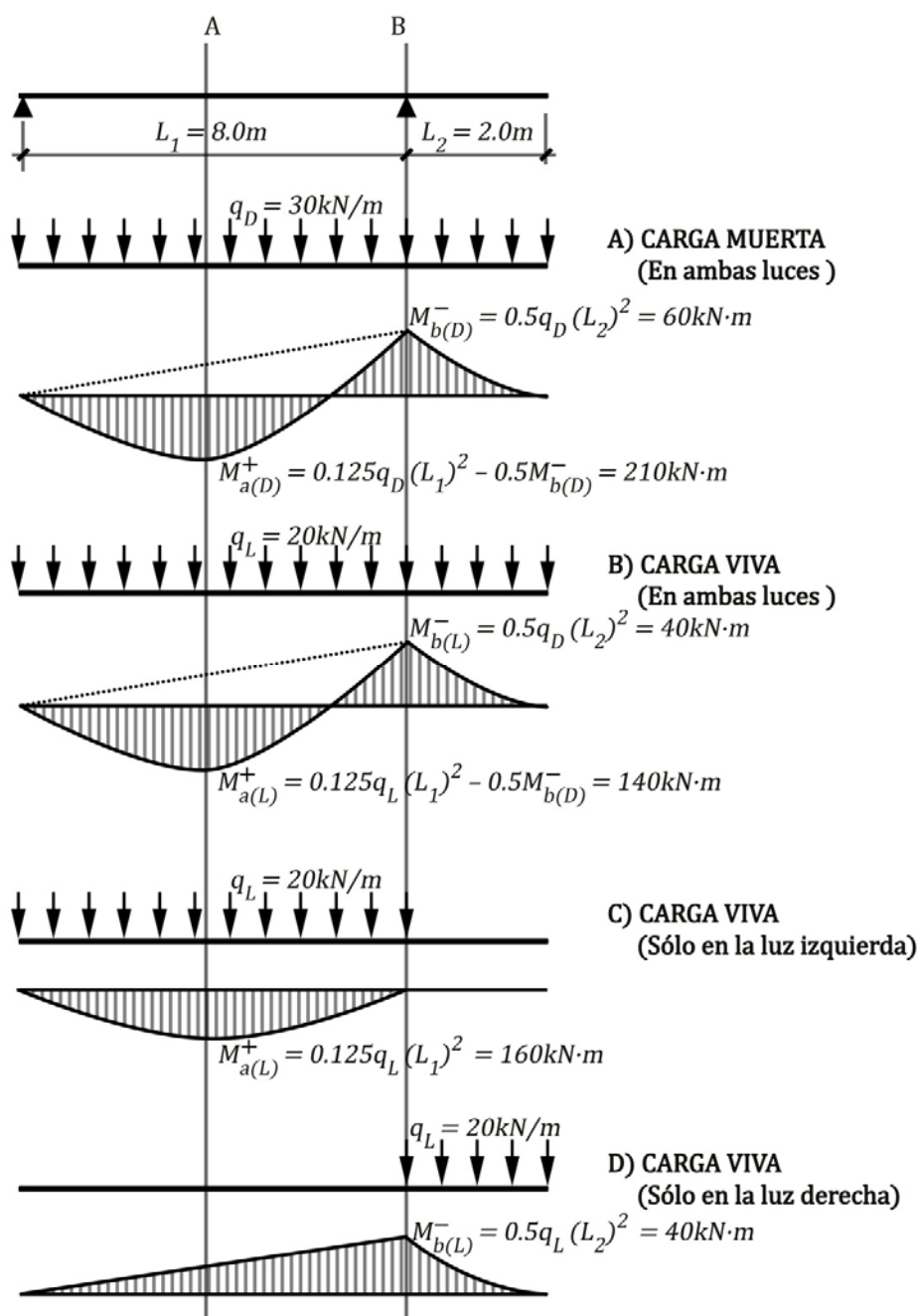


Figura 3.19 Combinaciones pésimas de carga muerta (D) y Viva (L) para viga en voladizo

Ejercicio 3.2

Evaluar la seguridad de la sección mostrada en la Figura 3.20 para los siguientes métodos:

- Tensiones admisibles
- Rotura
- Estados límites:
 - ACI 318-99
 - ACI 318-02

- NC 2003

Datos:

$$\begin{aligned}
 f'_{cr} &= 35 \text{ MPa} & E_s &= 2 \cdot 10^5 \text{ MPa} & D &= 0.4 S_k \\
 f_y &= 300 \text{ MPa} & E_c &= 2.5 \cdot 10^4 \text{ MPa} & L &= 0.6 S_k \\
 f_{ym} &= 360 \text{ MPa}
 \end{aligned}$$

Considere que la desviación típica del hormigón es $\sigma = 3.73 \text{ MPa}$, y que existe una probabilidad del 90% de alcanzar el valor característico de su resistencia (f'_c), probabilidad a la que corresponde un valor ($t_\alpha = 1.34$)

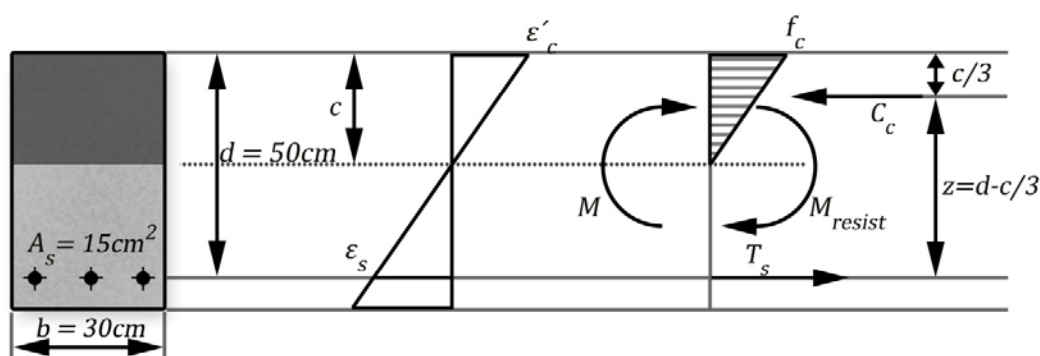


Figura 3.20 Tensión del hormigón y Fuerzas Interiores en el diseño por Tensiones Admisibles.

Cálculos y discusión

- a) Determinación de la resistencia característica del hormigón para las consideraciones que se hicieron:

$$f'_c = f'_{cr} - t_\alpha \sigma = 35 - 1.34(3.73) = \mathbf{30 \text{ MPa}}$$

- b) Análisis de la seguridad mediante el **Método de Tensiones Admisibles**

Considerando :

$$[f_s] = 0,5 f_y$$

$$[f_s] = 0,5 \cdot 300 = 150 \text{ MPa}$$

$$[f_c] = 0,45 f'_{cr}$$

$$[f_c] = 0,45 \cdot 30 = 13,5 \text{ MPa}$$

Se procede a la comprobación partiendo de fijar el valor de $f_s = [f_s]$:

$$\Sigma F = 0$$

$$\frac{1}{2} f_c b \cdot c = f_s A_s$$

Donde :

$$f_c = \varepsilon_s E_c$$

$$\varepsilon_c = \varepsilon_s \frac{c}{d - c}$$

$$f_s = \varepsilon_s E_s$$

$$n = \frac{E_s}{E_c} = 8$$

Y la ecuación quedaría:

$$\frac{1}{2}b \cdot c^2 + n \cdot A_s c - n \cdot d \cdot A_s = 0$$

$$15c^2 + 8 \cdot 15c - 8 \cdot 50 \cdot 15 = 0$$

Que al resolverse se obtiene, $c = 16,4\text{cm}$.

Comprobando f_c'

$$\varepsilon_s = \frac{f_s}{E_s} = \frac{150}{2 \cdot 10^5} = 0,00075$$

$$\varepsilon_c = 0,00075 \frac{16,4}{50 - 16,4} = 0,000366$$

$$f_c = 0,000366 \cdot 2,5 \cdot 10^4 = 9,15\text{MPa} < [f_c]$$

Finalmente de la ecuación de momentos

$$\Sigma M = 0$$

$$M = \frac{1}{2}f_c b \cdot c \left(d - \frac{c}{3}\right) = f_s A_s \left(d - \frac{c}{3}\right)$$

$$M = 15 \cdot 15 \left(50 - \frac{16,4}{3}\right) = 10020 = 100,2\text{kN} \cdot \text{m}$$

c) Análisis de la seguridad mediante el **Método de la rotura o del Factor de seguridad global**

$$f_{rotura} = 1,25f_c'$$

$$f_s = f_y$$

$$FS = 1,8$$

Por lo tanto de la ecuación de fuerzas y con el apoyo de la figura 3,21:

$$1,25f_c' b \cdot x = A_s f_y$$

$$x = \frac{A_s f_y}{1,25f_c' b} = \frac{15 \cdot 300}{1,25 \cdot 30 \cdot 30} = 4\text{cm}$$

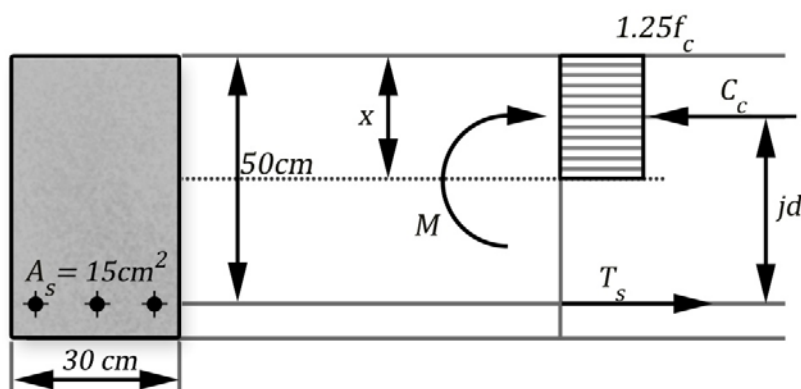


Figura: 3,21 Sección tensiones y fuerzas por Método de la Rotura o del FSG

Y finalmente:

$$\Sigma M = 0$$

$$M_n = 1,25f_c' b \cdot x \left(d - \frac{x}{2}\right) = f_y A_s \left(d - \frac{x}{2}\right)$$

$$M_n = 30 \cdot 15 \left(50 - \frac{4}{2} \right) = 21600 = 216 \text{ kN} \cdot \text{m}$$

$$M_k = \frac{M_n}{FS}$$

$$M_k = \frac{216}{1,8} = 120 \text{ kN} \cdot \text{m}$$

d) Análisis de la seguridad mediante el **Método del ACI, 318-99**:

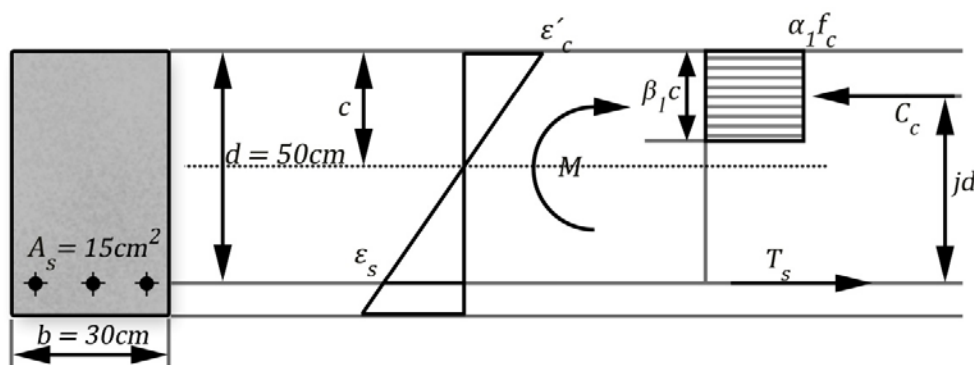
Considerando el Diagrama de Hognestad (ver figura 3,22) y definiendo la rotura para $\varepsilon'_c = 0,003$ los coeficientes del diagrama rectangular equivalente serán entonces:

$$\alpha_1 = 0,94 \quad \text{y} \quad \beta_1 = 0,814$$

$$\Sigma F = 0$$

$$\alpha_1 f'_c \cdot \beta_1 c \cdot b = f_y A_s$$

$$c = \frac{A_s f_y}{\alpha_1 f'_c \beta_1 b} = \frac{15 \cdot 300}{0,94 \cdot 30 \cdot 0,814 \cdot 30} = 6,53 \text{ cm}$$



Y finalmente de la ecuación de momentos

$$\Sigma M = 0$$

$$M_n = f_y A_s \left(d - \frac{\beta_1 c}{2} \right)$$

$$M_n = 30 \cdot 15 \left(50 - \frac{0,814 \cdot 6,23}{2} \right) = 21303 = 213,03 \text{ kN} \cdot \text{m}$$

$$M_u = \phi M_n$$

$$M_u = 0,9 \cdot 213,03 = 191,73 \text{ kN} \cdot \text{m}$$

Ya que $c < 0,375d = 18,75 \text{ cm}$, lo que justifica que $\phi = 0,9$

El coeficiente global introducido por la mayoración de las cargas sería:

$$\gamma_f = \frac{(\gamma_{fD} D + \gamma_{fL} L)}{D + L}$$

Pero como se sabe que:

$$D = 0,4 S_k$$

$$L = 0,6 S_k$$

$$\gamma_f = \frac{(1,4 \cdot 0,4 + 1,7 \cdot 0,6) S_k}{S_k} = 1,58$$

Finalmente:

$$FS = \frac{\gamma_f}{\phi}$$

$$FS = \frac{1,58}{0,9} = 1,75$$

$$M_k = \frac{M_n}{FS} = \frac{M_u}{\gamma_f}$$

$$M_k = \frac{213,03}{1,72} = \frac{191,73}{1,58} = 121,73 \text{ kN} \cdot \text{m}$$

e) Análisis de la seguridad mediante el **Método del ACI, 318-02**:

Como se explicó anteriormente en la versión del código del 2002 se produjo un importante cambio en la determinación de la seguridad.

En la determinación de la Resistencia Requerida los FACTORES de CARGA disminuyen:

$$S_u = 1,2D + 1,6L$$

Entonces:

$$\gamma_f = \frac{(1,2 \cdot 0,4 + 1,6 \cdot 0,6)S_k}{S_k} = 1,44$$

Menor que el obtenido por la normativa de 1999.

El coeficiente ϕ es 0,9 para una sección controlada por tracción, como se demostró anteriormente, el factor de seguridad será entonces:

$$FS = \frac{\gamma_f}{\phi}$$

$$FS = \frac{1,44}{0,9} = 1,6$$

$$M_k = \frac{213,03}{1,6} = \frac{191,73}{1,44} = 133,14 \text{ kN} \cdot \text{m}$$

f) Análisis de la seguridad mediante la **Norma Cubana (2003)**:

Momento último para las resistencias minoradas $f'_c{}^*$ y f_y^* :

Obteniendo las resistencias minoradas

$$f'_c{}^* = \frac{f'_c}{\gamma_b}$$

$$f'_c{}^* = \frac{30}{1,6} = 18,75 \text{ MPa}$$

$$f_y^* = \frac{f_y}{\gamma_a}$$

$$f_y^* = \frac{300}{1,2} = 250 \text{ MPa}$$

$$\Sigma F = 0$$

$$\alpha_1 f'_c{}^* \cdot \beta_1 c \cdot b = f_y^* A_s$$

$$c = \frac{A_s f_y^*}{\alpha_1 f'_c{}^* \beta_1 b} = \frac{15 \cdot 250}{0,94 \cdot 18,75 \cdot 0,814 \cdot 30} = 8,71 \text{ cm}$$

$$\Sigma M = 0$$

$$M_u = f_y^* A_s \left(d - \frac{\beta_1 c}{2} \right)$$

$$M_u = 25 \cdot 15 \left(50 - \frac{0,814 \cdot 8,71}{2} \right) = 17420 = 174,2 \text{ kN} \cdot \text{m}$$

Y el coeficiente global para los materiales puede calcularse como:

$$\gamma_g = \frac{M_n}{M_u}$$

Y como el Momento Nominal es el mismo que para los cálculos anteriores al utilizar también el Diagrama de Hognestad para $\epsilon_c' = 0,003$

$$\gamma_g = \frac{231,03}{174,2} = 1,22$$

El coeficiente para las cargas sería:

$$\gamma_f = \frac{(\gamma_{fD} D + \gamma_{fL} L)}{D + L}$$

Pero como los factores de carga en la NC son:

$$S_u = 1,2D + 1,4L$$

$$\gamma_f = \frac{(1,2 \cdot 0,4 + 1,4 \cdot 0,6) S_k}{S_k} = 1,32$$

Calculando el coeficiente general γ_s :

$$\gamma_s = \gamma_{s1} \cdot \gamma_{s2}$$

Y $\gamma_{s1} = 0,95$ y $\gamma_{s2} = 0,95$ considerando fallo grave y control normal, entonces:

$$\gamma_s = 0,9025$$

El factor de seguridad sería finalmente:

$$FS = \frac{\gamma_g \cdot \gamma_f}{\gamma_s}$$

$$FS = \frac{1,22 \cdot 1,32}{0,9025} = 1,79$$

Y el momento actuante:

$$M_k = \frac{M_n}{FS}$$

$$M_k = \frac{213,03}{1,79} = 119,1 \text{ kN} \cdot \text{m}$$

O también:

$$M_k = \frac{\gamma_s M_u}{\gamma_f}$$

$$M_k = \frac{0,9025 \cdot 174,1}{1,32} = 119,1 \text{ kN} \cdot \text{m}$$

Como resumen los resultados se comparan en la tabla 3,18 y puede concluirse que:

1. El análisis por Tensiones Admisibles no permite obtener la seguridad, pues no se conoce el valor del momento nominal. Se consideró para calcular un valor de FS el M_n de MEL y así poder establecer una comparación

$$FS = \frac{M_n}{M_k}$$

$$FS = \frac{213,03}{100,24} = 2,13$$

Destacando que utilizando este método se está considerando una capacidad portante muy inferior a la real.

TABLA 3,18: Resumen de resultados al evaluar la seguridad del diseño por distintos métodos.

	TENSIONES ADMISIBLES	ROTURA	ACI 318-99	ACI 318-02	NC
$M_{media}(kN \cdot m)$			255,22	255,22	255,22
$M_n(kN \cdot m)$?	216	213,03	213,03	213,03
$M_u(kN \cdot m)$?	?	191,73	191,73	174,20
$M_k(kN \cdot m)$	100,24	120	121,73	133,14	119,1
FS_{kk}	2,13	1,8	1,75	1,6	1,78
FS_{km}			2,12	1,93	2,18

2. Al comparar los valores obtenidos por ACI-99 y NC se demuestra que resultan prácticamente iguales en FS . Aunque sean diferentes los coeficientes calculados para cargas y resistencias.

$$\gamma_f(ACI - 99) > \gamma_f(NC)$$

$$\frac{1}{\phi}(ACI - 99) < \frac{\gamma_g}{\gamma_s}(NC)$$

Lo que conduce a M_u diferentes como se aprecia en la tabla 3,22. Pero si se analiza integralmente los factores de seguridad:

$$FS_{NC} = \frac{\gamma_f \gamma_g}{\gamma_s} \cong FS_{ACI-99} = \frac{\gamma_f}{\phi}$$

Por lo que se destaca que el valor de la normativa se aprecia en toda su magnitud cuando se emplea en su conjunto, con una concepción integral y lo peligroso de su empleo por partes o "en pedazos".

3. Se resalta como las disposiciones del ACI-02 conducen a diseños menos conservadores en secciones a flexión con tracción controlada, al reducir los factores de carga.

Como ya se ha explicado estos factores de seguridad son del tipo FS_{kk} (ver figura 3,6 en el epígrafe 3,1,3) y solo consideran la relación entre los valores característicos de cargas y materiales. Puede producirse un acercamiento más al verdadero valor del factor de seguridad calculando FS_{km} que relaciona cargas características con resistencias medias, para lo cual se obtiene el valor resistente de la sección para este caso.

Utilizando también el Diagrama de Hognestad para $\epsilon_c' = 0,003$.

$$\Sigma F = 0$$

$$\alpha_1 f_{cr}' \cdot \beta_1 c \cdot b = f_{ym} A_s$$

$$c = \frac{A_s f_{ym}}{\alpha_1 f_{cr} \beta_1 b} = \frac{15 \cdot 360}{0,94 \cdot 35 \cdot 0,814 \cdot 30} = 6,72 \text{ cm}$$

$$\Sigma M = 0$$

$$M_{medio} = f_{ym} A_s \left(d - \frac{\beta_1 c}{2} \right)$$

$$M_n = 36 \cdot 15 \left(50 - \frac{0,814 \cdot 6,72}{2} \right) = 25522 = 255,22 \text{ kN} \cdot \text{m}$$

Y entonces puede calcularse.

$$FS_{km} = \frac{M_{medio}}{M_k}$$

Resultados que se muestran en la tabla 3,22 para cada método.

EJERCICIOS PROPUESTOS

1. Distintas plantas productoras de hormigón han alcanzado lotes con $f_{cr}' = 40 \text{ MPa}$ pero con dispersiones diferentes como se muestra a continuación.

<i>Planta</i>	<i>Coefficiente variación v</i>
<i>A</i>	0.05
<i>B</i>	0.1
<i>C</i>	0.08

- Obtenga la Desviación Standart (σ) para cada lote
 - Obtenga los valores de f_c' para cada lote y comente los resultados y sus implicaciones económicas.
2. Si la exigencia del constructor es un valor de $f_c' = 25 \text{ MPa}$ ¿Qué valor de f_{cr}' tiene que lograr cada planta?
3. Para las vigas que se muestran en la figura 3,23 y que están destinadas a viviendas con carga de uso de 2 kN/m^2
- Enrajonado $0,18 \text{ kN/m}^2$ por cm de espesor
 - Losa de piso $0,23 \text{ kN/m}^2$ por cm de espesor
 - Hormigón Armado 25 kN/m^3
- Obtenga el Momento Flector bajo carga de servicio
 - Obtenga el Momento de cálculo mayorado
 - ¿Cuál será el Momento Nominal mínimo que deberá resistir la sección?

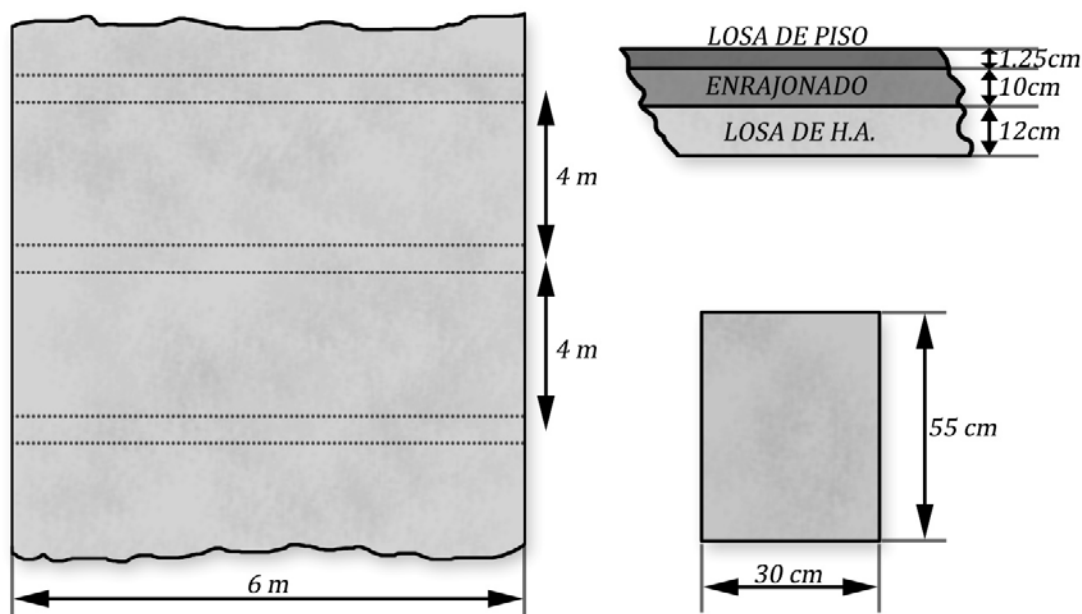


Figura 3,23 Ejercicio propuesto 3

4. Para la viga mostrada en la figura 3,24 que servirá de soporte a un restaurante cuya carga de uso es de 3 kN/m^2 y considerando las mismas secciones de losa y viga y el espaciado entre estas igual al ejemplo anterior

- a) Calcule para las secciones más críticas con la luz central y al voladizo los Momentos Pésimos bajo cargos de servicios y de cálculo
- b) Si se ha decidido colocar el refuerzo que se muestra a las siguientes figuras ¿Resisten esas secciones los Momentos Flectores pésimos?
- Considere para el análisis en la rotura el diagrama de Hognestad para $\varepsilon_c' = 0,003$

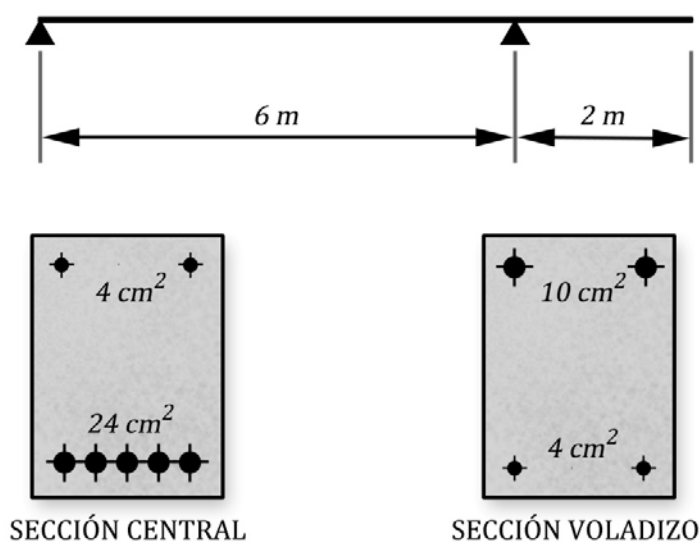


Figura 3,24: Ejercicio propuesto 4

5. Para una sección con las siguientes características:

$$\begin{array}{ll}
 b = 40\text{cm} & A_s' = 10\text{cm}^2 \\
 h = 80\text{cm} & A_s = 50\text{cm}^2 \\
 d' = 5\text{cm} & f_c' = 20\text{MPa} \\
 d_s = 7\text{cm} & f_y = 300\text{MPa}
 \end{array}$$

- a) Calcule el Factor de Seguridad FS_{kk} para los métodos:
- Tensiones admisibles
 - Rotura
 - EL – NC (ACI-02)
 - EL – NC (2003)
- b) Calcule el Factor de Seguridad FS_{km} para los 2 últimos métodos si $\sigma = 2\text{MPa}$
- c) Compare lo resultados y justifíquelos

Considere que la relación entre cargos permanentes (muertas) y de uso (vivas) es de $\frac{D}{L} = 1,2$

BIBLIOGRAFÍA CONSULTADA

1. American Concrete Institute. Building Code Requirements for Reinforced Concrete, ACI 318 – 08, Detroit, Michigan. 2008
2. ACI 318 02 Requisitos para Hormigón Estructural. PCA 2002.
3. Baykov, V. y E. Sigalov. Estructuras de Hormigón Armado. Moscú: Ed. Mir, 1986
4. CEB–FIP. Código Modelo del Comité Europeo del hormigón y la Federación Internacional del Pretensado. 1990
5. Medina Torri F.; Ruiz Alejo L. “Hormigón Estructural 1” Editorial Pueblo y Educación. La Habana. Cuba. 1991
6. Medina Torri, F. “Cargas de Edificaciones y Obras de Ingeniería”. La Habana: Editorial Felix Varela, 1995
7. Meli Piralla R. “Diseño Estructural” Edición revolucionaria. La Habana. Cuba 1986
8. N.C. 053–039–1997. Obras de Hormigón Armado. Principios Generales y Métodos de Cálculo. 1997
9. Nilson, H. A. Diseño de Estructuras de Concreto Bogotá: Ed. McGraw Hill, 1999
10. Park, R. y T, Paulay. Estructuras de Concreto Reforzado. México: Ed. Limusa, 1979
11. Quevedo G. Aplicación de los Estados Límites y la Teoría de Seguridad en el Diseño Geotécnico en Cuba. Tesis en opción al grado de doctor en Ciencias. 2002

CAPÍTULO 4

Solicitaciones normales. Generalidades. Estudio de la flexión en secciones de hormigón armado

4.1 INTRODUCCIÓN.

Al evaluar, en el capítulo II, el comportamiento de una sección por medio de una curva M vs φ se definió dos **ETAPAS** en la vida de ésta.

- **ETAPA PLÁSTICA:** para $\varepsilon_s > \varepsilon_y$ donde la sección se agota al alcanzar su resistencia última, siendo $\varepsilon_y = \frac{f_y}{E_s}$ la deformación de fluencia del acero
- **ETAPA ELÁSTICA:** para $\varepsilon_s < \varepsilon_y$ donde ambos materiales aportan tensiones por debajo de las máximas y en determinados regímenes de carga se comportan linealmente.

A partir de este comportamiento al abordar el diseño y la revisión de secciones siguiendo el Método de Estados Límites, se simplifica el análisis de la siguiente forma:

- Estado Límite Último de agotamiento o falla: se garantiza que la sección no colapse y que el Momento actuante no supere el resistente, evaluando un punto en la curva en que $\varepsilon_c' = \varepsilon_{c,max}$
- Estado Límite de servicio: dentro de la etapa elástica, se chequea que bajo condiciones de cargas de servicio el elemento no se deforme ni agriete más de lo permitido y recomendable.

En el presente capítulo se abordará, siguiendo lo normado por la Norma Cubana, el cálculo de secciones a flexión para satisfacer el Estado Límite Ultimo de Agotamiento, completando este análisis con la valoración de los esfuerzos cortantes en capítulo V.

4.2 PRINCIPIOS GENERALES PARA EL ANÁLISIS DE SECCIONES SOMETIDAS A ESFUERZOS NORMALES

Los esfuerzos normales se presentan en secciones sometidas a solicitaciones de flexión, cargas axiales a compresión o tracción, o la combinación de ambas acciones a lo que se le llama flexión combinada. En el presente epígrafe se exponen los principios generales en los que se basan la comprobación y el diseño de este tipo de secciones.

4,21 HIPÓTESIS BÁSICAS

A partir de la guía que ofrece la Norma Cubana se analizan a continuación, las principales hipótesis para el diseño y comprobación de secciones sometidas a solicitaciones normales en el agotamiento, profundizando en el tratamiento que dan a tan importante tema diferentes normativas e investigadores del mundo.

HIPOTESIS PARA EL CÁLCULO

- a) *La deformación en el hormigón y el acero se supondrán directamente proporcional a la distancia desde el eje neutro, excepto, para elementos a flexión de gran peralte, para los que habrá que considerar un análisis que tenga en cuenta una distribución no lineal de deformación. Alternativamente, se permitirá usar el modelo de bielas y tirantes.*

El principio de Bernoulli, o de las secciones planas, es aceptado por las principales normativas internacionales como el ACI, el reglamento europeo, otras normas como la inglesa, la española y la brasileña. Además se conoce de su adopción como hipótesis por las normas alemanas y el código mexicano.

Unida a esta hipótesis se admite que el acero y el hormigón que lo envuelven son adherentes y por tanto se deforman igualmente. Bajo la acción de las solicitaciones, las armaduras experimentan las mismas deformaciones que el hormigón que las rodea (armaduras adherentes), consideración que complementa la hipótesis anterior y posibilita el empleo de las ecuaciones de compatibilidad.

En esta hipótesis es importante destacar la limitación del grado del refuerzo comprimido que tiene que ver, además, con su aprovechamiento resistente. Emplear aceros mas resistentes es subutilizarlos pues no alcanzarán como regla su deformación de fluencia., por ejemplo se limita el valor de cálculo del acero ordinario de la zona comprimida a 420 MPa .

Estas consideraciones tienen un peso decisivo en el cálculo de secciones pues sustentan todo el andamiaje del trabajo con las ecuaciones de compatibilidad, como se estudió en el capítulo II.

En la justificación de estos principios Park y Paulay basados en experimentos de Hognestad en columnas sometidas a flexo-compresión, explican la validez de la hipótesis siempre que se garantice una buena adherencia entre el acero y el hormigón. Es totalmente exacta en la zona a compresión y en la zona agrietada pese “a que la suposición no se aplica completamente al concreto en la vecindad de la grieta, sin embargo si se mide la deformación del concreto en una longitud calibrada que incluya grietas, se encuentra que el principio de Bernoulli es válido para esta deformación promedio de tensión”. Concluyen estos autores que la hipótesis es suficientemente exacta para fines de diseño excepto para vigas de gran peralte o zonas de grandes cortantes. En este mismo sentido se pronuncia Mattock al estudiar ensayos de Hognestad y Rusch estableciendo la linealidad al unir las deformaciones que ocurren en la zona a compresión con la media en las del acero traccionado.

En la figura 4.1 se ilustran las condiciones de deformación específica derivadas de esta hipótesis para la etapa de agotamiento.

Por su parte los soviéticos basados en una amplia experimentación no admiten que las secciones se mantengan planas y han encontrado una expresión empírica para relacionar las deformaciones del acero menos comprimido (ϵ_s) y la profundidad del bloque de compresiones virtual (ξ). La expresión en cuestión es:

$$\varepsilon_s = \frac{\varepsilon_{cu}}{1 - \frac{\xi_o}{1,1}} \left(\frac{\xi_o}{\xi} - 1 \right)$$

donde:

ξ_o profundidad relativa de la zona comprimida cuando la tensión del acero menos comprimido es cero: $\xi_o = 0,85 - 0,008f_c'$

ε_{cu} deformación máxima del hormigón

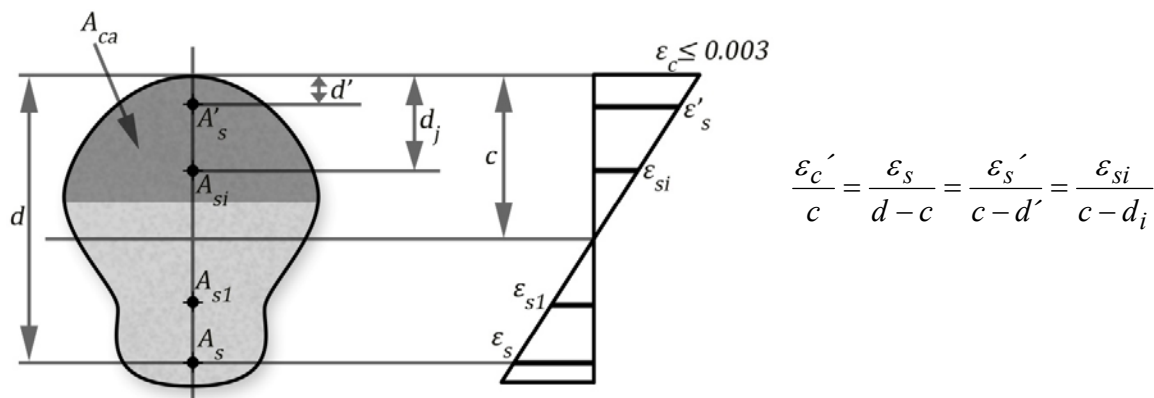


Figura. 4,1 Proporcionalidad de las deformaciones a nivel de sección.

El ACI 318 establece que para el cumplimiento de esta hipótesis se debe verificar lo siguiente:

Para vigas continuas: $\frac{h}{L} \leq \frac{2}{5}$ ó $L \geq 2,5h$

Para vigas isostáticas: $\frac{h}{L} \leq \frac{4}{5}$ ó $L \geq 1,25h$

El CEB, la EH-99 y la Norma Cubana vigente señalan que para que sea válida esta hipótesis deberá cumplirse que la relación entre la distancia de los puntos de momento nulo del diagrama de momentos (L_o), llamada también luz elástica, al peralte total deberá ser mayor que 2, o sea:

Para cualquier elemento: $\frac{L_o}{h} > 2$ ó $L_o > 2h$

Obsérvese que la tendencia de los Reglamentos europeos es expresar la frontera en función de la luz elástica (L_o), mientras que el norteamericano utiliza la luz libre (L) del vano.

b) La máxima deformación para la fibra extrema a compresión del hormigón se supondrá igual a 0.003.

Los ensayos realizados, lo mismo a elementos de hormigón simple que armado tanto en vigas como en columnas, demuestran que la deformación máxima por aplastamiento del hormigón a compresión varía en un amplio rango, de **0.003** a **0.008**, sin embargo, para los casos prácticos estos valores se mueven entre **0.003** y **0.004**. Los propios ensayos confirman que esta deformación disminuye a medida que aumenta la resistencia a compresión del hormigón, y las normas coinciden en fijar un único valor, ver figura 4,2

Los que se basan en el código del CEB-FIB consideran como deformación máxima del hormigón 0,35 %. Por su parte los que asumen el ACI consideran 0,3 %.

Para el caso particular de la compresión centrada las normativas europeas consideran una deformación máxima del hormigón igual a $\varepsilon_c' = 0,002$, lo que no hace el ACI.

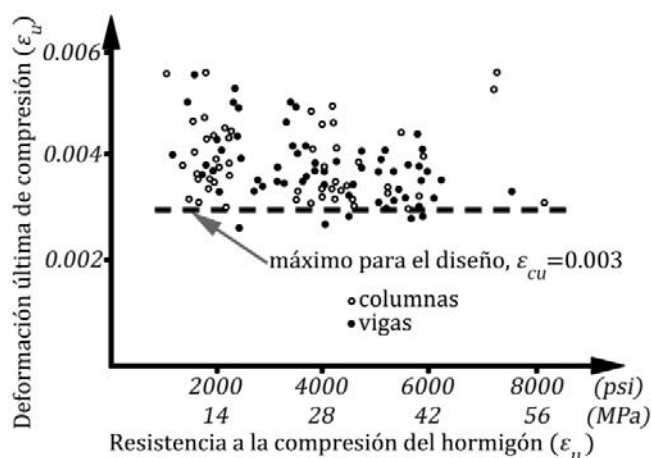


Figura. 4.2 Máxima deformación a compresión del hormigón evaluada en ensayos de elementos de hormigón armado.

En el caso de compresión centrada, los ensayos bajo cargas de corta duración demuestran que la máxima carga ocurre cuando el hormigón alcanza una deformación de **0.002** aunque la presencia del refuerzo transversal en los elementos permite alcanzar deformaciones aún mayores, especialmente cuando este refuerzo es en forma de hélice de pequeño paso a causa del confinamiento que le confieren al hormigón del núcleo.

Park y Paulay consideran que fijar la deformación máxima del hormigón no tiene gran importancia en la determinación de la capacidad última de la sección excepto en columnas que fallan a compresión. Su importancia radica en el control de la curvatura. Otros autores admiten el valor de 0,3 % como conservador y proponen llevarlo hasta 0,4 % en hormigón no confinado. A conclusiones semejantes arriban Mattock, Kris y Hognestad al evaluar los resultados de los experimentos realizados por Hognestad y Rusch, los mismos que permiten a Leonhardt proponer el valor de 0,35 %.

Esta deformación máxima es variable en función de la forma de la zona comprimida del hormigón según Rusch. No obstante se considera innecesario, desde el punto de vista práctico, entrar en tales detalles.

- c) **Los esfuerzos en los aceros naturales por debajo de la resistencia de fluencia especificada f_y para el grado de acero utilizado serán tomados como E_s veces la deformación del acero. Para deformaciones mayores que la correspondiente a f_y , el esfuerzo en el acero se considerará independiente de la deformación e igual a f_y .**

Hay una aceptación general del diagrama bilineal, como el de la figura 4,3.

En el caso de armaduras próximas entre sí, el valor de la deformación del acero puede tomarse referida al centro de gravedad de las barras, mientras que si están muy separadas, se considera la deformación máxima en la camada más próxima al borde traccionado y las camadas restantes se analizan mediante la compatibilidad de deformaciones.

Los **aceros pretensados** no presentan un escalón de fluencia definido como los aceros naturales por lo que solo podrá utilizarse un diagrama tensión-deformación bilineal como una simplificación, especialmente para el cálculo del estado límite último.

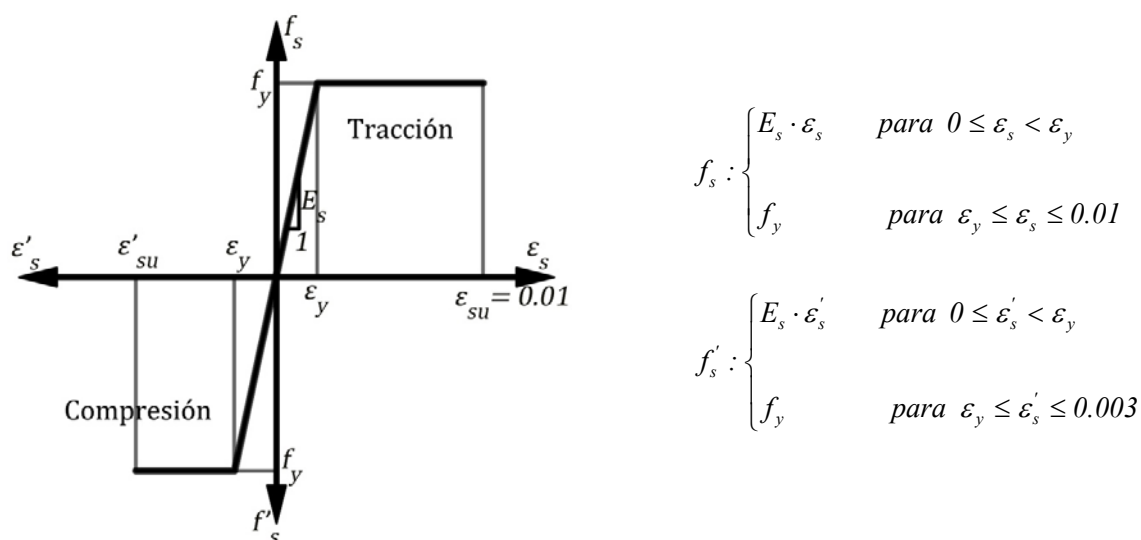


Figura 4,3: Diagrama de cálculo para aceros naturales.

Los análisis más recomendables son los que emplean diagramas más cercanos a los reales, como el indicado por el Manual del *Prestressed Concrete Institute* PCI, que se muestra en la figura 4.4.

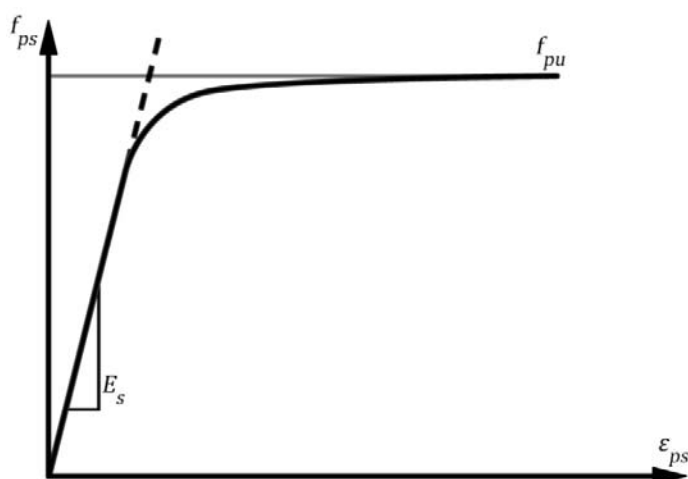


Fig. 4.4 Diagrama de cálculo para aceros pretensados

La curva esfuerzo deformación puede aproximarse, en función de la calidad del acero, de la siguiente forma:

Para aceros con $f_{pu} = 1860\text{MPa}$

$$\varepsilon_{ps} \leq 0,0086$$

$$f_{ps} = \varepsilon_{ps} E_s$$

$$\varepsilon_{ps} > 0,0086$$

$$f_{ps} = 1860 - \frac{\gamma_p}{\varepsilon_{ps} - 0,007}$$

Para aceros con $f_{pu} = 1770\text{MPa}$

$$\varepsilon_{ps} \leq 0,0076$$

$$f_{ps} = \varepsilon_{ps} E_s$$

$$\varepsilon_{ps} > 0,0076$$

$$f_{ps} = 1770 - \frac{\gamma_p}{\varepsilon_{ps} - 0,0064}$$

Siendo:

$$\gamma_p = 0,28 \quad \text{para } \frac{f_{py}}{f_{pu}} \geq 0,9$$

$$\gamma_p = 0,4 \quad \text{para } \frac{f_{py}}{f_{pu}} \geq 0,85$$

$$\gamma_p = 0,55 \quad \text{para } \frac{f_{py}}{f_{pu}} \geq 0,8$$

Donde:

f_{pu} resistencia especificada a tracción del acero en MPa

f_{py} resistencia especificada en la fluencia del acero en MPa

La deformación de rotura del acero es muy superior al 1 % y además fijar este valor no tiene importancia en la determinación de la capacidad última de la sección, por lo que solo obedece a criterios de deformación y agrietamiento, posición defendida por Jiménez Montoya y Avram los que definen el Estado Límite Ultimo de Deformación Plástica Excesiva. Más rigurosa en la limitación es la normativa alemana DIN-1045 que fija la deformación máxima 0,5 % , lo que es justificado por Rusch.

Por lo contrario el código del ACI y el inglés CP-110 no limitan la deformación del acero. Park y Paulay plantean que no le ven sentido práctico a este procedimiento ya que no tiene repercusión en la capacidad resistente de la sección

La Norma Cubana ha adoptado que $\varepsilon_{smax} = 1\%$, lo que obliga a definir los Diagramas de Dominios deformacionales y a utilizar ecuaciones de compatibilidad referidas a $\varepsilon_{smax} = 1\%$, cuando $\varepsilon_c' < 0,003$. Esta decisión ha sido adoptada atendiendo a los siguientes criterios:

- **Metodológicos**, para aprovechar la práctica de muchos años en Cuba de utilizar el Diagrama de Dominios como referente teórico en la explicación y cálculos para secciones sometidas a la flexión combinada.
- **Reducir la ductilidad** de las secciones a flexión para evitar estados de gran fisuración, factor de enorme importancia en regiones tropicales
- Favorecer los análisis teóricos de la **flexo tracción con carga dentro de las armaduras**, introduciendo en las ecuaciones la valoración de las deformaciones del refuerzo.

d) La resistencia a tracción del hormigón se despreciará en cálculos a flexión y a flexo-compresión de hormigón armado, excepto en los requerimientos para pretensado. En los cálculos a flexo-tracción de hormigón armado se despreciará no sólo la resistencia a tracción del hormigón, sino también su resistencia a compresión.

Esta suposición es aceptada unánimemente y está confirmada por el trabajo experimental. Resultan interesantes los estudios de Collins al comparar el comportamiento de secciones considerando o no el aporte del hormigón situado en la zona traccionada, concluyendo su inconveniencia práctica y la poca influencia que esto tiene en la capacidad resistente de la sección.

La resistencia del hormigón en tracción, sin embargo, es importante en las consideraciones de fisuración y deformación bajo cargas de servicio.

- e) **La relación entre la distribución de tensiones del hormigón en compresión y su deformación, se puede suponer que es rectangular, trapezoidal, parabólica o de cualquier otra forma que resulte de la predicción de la resistencia y que coincida con resultados de extensos ensayos**

Esta hipótesis reconoce la distribución de esfuerzos inelásticos del hormigón a esfuerzos altos. A medida que se alcanza el esfuerzo máximo, la relación esfuerzo-deformación para el hormigón no es una línea recta (el esfuerzo no es proporcional a la deformación). La forma general de una curva esfuerzo-deformación es en esencia una función de la resistencia del hormigón y consiste de una curva creciente desde cero a un máximo hasta una deformación a compresión entre 0.0015 y 0.002, seguido por una curva descendente hasta una deformación última (aplastamiento del hormigón) desde 0.003 a valores más altos, incluso, que 0.008.

La distribución real de los esfuerzos a compresión del hormigón es compleja y usualmente no se conoce explícitamente. Las investigaciones han mostrado que las propiedades importantes de la distribución de esfuerzos del hormigón se pueden aproximar con gran exactitud, independientemente de utilizar uno cualquiera de las diferentes hipótesis de la curva de distribución de esfuerzos que se conocen, como fue expuesto en el capítulo II. La norma cubana permite cualquier distribución de esfuerzos particular para ser utilizada en el diseño si se demuestra que la resistencia última predicha tenga una concordancia razonable con los resultados de extensos ensayos. Muchas distribuciones de esfuerzos han sido propuestas. Las más comunes han sido la parábola, el trapecio, el rectángulo y la parábola rectángulo.

- f) **Los requisitos de la hipótesis e se satisfacen para una distribución rectangular equivalente de los esfuerzos de compresión del hormigón, la que queda definida de la manera siguiente: (ver figura 4.5)**

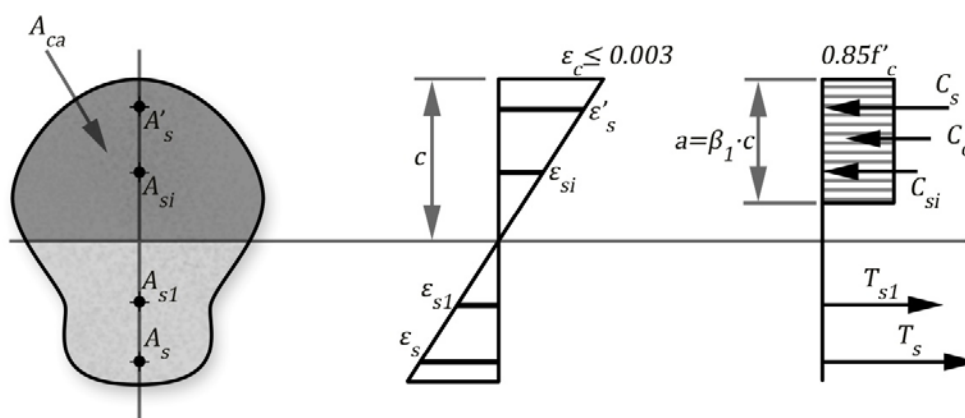


Figura. 4.5 Diagrama rectangular equivalente del hormigón

Se supone un esfuerzo de compresión uniforme del hormigón igual a $0.85f'_c$ distribuida en una zona a compresión equivalente que queda limitada por el perímetro de la sección transversal del elemento y una línea recta paralela a su eje neutro, a una distancia a medida a partir de la fibra de deformación unitaria de máxima compresión tal que:

$$\text{Si } c \leq \frac{1}{\beta_1} h \quad \text{entonces } a = \beta_1 c$$

$$\text{Si } c > \frac{1}{\beta_1} h \quad \text{entonces } a = h$$

La distancia c medida desde la fibra de deformación unitaria máxima hasta el eje neutro, se evaluará en dirección perpendicular a dicho eje.

Cuando la profundidad de la línea neutra medida a partir de la fibra de máxima compresión de la sección cumple la condición $c \leq \frac{1}{\beta_1} h$, el factor β_1 deberá tomarse como 0.85 para resistencias características del hormigón hasta **30 MPa**. Para resistencias superiores a este valor, β_1 se irá disminuyendo uniformemente a una razón de **0.008** por cada **MPa** de incremento sobre los **30 MPa**, aunque sin llegar a ser menor que **0.65**.

En resumen:

$$\beta_1 = 0,85$$

$$\text{para } f_c' \leq 30 \text{ MPa}$$

$$\beta_1 = 1,09 - \frac{f_c'}{125} \geq 0,65$$

$$\text{para } f_c' > 30 \text{ MPa}$$

Cuando la línea neutra se sitúa a una profundidad mayor que $\frac{1}{\beta_1} h$ medida a partir de la fibra de máxima compresión, ya fuera de la sección, se adoptará $a = h$.

Rusch establece que el diagrama para esta etapa no puede responder a los diversos factores que influyen en la resistencia del hormigón sino solo a los que considera más desfavorables:

- Edad 28 días
- Condiciones de fraguado normales
- Combinaciones de carga más desfavorables: de corta duración y sostenidas.

Rusch concluye que el Diagrama de Cálculo “no es copia de ninguna distribución real sino un **DIAGRAMA IDEALIZADO** que reproduce el comportamiento de una sección sometida a esfuerzos normales”, concepto que pueden aplicarse a cualquier diagrama simplificado.

El diagrama promovido por el ACI, que se muestra en la figura 4,5 es de amplia aceptación y su validez fue demostrada por Mattock, Kris y Hognestad al comparar sus resultados con ensayos realizados en diferentes países. En este mismo sentido se pronuncian Park y Paulay.

4,22 DIAGRAMA DE DOMINIOS

El código del ACI introduce nuevas definiciones que resultan imprescindibles en la comprensión de los procedimientos de análisis de secciones bajo esfuerzos normales. Estas son el concepto de **ACERO MAS TRACCIONADO** y el establecimiento del valor de $\varepsilon_t = 0,005$ como criterio en la caracterización de la ductilidad de la sección

En la figura 4,6 se representa como el **REFUERZO MAS TRACCIONADO** es aquel situado en el borde más alejado de la zona comprimida, cuyo peralte se representa por d_t y la deformación por ε_t

Indudablemente esta definición introduce complicaciones en el establecimiento de fronteras y en los procedimientos de análisis de las secciones bajo esfuerzos normales. Por tanto las normativas cubanas han adoptado la disposición de referirse al **ACERO TRACCIONADO**, no al **MAS TRACCIONADO** como establece el ACI y por tanto eliminar las definiciones de d_t y ε_t y el resto de los términos que se derivan de estos. Este criterio, reconocido como conservador implica considerar siempre que: $d_t = d$ y $\varepsilon_t = \varepsilon_s$

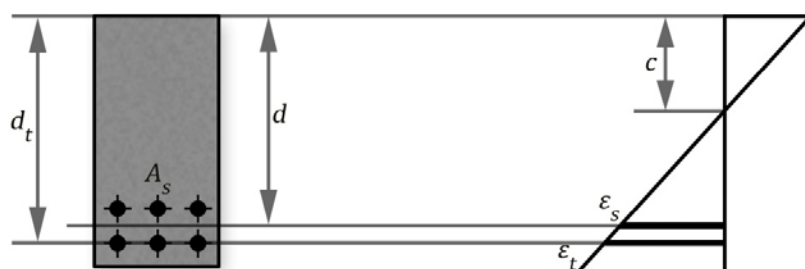


Figura 4,6: Deformación en el acero mas traccionado

Por otra parte, en el tratamiento de la ductilidad se establece el valor de $\varepsilon_s \geq 0,005$ como una solución deseable. Por tanto resulta una frontera de referencia en el diseño y la comprobación y resulta un criterio clave en la determinación del nivel de seguridad de la sección

Las hipótesis adoptadas conducen a obtener una familia de estados de deformaciones últimos que provocan el fallo por resistencia o deformación plástica excesiva de la sección. A la familia de los infinitos estados de deformaciones últimos se la llama **DIAGRAMA DE DOMINIOS** y se esquematiza en la figura 4,7

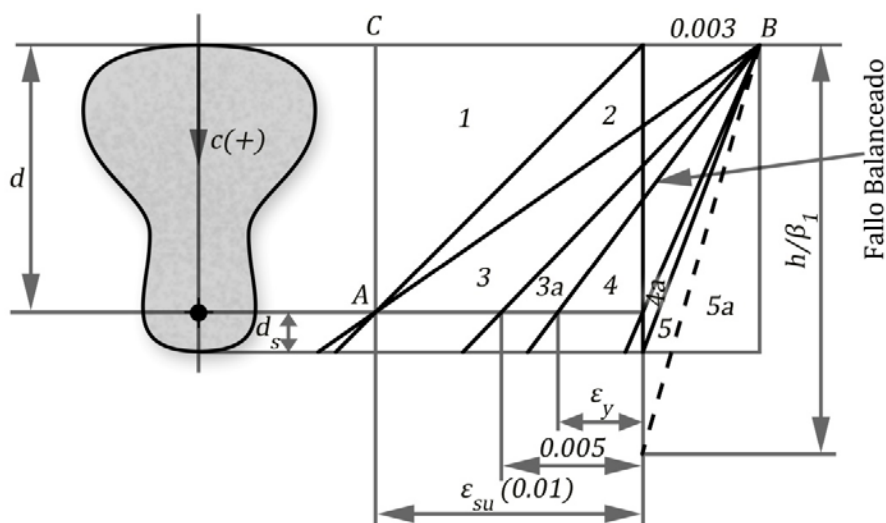


Figura 4.7: Diagrama de Dominios

El diagrama de deformaciones se subdivide en dominios que se caracterizan por las deformaciones del hormigón en la fibra más comprimida y a nivel del centroide del acero en la zona traccionada o menos comprimida; también puede definirse mediante la posición relativa de la línea neutra $k = \frac{c}{d}$.

DOMINIO 1: Tracción simple o compuesta. Toda la sección está a tracción. El agotamiento se produce por deformación plástica excesiva al alcanzar el acero en tracción la máxima deformación ($\varepsilon_s = 0,01$). La recta AC corresponde al caso límite de tracción centrada. En este dominio ($-\infty < c < 0$) ó también ($-\infty < k < 0$).

DOMINIO 2: *Flexión simple o compuesta con tracción controlada.* Para este dominio $0 < \varepsilon_c' < 0,003$ y la deformación del refuerzo traccionado, a partir del estado de referencia, continúa siendo $\varepsilon_s = 0,01$.

En este dominio ($0 < c < 0,231d$) ó también ($0 < k < 0,231$).

DOMINIO 3: *Flexión simple o compuesta con tracción controlada.* El hormigón alcanza su deformación máxima a compresión $\varepsilon_c' = 0,003$, mientras que la deformación del refuerzo traccionado, a partir del estado de referencia, tiene valores entre **0.005** y **0,01** por lo que tratándose de aceros con resistencia a la fluencia inferior a **1000 MPa**, que son en realidad los que se comercializan, se garantiza que alcanzan su resistencia de fluencia.

En este dominio ($0,231d < c < 0,375d$) ó también ($0,231 < k < 0,375$).

DOMINIO 3a: *Flexión simple o compuesta en la zona de transición.* La deformación máxima del hormigón a compresión continúa siendo $\varepsilon_c' = 0,003$ y la deformación del acero traccionado varía entre el valor de fluencia ε_y y **0.005**, por lo cual trabaja a la resistencia nominal de fluencia. En este dominio ($0,375d < c < c_b$) ó también ($0,375 < c < k_b$).

DOMINIO 4: *Flexión simple o compuesta con compresión controlada.* La deformación máxima del hormigón a compresión vuelve a ser $\varepsilon_c' = 0,003$ y la deformación del acero traccionado varía entre cero y el valor de fluencia (ε_y), por lo cual trabaja a valores menores que su resistencia nominal de fluencia.

En este dominio ($c_b < c < d$) ó también ($k_b < k < 1$).

DOMINIO 4a: *Flexión compuesta con compresión controlada.* La deformación máxima del hormigón a compresión se mantiene en $\varepsilon_c' = 0,003$ y la deformación del refuerzo, en la zona menos comprimida es de acortamiento, con un valor menor que **0,003**.

En este dominio ($d < c < h$) ó también ($1 < k < 1 + \frac{d_s}{d}$).

DOMINIO 5: *Compresión simple o compuesta con compresión controlada.* Toda la sección está a compresión. La deformación del hormigón en la zona más comprimida es $\varepsilon_c' = 0,003$. El refuerzo en la zona menos comprimida aumenta su deformación, pero de acortamiento. El máximo valor que alcanza la profundidad de la línea neutra dentro de este dominio queda definida para asegurar que la distribución de tensiones del hormigón en compresión y su deformación, se puede suponer rectangular en la altura $\beta_1 c$, o sea, para valores de c que se sitúen en el siguiente rango ($h < c < \frac{h}{\beta_1}$) ó también ($1 + \frac{d_s}{d} < k < \frac{1 + \frac{d_s}{d}}{\beta_1}$).

DOMINIO 5a: *Compresión simple o compuesta con compresión controlada.* Toda la sección está a compresión. La deformación del hormigón en la zona más comprimida continúa siendo $\varepsilon_c' = 0,003$. El refuerzo en la zona menos comprimida aumenta progresivamente su deformación (acortamiento) pudiendo alcanzar el valor de **0,003**

cuando se trate de la compresión teóricamente centrada, o sea, $(\frac{h}{\beta_1} \leq c \leq +\infty)$ ó también $(\frac{1+\frac{d_s}{d}}{\beta_1} \leq k \leq +\infty)$.

Las fronteras entre los diferentes dominios se adoptan como profundidad relativa de la línea neutra, los siguientes valores:

- Frontera entre 1 y 2: $\frac{c}{d} = k = 0$
- Frontera entre 2 y 3: $\frac{c}{d} = k = 0,231$ (Fallo Simultáneo)
- Frontera entre 3 y 3a: $\frac{c}{d} = k = 0,375$ (Frontera para $\varepsilon_s = 0,005$)
- Frontera entre 3a y 4: $\frac{c}{d} = k = k_b$ (Fallo Balanceado)
- Frontera entre 4 y 4a: $\frac{c}{d} = k = 1$
- Frontera entre 4a y 5: $\frac{c}{d} = k = 1 + \frac{d_s}{d}$
- Frontera entre 5 y 5a: $\frac{c}{d} = k = \frac{1+\frac{d_s}{d}}{\beta_1}$

4.23 ECUACIONES DE COMPATIBILIDAD DE LAS DEFORMACIONES DENTRO DE CADA DOMINIO.

Dominio 1

Todos los estados deformacionales de este dominio giran alrededor del **punto A** y ambas armaduras, de existir, estarán trabajando a tracción, como toda la sección de hormigón, como se muestra en la figura 4,8

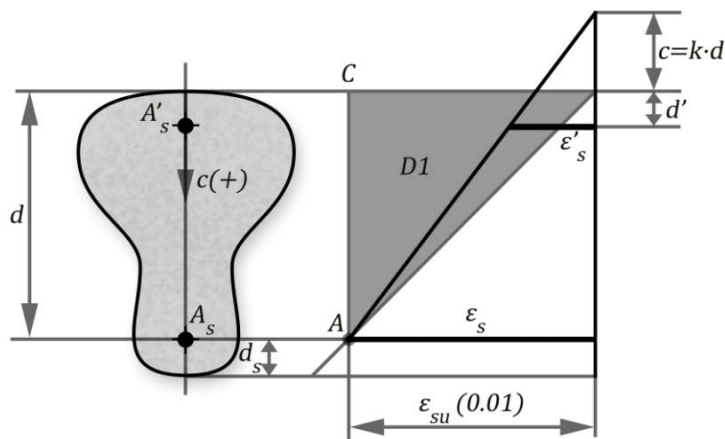


Figura. 4,8 Estado deformacional correspondiente Dominio 1

Para las deducciones que a continuación se tratarán, se definirán los recubrimientos relativos de ambas armaduras de la manera siguiente:

- Recubrimiento relativo de la armadura en compresión o menos traccionada: $\frac{d'}{d}$
- Recubrimiento relativo de la armadura en tracción o menos comprimida: $\frac{d_s}{d}$

Refuerzo A_s : $\varepsilon_s = 0,01$

Refuerzo A_s' : $\varepsilon_s' = 0,01 \left(\frac{c+d'}{c+d} \right)$ $\varepsilon_s' = 0,01 \left(\frac{k+\frac{d'}{d}}{1+k} \right)$

Dominio 2

En este dominio continúan girando los estados deformacionales alrededor del **punto A**, ver figura 4,9, solo que la armadura situada hacia la zona comprimida de la sección, de existir, podrá trabajar a compresión (*siempre que $c > d'$*) o a tracción (*cuando $c < d'$*), mientras que el otro refuerzo estará sujeto a la máxima deformación.

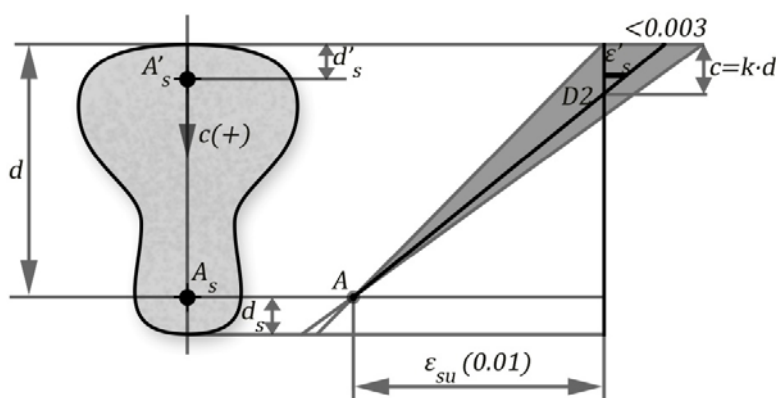


Fig. 4.9 Estado deformacional correspondiente Dominio 2

Refuerzo A_s : $\varepsilon_s = 0,01$

Refuerzo A_s' : $\varepsilon_s' = 0,01 \left(\frac{c-d'}{c+d} \right)$ $\varepsilon_s' = 0,01 \left(\frac{k-\frac{d'}{d}}{1+k} \right)$

Dominios 3, 3a y 4

Todos estos dominios tienen en común que giran alrededor del **punto B**, como se aprecia en la figura 4.10, es decir, la deformación que se registra en la fibra más comprimida de la sección es la máxima (0.003), mientras que de existir armadura en la zona de compresión de la sección y tratándose del caso de refuerzo con los recubrimientos usualmente empleados, dicha armadura trabajará generalmente a compresión. La otra armadura se encuentra siempre en tracción.

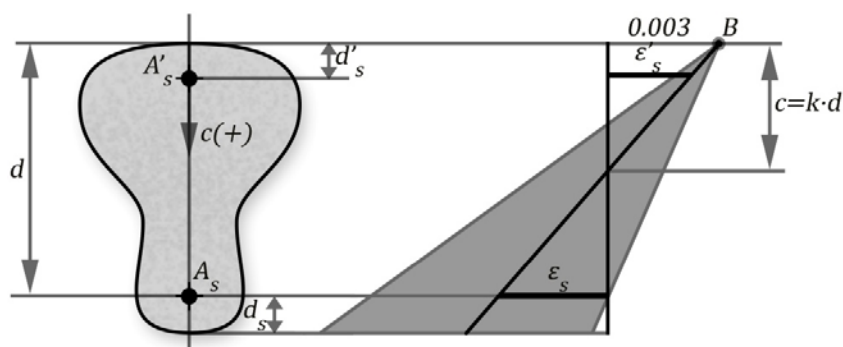


Figura.4,10: Estado deformacional correspondiente a los Dominios 3, 3a y 4.

En consecuencia, las leyes de compatibilidad de las deformaciones para ambos refuerzos serán las mismas en todos estos dominios, dependiendo la magnitud de tales deformaciones sólo de la profundidad de la línea neutra.

$$\text{Refuerzo } A_s: \quad \varepsilon_s = 0,003 \frac{d-c}{c} \quad \varepsilon_s = 0,003 \frac{1-k}{k}$$

$$\text{Refuerzo } A_s': \quad \varepsilon_s' = 0,003 \left(\frac{c-d'}{c} \right) \quad \varepsilon_s' = 0,003 \left(\frac{k-\frac{d'}{d}}{k} \right)$$

Dominios 4a, 5 y 5a.

Lo singular para estos dominios es que todos los estados deformacionales, a pesar de que continúan girando alrededor del *punto B*, aseguran que ambas armaduras, de existir, estarán trabajando en compresión, razón por la que al acero A_s se le llama refuerzo en tracción o menos comprimido, como se muestra en la figura 4.11.

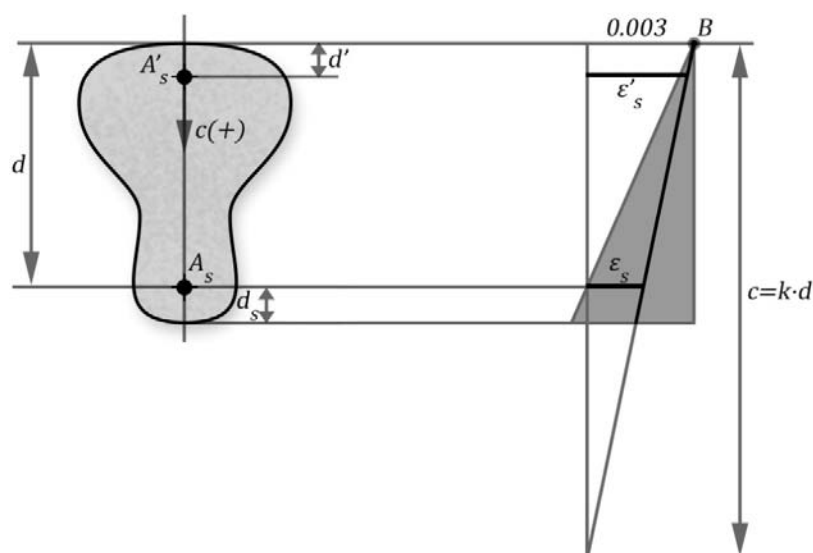


Figura.4,11: Estado deformacional correspondiente a los Dominios 4a y 5.

$$\text{Refuerzo } A_s: \quad \varepsilon_s = 0,003 \frac{c-d}{c} \quad \varepsilon_s = 0,003 \frac{k-1}{k}$$

$$\text{Refuerzo } A_s': \quad \varepsilon_s' = 0,003 \left(\frac{c-d'}{c} \right) \quad \varepsilon_s' = 0,003 \left(\frac{k-\frac{d'}{d}}{k} \right)$$

En la Tabla 4.1 se resumen estas leyes.

Obsérvese que dentro del dominio 2 la deformación de la armadura menos traccionada o en compresión (A_s') depende del recubrimiento teórico que presente.

TABLA 4.1 Ecuaciones que rigen la deformación de las armaduras a tracción y compresión para cada Dominio.

LEYES DE DEFORMACIÓN DEL REFUERZO			
DOMINIO	Deformación de A_s	Deformación de A_s'	Observaciones
1	$\varepsilon_s = 0,01$	$\varepsilon_s' = 0,01 \left(\frac{c + d'}{c + d} \right)$	Ambas armaduras están a tracción.
2	$\varepsilon_s = 0,01$	Para $c < d'$ $\varepsilon_s' = 0,01 \left(\frac{d' - c}{d - c} \right)$	Ambas armaduras se encuentran en tracción.
		Para $c > d'$ $\varepsilon_s' = 0,01 \left(\frac{c - d'}{c + d} \right)$	La armadura A_s se encuentra en tracción, mientras que la armadura A_s' trabaja a compresión.
3,3a, 4	$\varepsilon_s = 0,003 \frac{c - d}{c}$	$\varepsilon_s' = 0,003 \left(\frac{c - d'}{c} \right)$	Para el fallo balanceado $\varepsilon_s = \varepsilon_y$ y $k = k_{lim}$
4a, 5, 5a	$\varepsilon_s = 0,003 \frac{c - d}{c}$		Ambas armaduras se encuentran en compresión

4,3 FALLO BALANCEADO. CUANTÍA BALANCEADA.

A partir de las definiciones de la Norma Cubana puede determinarse, con el apoyo de la figura 4,12, el valor de ω_b , cuantía para la cual se produce el **FALLO BALANCEADO**, $\varepsilon_s = \varepsilon_y$.

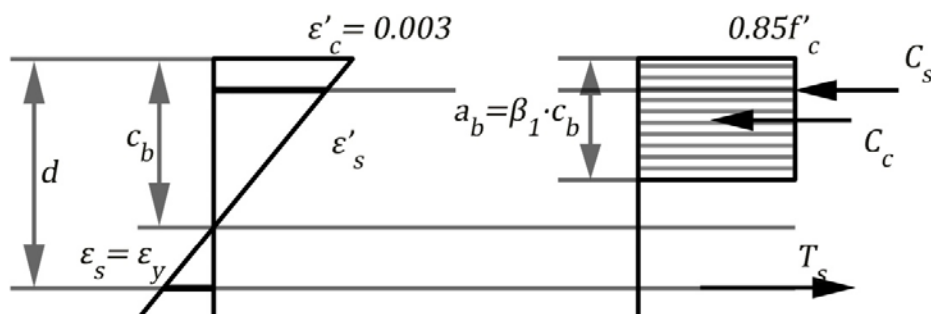


Figura 4,12: Fallo balanceado

Donde: $\varepsilon_y = \frac{f_y}{E_s}$

De la ecuación de compatibilidad

$$c_b = \frac{\varepsilon_c'}{\varepsilon_y + \varepsilon_c'} d \quad c_b = \frac{0,003}{\varepsilon_y + 0,003} d$$

Y en función de k :

$$k_{lim} = \frac{0,003}{\varepsilon_y + 0,003}$$

De la ecuación de fuerzas

$$\Sigma F = 0$$

$$0,85f_c' a \cdot b + f_y A_s' = f_y A_s$$

Dividiendo por $bd f_c'$

$$0,85 \frac{\beta_1 c_b}{d} + \omega' = \omega$$

$$\omega_b = \omega - \omega' = \omega_r = 0,85 \frac{\beta_1 c_b}{d}$$

$$\omega_b = 0,85 \frac{\beta_1 c_b}{d} = 0,85 \beta_1 k_{lim}$$

$$\omega_b = 0,85 \beta_1 \frac{0,003}{\varepsilon_y + 0,003}$$

Concepto que permite plantear que si:

$$\omega - \omega' < \omega_b \quad \text{FALLO DÚCTIL} \quad \varepsilon_s > \varepsilon_y$$

$$\omega - \omega' \geq \omega_b \quad \text{FALLO FRÁGIL} \quad \varepsilon_s \leq \varepsilon_y$$

En la TABLA 4.2 se resumen los valores de ω_b , M_{lim} y de k_{lim} en función del tipo de acero a emplear, si:

$$M_{lim} = \omega_b (1 - 0,59 \omega_b) b d^2 f_c'$$

TABLA 4.2: Valores de ω_b , M_{lim} y de k_{lim}

Valor de β_1											
		$f_c' \leq 30 \text{ MPa}$		$f_c' = 36 \text{ MPa}$		$f_c' = 42,5 \text{ MPa}$		$f_c' = 49 \text{ MPa}$		$f_c' \geq 55 \text{ MPa}$	
		0.85		0.80		0.75		0.70		0.65	
Grado	k_{lim}	ω_b	$\frac{M_{lim}}{bd^2 f_c'}$	ω_b	$\frac{M_{lim}}{bd^2 f_c'}$	ω_b	$\frac{M_{lim}}{bd^2 f_c'}$	ω_b	$\frac{M_{lim}}{bd^2 f_c'}$	ω_b	$\frac{M_{lim}}{bd^2 f_c'}$
G-34	0.714	0.516	0.359	0.486	0.347	0.455	0.333	0.425	0.318	0.395	0.303
G-40	0.667	0.482	0.345	0.453	0.332	0.425	0.318	0.397	0.304	0.368	0.288
G-60	0.588	0.425	0.318	0.400	0.306	0.375	0.292	0.350	0.278	0.325	0.263

4.4. FALLO POR TRACCIÓN CONTROLADA. PROFUNDIDAD DE LA LÍNEA NEUTRA EN LA FRONTERA

Como ya se señalara, a la frontera del fallo por tracción controlada corresponde un estado deformacional último, tal que $\varepsilon_c' = 0.003$, mientras que $\varepsilon_s = 0.005$. La Figura 4.13 ilustra las deformaciones, tensiones y fuerzas en el límite correspondiente a la tracción controlada. Cuando el acero traccionado alcanza una deformación entre $\varepsilon_s = 0.005$ y el límite de deformación máxima $\varepsilon_{s,max} = 0.01$, se dice que la sección se encuentra en tracción controlada, y los diseños en flexión deben encontrarse preferiblemente en esta situación.

El planteamiento de las condiciones de equilibrio conduce a las siguientes ecuaciones:

De la ecuación de fuerzas

$$\Sigma F = 0$$

$$0,85f_c' a \cdot b + f_y A_s' = f_y A_s$$

Dividiendo por $bd f_c'$

$$0,85 \frac{\beta_1 c_t}{d} + \omega' = \omega$$

$$\omega_{ra} = \omega - \omega' = \omega_r = 0,85 \frac{\beta_1 c_t}{d}$$

$$\omega_{ra} = 0,85 \frac{\beta_1 c_t}{d}$$

$$\omega_{ra} = 0,85 \beta_1 \cdot 0,375 = 0,3188 \beta_1$$

Y además puede plantearse que:

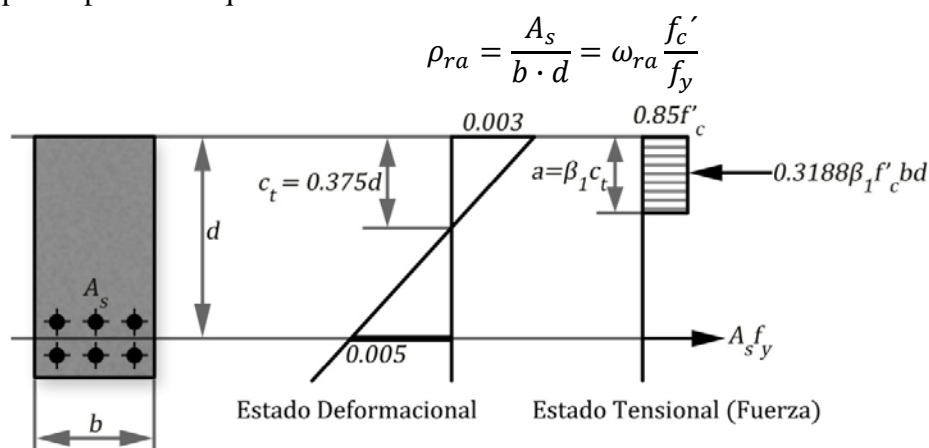


Figura 4,13 Ilustración del estado deformacional frontera de la tracción controlada.

En la TABLA 4,3 se resumen los valores de ω_{ra} y M_{ra} en función del tipo de acero a emplear, si se sabe que:

$$M_{ra} = \omega_{ra}(1 - 0,59\omega_{ra})bd^2f'_c$$

TABLA 4,3 Momento específico del hormigón a compresión para la frontera del fallo por tracción controlada

	$f'_c \leq 30MPa$ $\beta_1 = 0,85$	$f'_c = 36MPa$ $\beta_1 = 0,8$	$f'_c = 42,5MPa$ $\beta_1 = 0,75$	$f'_c = 49MPa$ $\beta_1 = 0,7$	$f'_c \geq 55MPa$ $\beta_1 = 0,65$
ω_{ra}	0.2712	0.2552	0.2393	0.2233	0.2074
$\frac{M_{ra}}{bd^2f'_c}$	0.2279	0.2169	0.2056	0.1940	0.1821

Cuando se requiera refuerzo en compresión debido a que las dimensiones de la sección sean insuficientes para la calidad de hormigón que se haya seleccionado, y se tenga, por ejemplo, un diseño en el que $f'_c = 36MPa$ entonces se debe adoptar una contribución en momento específico del hormigón $\frac{M_{ra}}{bd^2f'_c}$ igual a 0,2169 para asegurar un diseño por tracción controlada.

4,5 SOLUCIÓN GENERAL PARA SECCIÓN RECTANGULAR.

Partiendo de las hipótesis anteriores la solución del problema de la flexión en secciones rectangulares se plantea a continuación, con el apoyo de la figura 4,14:

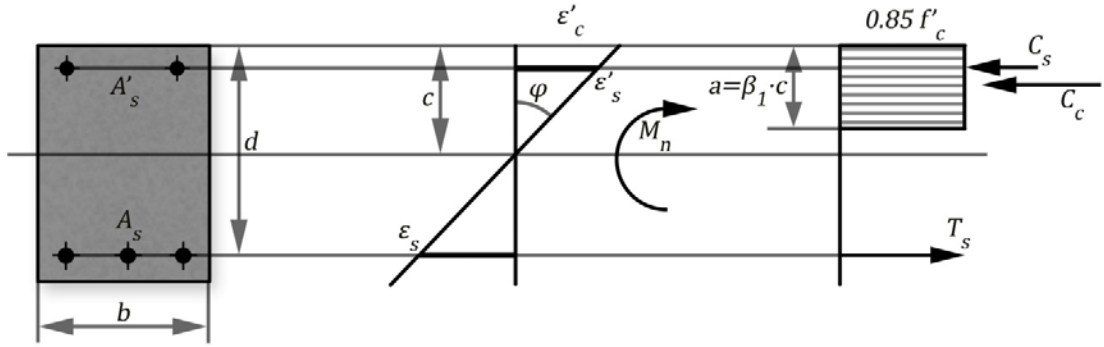


Fig. 4,14: Diagramas de deformaciones, tensiones y fuerzas. Sección rectangular

Donde de las ecuaciones de equilibrio:

$$\Sigma F = 0$$

$$C_c + C_s = T_s$$

$$0,85f'_c \cdot a \cdot b + f'_s A'_s = f_s A_s$$

Siendo:

$$f'_s = \varepsilon'_s E_s, \quad \text{para } \varepsilon'_s < \varepsilon_y$$

$$f_s = \varepsilon_s E_s, \quad \text{para } \varepsilon_s < \varepsilon_y$$

$$f'_s = f_y, \quad \text{para } \varepsilon'_s \geq \varepsilon_y$$

$$f_s = f_y, \quad \text{para } \varepsilon_s \geq \varepsilon_y$$

Y la ecuación de compatibilidad

$$\frac{\varepsilon'_c}{c} = \frac{\varepsilon_s}{d - c} = \frac{\varepsilon'_s}{c - d'}$$

Aquí se hace manifiesta la necesidad de emplear las ecuaciones de compatibilidad para resolver el problema solo si algún refuerzo no alcanza su máxima capacidad.

Si se le llama:

$$\omega = \frac{A_s f_y}{b d f'_c} \quad \omega' = \frac{A'_s f_y}{b d f'_c}$$

$$\eta = \frac{f_s}{f_y} \quad \eta' = \frac{f'_s}{f_y}$$

Y se divide la ecuación de fuerzas por $b d f'_c$:

$$0,85 \frac{a}{d} + \eta' \omega' = \eta \omega$$

$$\omega_r = 0,85 \frac{a}{d} = \eta \omega - \eta' \omega'$$

$$\Sigma M = 0 \text{ (respecto a } A_s)$$

$$M_n = 0,85 f'_c \cdot a \cdot b \left(d - \frac{a}{2} \right) + f'_s A'_s (d - d')$$

Y se divide la ecuación por $b d^2 f'_c$:

$$\frac{M_n}{b d^2 f'_c} = 0,85 \frac{a}{d} \left(1 - 0,5 \frac{a}{d} \right) + \eta' \omega' \left(1 - \frac{d'}{d} \right)$$

$$\frac{M_n}{b d^2 f'_c} = \omega_r \left(1 - 0,59 \omega_r \right) + \eta' \omega' \left(1 - \frac{d'}{d} \right)$$

Si se considera que $f_s = f'_s = f_y$, la ecuación de fuerzas quedaría:

$$0,85 f'_c \cdot a \cdot b + f_y A'_s = f_y A_s$$

$$a = \frac{f_y(A_s - A_s')}{0,85bf_c'}$$

La ecuación de fuerzas puede plantearse como

$$\omega_r = 0,85 \frac{a}{d} = \omega - \omega'$$

Entonces en la ecuación de momentos

$$\Sigma M = 0 \text{ (respecto a } A_s)$$

$$M_n = C_c \cdot jd + C_s(d - d')$$

$$M_n = 0,85f_c' a \cdot b \left(d - \frac{a}{2}\right) + f_y A_s'(d - d')$$

$$\frac{M_n}{bd^2 f_c'} = 0,85 \frac{a}{d} \left(1 - 0,5 \frac{a}{d}\right) + \omega'(1 - \frac{d'}{d})$$

$$\frac{M_n}{bd^2 f_c'} = \omega_r(1 - 0,59\omega_r) + \omega'(1 - \frac{d'}{d})$$

En la figura 4,15 se plantean curvas de $\frac{M_n}{bd^2 f_c'}$ contra ω respondiendo a las ecuaciones generales.

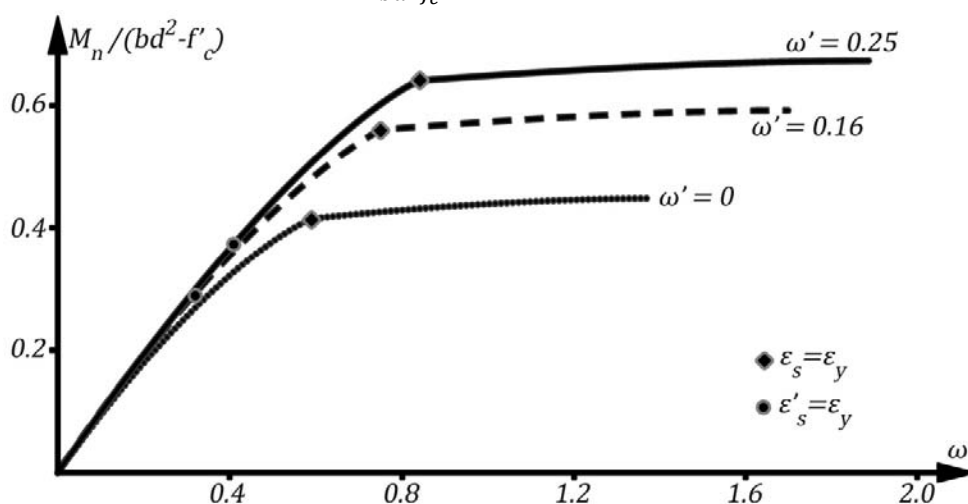


Figura 4,15: Curvas $M_n/(b \cdot d^2 \cdot f'_c)$ vs ω . Influencia del refuerzo de la sección.

Para la curva de $\omega' = 0$ el valor de ω_b define claramente la diferencia entre secciones con fallo frágil ($\omega > \omega_b$) y dúctil ($\omega < \omega_b$). Para valores de $\omega > \omega_b$ incrementos del área de refuerzo y por tanto del costo, no producen prácticamente un aumento de la capacidad portante de la sección. En estos casos las ecuaciones de las curvas serán:

- Fallo dúctil. $\omega < \omega_b$, $f_s = f_y$, $\omega' = 0$, DOMINIOS 2 ó 3

$$\Sigma F = 0$$

$$\omega_r = 0,85 \frac{a}{d} = \eta \omega$$

$$\text{como } \eta = 1$$

$$\omega_r = \omega = 0,85 \frac{a}{d}$$

$$\frac{M_n}{bd^2 f_c'} = \omega_r(1 - 0,59\omega_r)$$

- Fallo frágil. $\omega > \omega_b$, $f_s < f_y$, $\omega' = 0$, DOMINIO 4

$$\Sigma F = 0$$

$$\omega_r = 0,85 \frac{a}{d} = \eta \omega$$

como $\eta < 1$

$$\omega_r = \eta \omega = 0,85 \frac{a}{d}$$

$$c = \frac{a}{\beta_1}$$

y de las ecuaciones de compatibilidad:

$$\varepsilon_s = 0,003 \frac{d - c}{c}$$

$$\eta = \frac{f_s}{f_y} = \frac{\varepsilon_s}{\varepsilon_y}$$

$$\eta = 0,003 \frac{d - c}{c \cdot \varepsilon_s}$$

$$\Sigma M = 0 \text{ (respecto a } A_s)$$

$$\frac{M_n}{bd^2 f_c'} = \mu_r = \omega_r (1 - 0,59 \omega_r)$$

Para la curva de $\omega' = 0,16$ se destaca la nueva frontera en que $\varepsilon_s' = \varepsilon_y$ dentro de la zona en que $\omega - \omega' < \omega_b$. Si la cuantía a tracción de la sección es menor que la que marca esta frontera $\varepsilon_s' < \varepsilon_y$ y por tanto el acero A_s' estará subutilizado: En este caso las ecuaciones serán:

- Fallo dúctil. $\omega - \omega' < \omega_b$, $f_s' < f_y$, $f_s = f_y$, $\omega' = 0,16$, *DOMINIOS 2 ó 3*

$$\Sigma F = 0$$

$$\omega_r = 0,85 \frac{a}{d} = \omega - \eta' \omega'$$

Aquí, al utilizar las ecuaciones de compatibilidad,

Para el DOMINIO 2

$$\frac{\varepsilon_s'}{c - d'} = \frac{\varepsilon_s}{d - c} = \frac{0,01}{d - c}$$

$$\varepsilon_s' = \frac{c - d'}{d - c} 0,01$$

$$\eta' = \frac{c - d'}{d - c} \frac{0,01}{\varepsilon_y}$$

Para el DOMINIO 3

$$\frac{\varepsilon_s'}{c - d'} = \frac{\varepsilon_c'}{c} = \frac{0,003}{c}$$

$$\varepsilon_s' = \frac{c - d'}{c} 0,003$$

$$\eta' = \frac{c - d'}{c} \frac{0,003}{\varepsilon_y}$$

$$\Sigma M = 0 \text{ (respecto a } A_s)$$

$$\frac{M_n}{bd^2 f_c'} = \omega_r (1 - 0,59 \omega_r) + \eta' \omega' (1 - \frac{d'}{d})$$

En el resto de la curva puede apreciarse como el aporte del acero situado en la zona comprimida se hace sustancial en secciones con cuantías cercanas a la balanceada. Para secciones muy dúctiles el aporte no resulta apreciable y por tanto encarece innecesariamente la sección. Las ecuaciones serían entonces:

- Fallo dúctil. $\omega - \omega' \leq \omega_b$, $f_s' = f_y$, $f_s = f_y$, $\omega' = 0,16$, *DOMINIOS 2 ó 3*

$$\Sigma F = 0$$

$$\omega_r = 0,85 \frac{a}{d} = \omega - \omega'$$

$$\Sigma M = 0 \text{ (respecto a } A_s)$$

$$\frac{M_n}{bd^2 f_c'} = \omega_r (1 - 0,59\omega_r) + \omega' (1 - \frac{d'}{d})$$

- Fallo frágil. $\omega - \omega' > \omega_b$, $f_s' = f_y$, $f_s < f_y$, $\omega' = 0,16$, *DOMINIOS 4*

$$\Sigma F = 0$$

$$\omega_r = 0,85 \frac{a}{d} = \eta\omega - \omega'$$

$$\Sigma M = 0 \text{ (respecto a } A_s)$$

$$\frac{M_n}{bd^2 f_c'} = \omega_r (1 - 0,59\omega_r) + \omega' (1 - \frac{d'}{d})$$

En la etapa de la curva 4,15 en que $\omega - \omega' \leq \omega_b$, de la misma forma que para $\omega' = 0$, se aprecia como el aporte de la sección se mantiene prácticamente constante, lo que permite simplificar los cálculos haciendo

$$M_{lim} = \omega_b (1 - 0,59\omega_b) bd^2 f_c' = \text{CONSTANTE}$$

Valor que está entre 0,359 y 0,318 en función de la calidad del acero. Una expresión simplificada es la propuesta por Whitney, considerar que para $\omega > \omega_b$ el aporte del hormigón sea:

$$M_{lim} = 0,333 bd^2 f_c'$$

La que puede adoptarse como máximo aporte del hormigón a flexión.

Para el análisis de la seguridad de la sección a flexión se conoce que:

$$M_u = \phi M_n$$

Por lo que:

$$M_u = \phi \left[0,85 f_c' a \cdot b \left(d - \frac{a}{2} \right) + f_y A_s' (d - d') \right]$$

$$M_u = \phi \left[\omega_r (1 - 0,59\omega_r) bd^2 f_c' + f_y A_s' (d - d') \right]$$

$$\frac{M_n}{\phi bd^2 f_c'} = \omega_r (1 - 0,59\omega_r) + \omega' (1 - \frac{d'}{d})$$

Si:

$$\mu = \frac{M_n}{\phi bd^2 f_c'}$$

$$\mu_r = \omega_r (1 - 0,59\omega_r)$$

La expresión de momentos puede plantearse como:

$$\mu = \mu_r + \eta' \omega' (1 - \frac{d'}{d})$$

Como elemento de ayuda para los cálculos se proponen las **tablas A-2 y A-3**, que se exponen en los anexos, donde relacionan los términos $\mu_r, \omega_r, \frac{a}{d}$ y $k = \frac{c}{d}$

Para los Dominios 2 ó 3 se emplea la **tabla A-2** siendo el fallo dúctil y $\omega - \omega' < \omega_b, f_s = f_y$

En el caso de Fallo Frágil donde $\omega - \omega' > \omega_b, f_s < f_y$, no es válida utilizar la tabla anterior y se hace necesario manejar valores en función de la calidad del acero principal, como se muestra en la **tabla A-3**

4,6 RECOMENDACIONES DE DISEÑO

A continuación se destacan, brevemente, algunos elementos necesarios a tomar en cuenta en el cálculo de secciones rectangulares de Hormigón Armado.

a) Resistencia del hormigón.

Con el propósito de incrementar la durabilidad del hormigón y la protección del refuerzo se han establecido restricciones más severas a los valores mínimos de resistencia del hormigón a emplear, las que están en dependencia de las características de la zona donde se construya el elemento. Estas disposiciones para piezas de hormigón armado a flexión son:

TABLA: 4.4: Valores mínimos de resistencia del hormigón para elementos en flexión.

	NIVEL DE AGRESIVIDAD DEL MEDIO			
	MUY ALTO	ALTO	MEDIO	BAJO
$f_c' (MPa)$	30	30	25	20

b) Cuantías mínimas

El ACI establece la necesidad de colocar valores de acero mínimos para el refuerzo A TRACCIÓN para evitar fallos frágiles de secciones débilmente armadas. Se considera que esta armadura debe resistir más que lo que resistiría a tracción la misma sección de hormigón simple. Para cumplir este requisito recomienda que:

$$A_{s,min} = 0,24 \frac{\sqrt{f_c'}}{f_y} b_w d \quad \text{siempre mayor que} \quad \frac{1,4}{f_y} b_w d$$

Donde las resistencias de los materiales se expresan en MPa

Para secciones T con el ala traccionada se debe colocar $2b_w$

Restricción que no es necesario cumplir si el acero colocado excede un tercio al requerido por cálculo.

Sobre estos requerimientos Nilson realiza un interesante análisis que puede resumirse en los siguientes criterios:

- La segunda expresión obedece a razones históricas y representa valores de cuantías geométricas de aproximadamente 5%. Predomina para valores de $f_c' \geq 35MPa$.
- Para una sección rectangular puede admitirse que $\frac{h}{d} = 1,1$ y el brazo del par resistente es de $0,95d$, entonces para la resistencia de tracción del hormigón reconocida se obtiene que el área mínima necesaria será:

$$A_{s,min} = 0,15 \frac{\sqrt{f_c'}}{f_y} b_w d$$

- Para secciones T este análisis conduce a la expresión

$$A_{s,min} = 0,225 \frac{\sqrt{f_c'}}{f_y} b_w d$$

A partir de estos cálculos concluye que la expresión del ACI es válida para secciones T y notablemente conservadora para secciones rectangulares no recomendando su empleo.

En Cuba se han empleado desde hace muchos años dos criterios para fijar el valor del acero mínimo a tracción.

- Para prevenir efectos desfavorables por la retracción se establece que:

$$A_{s,min} = 0,002b \cdot d$$

- Previendo un fallo frágil y dificultades con la fisuración en elementos con alta ductilidad se recomienda:

$$\omega_{min} = 0,04$$

$$A_{s,min} = 0,04 \frac{f_c'}{f_y} b \cdot d$$

Ante los requerimiento de resistencia del hormigón mínimos establecidos actualmente en Cuba va a predominar la segunda condición, por lo que la primera solo debe considerarse en la colocación del refuerzo principal a COMPRESIÓN.

Un análisis comparativo de estas propuestas, en secciones rectangulares, se muestra en la figura 4, 16

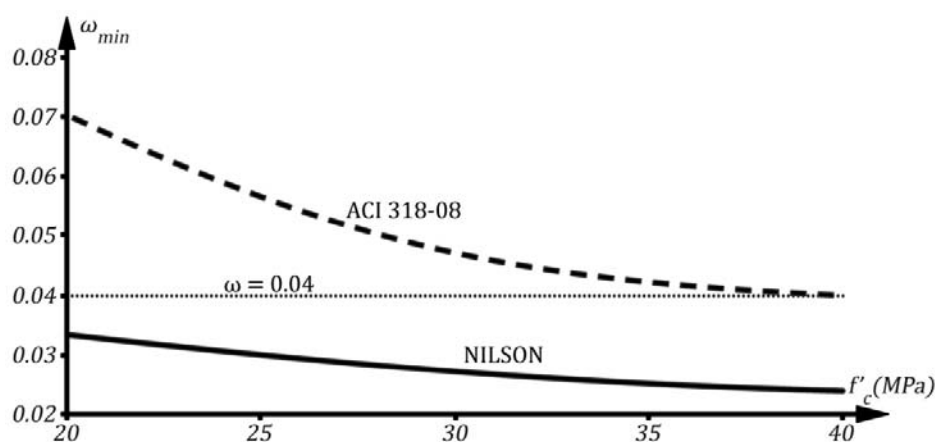


Figura 4,16: Comparación de valores de ω_{min}

Como se aprecia la práctica en Cuba emplea áreas de refuerzo mínimo a tracción que se encuentran entre la propuesta del ACI y la de Nilson.

Considerando como convincentes las consideraciones de Nilson y atendiendo a su sencillez y validación por la práctica los autores recomiendan continuar empleando como cuantía mínima a flexión (ω_{min}) el valor de 0,04

c) Cuantías máximas

A FLEXIÓN: La cuantía máxima está definida por las regulaciones existentes para evitar un fallo frágil, y el código del 2002 establece que la deformación del acero mas traccionado no puede ser

menor que el valor de $0,004$, es decir que $\varepsilon_s \geq 0,004$. De esta manera se elimina la vieja práctica de supeditar el control de la cuantía a tracción por la comparación de $\omega - \omega' = 0,75\omega_b$

En la figura 4,17 se muestra comparativamente lo que representa este nuevo enfoque del código del ACI

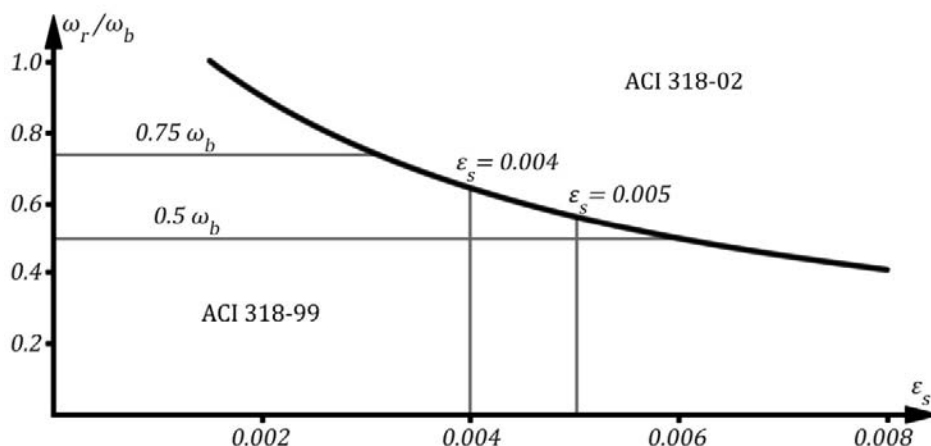


Figura 4,17: Relación entre la cuantía balanceada y ε_s

A COMPRESIÓN: En Cuba se recomienda que el momento de cálculo no debe sobrepasar el valor $1,33M_{lim}$, donde M_{lim} es el momento resistente del hormigón para la sección balanceada. Relacionando la condición anterior con el acero comprimido, puede plantearse que el momento resistente máximo que debe soportar será:

$$M_a' = A_s' f_y (d - d') = 0,33M_{lim}$$

Si se considera como Whitney que:

$$M_{lim} = 0,333bd^2 f_c'$$

El valor de cuantía máxima estará alrededor de $0,12$

También se recomienda que:

$$\rho_{max} = 0,02$$

Y Babé sugiere que no debe ser mayor que $1,5\%$, preferiblemente 1% y que debe colocarse en una sola camada.

d) Dimensiones de secciones rectangulares

El peralte total, h , puede fijarse atendiendo a las siguientes recomendaciones:

$$\frac{L}{15} \sim \frac{L}{20} \quad \text{para secciones entre apoyos}$$

$$\frac{L}{10} \quad \text{para voladizos}$$

Tomando en cuenta que el ancho, b , se fija considerando factores constructivos y como regla es mayor de 25 cm , para determinar el peralte, d , se recomienda que la relación $\frac{d}{b}$ oscile entre 2 y 3 , nunca mayor de 4

e) Recubrimiento mecánico de las armaduras

Un aspecto clave para garantizar la adherencia entre el hormigón y el acero son los recubrimientos y separación de las barras, lo que se estudiará en detalles en el Capítulo VIII. A los recubrimientos

mínimos establecidos por las disposiciones de durabilidad en la NC 250:05 debe sumarse, para obtener el recubrimiento mecánico de las armaduras, el diámetro del estribo y el del refuerzo principal; lo que provoca que este sea variable. Como simplificación necesaria para determinar los recubrimientos mecánicos del refuerzo, d' y d_s , se adoptan los siguientes valores:

- para 1 camada 7 cm
- para 2 camadas 9 cm
- para 3 camadas 11 cm

Para calcular el número de camadas en que pueden colocarse las barras calculadas, debe respetarse la separación mínima especificada a continuación, tomando el mayor de los siguientes valores:

- 2 cm
- el diámetro de la barra mayor
- el tamaño máximo del árido

En los anexos, las tablas A-7 y A-8 pueden auxiliar en la determinación de los recubrimientos mecánicos y el número de barras que caben en una camada.

4,7 COMPROBACIÓN DE SECCIONES

La comprobación de una sección consiste en determinar la capacidad resistente teniendo como

DATOS:

- Dimensiones de la sección: b, h, A_s, A_s'
- Posición del refuerzo: d', d_s
- Calidad de los materiales: f_c', f_y

Desarrollando el procedimiento de **COMPROBACIÓN** para el siguiente ejemplo:

Ejercicio 4.1

Calcule el momento de servicio que resiste la siguiente sección:

$$\begin{array}{llll} h = 55\text{cm} & A_s = 6 \text{ barras } N^{\circ}36 (60,36\text{cm}^2) & f_c' = 25\text{MPa} & \\ b = 30\text{cm} & A_s' = 4 \text{ barras } N^{\circ}25 (20,4\text{cm}^2) & f_y = 300\text{MPa} & E_s = 2 \cdot 10^5\text{MPa} \end{array}$$

La sección que se muestra en la figura 4.18 forma parte de una viga construida “in situ” en una zona con agresividad baja. Esto permite fijar el recubrimiento de las barras como de 30mm y determinar los recubrimientos mecánicos d_s y d' de manera precisa con la ayuda de la tabla A-8 de los anexos. Para el recubrimiento exigido, estribos N°10 y barras principales N°36 situadas en dos camadas, $d_s = 93,2\text{mm}$. El recubrimiento de la primera camada se determina por el mismo procedimiento, siendo 57,4mm.

Para el acero comprimido, barras N°25 situadas en una camada, $d' = 52,2\text{mm}$

Entonces:

$$d = h - d_s = 45,62\text{cm}$$

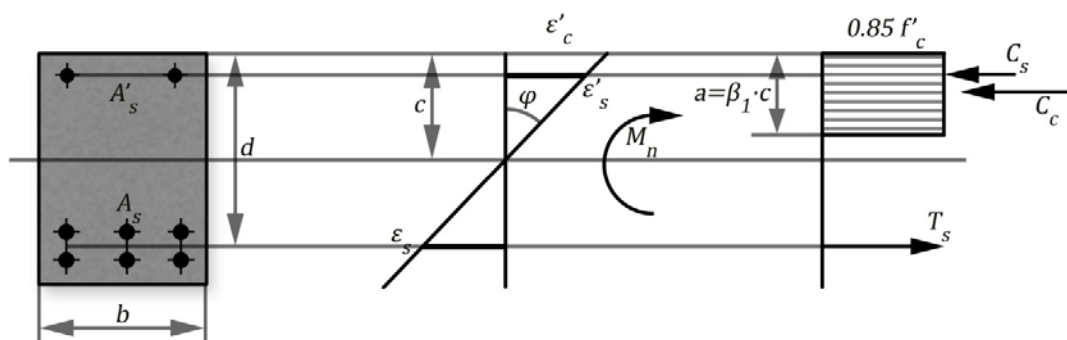


Figura 4,18: Diagramas de deformaciones, tensiones y fuerzas. Sección rectangular

Cálculos y discusión

1. Determinación de las características generales.

$$\omega = \frac{A_s f_y}{b d f_c'} \quad \omega = \frac{60,36 \cdot 300}{30 \cdot 45,62 \cdot 25} = 0,529$$

$$\omega' = \frac{A_s' f_y}{b d f_c'} \quad \omega' = \frac{20,4 \cdot 300}{30 \cdot 45,62 \cdot 25} = 0,179$$

2. Determinación del tipo de fallo.

$$\omega - \omega' = 0,35$$

$$\omega_b = 0,85 \beta_1 \frac{0,003}{0,003 + \varepsilon_y}$$

donde:

$$\varepsilon_y = \frac{f_y}{E_s}$$

$$\varepsilon_y = \frac{300}{2 \cdot 10^5} = 0,0015$$

$$\beta_1 = 0,85 \quad \text{ya que} \quad f_c' \leq 30 \text{ MPa}$$

$$\omega_b = 0,85 \cdot 0,85 \frac{0,003}{0,003 + 0,0015} = 0,482$$

como $\omega - \omega' = 0,35 < \omega_b$ el fallo será dúctil y $\varepsilon_s > \varepsilon_y$

3. Cálculo de a

Suponiendo que $\varepsilon_s' > \varepsilon_y$

$$C_c + C_s = T_s$$

$$0,85 f_c' a \cdot b + f_y A_s' = f_y A_s$$

$$a = \frac{f_y (A_s - A_s')}{0,85 b f_c'}$$

$$a = \frac{300(60,36 - 20,4)}{0,85 \cdot 25 \cdot 30} = 18,8 \text{ cm}$$

$$c = \frac{a}{\beta_1} = \frac{18,8}{0,85} = 22,12 \text{ cm}$$

Comprobando la suposición anterior.

$$\frac{\varepsilon_s'}{c - d'} = \frac{\varepsilon_c'}{c} = \frac{0,003}{c}$$

$$\varepsilon_s' = \frac{c - d'}{c} 0,003 = \frac{22,12 - 5,22}{22,12} 0,003 = 0,0023 > \varepsilon_y$$

Por tanto resulta válida la suposición de que el refuerzo comprimido fluye.

4. Cálculo de Momento Nominal (M_n).

El Momento Nominal (M_n) sería

$$\Sigma M = 0 \text{ (respecto a } A_s)$$

$$M_n = C_c \cdot jd + C_s(d - d')$$

$$M_n = 0,85f_c' a \cdot b \left(d - \frac{a}{2}\right) + f_y A_s'(d - d')$$

$$M_n = 0,85 \cdot 2,5 \cdot 18,8 \cdot 30 \left(45,64 - \frac{18,8}{2}\right) + 20,4 \cdot 30(45,64 - 5,22)$$

$$M_n = 68178,9 \text{ kN} \cdot \text{cm} = 681,79 \text{ kN} \cdot \text{m}$$

Utilizando las ayudas de cálculo que se proponen en el ANEXO A-2, se procede a calcular ω_r por:

$$\omega_r = \omega - \omega' = 0,35$$

y con este valor, en la TABLA A-2, se obtiene:

$$\mu_r = \omega_r(1 - 0,59\omega_r) = 0,2777$$

y finalmente se calcula M_n por:

$$M_n = \mu_r b d^2 f_c' + f_y A_s'(d - d')$$

$$M_n = 0,2777 \cdot 30 \cdot 45,64^2 \cdot 2,5 + 30 \cdot 20,4(45,64 - 5,22)$$

$$M_n = 68120,9 \text{ kN} \cdot \text{cm} = 681,21 \text{ kN} \cdot \text{m}$$

Evidenciándose que es un procedimiento sencillo y expedito.

El Momento Ultimo de la sección se obtiene al considerar los factores de incertidumbre atribuibles a los materiales y que están contenidos en el coeficiente ϕ . Para calcular el coeficiente debe determinarse las características de la sección. Como se conoce el valor de $c = 22,12 \text{ cm}$ y $d = 45,64 \text{ cm}$

$$\frac{c}{d} = \frac{22,12}{45,64} = 0,484 > 0,375$$

Por tanto la sección estará en la ZONA DE TRANSICIÓN al resultar $\varepsilon_y < \varepsilon_s < 0,005$ por lo que $0,65 < \phi < 0,9$ y se calcularía por la expresión:

$$\phi = 0,329 + \frac{0,214}{\frac{c}{d}}$$

$$\phi = 0,329 + \frac{0,214}{0,484} = 0,77$$

Finalmente:

$$M_u = \phi M_n$$

$$M_u = 0,77 \cdot 681,79 = 525,35 \text{ kN} \cdot \text{m}$$

Y si se admite que el coeficiente de mayoración de las cargas es $\gamma_f = 1,36$

$$M_k = \frac{M_u}{\gamma_f} = \frac{525,35}{1,36} = 386,29 \text{ kN} \cdot \text{m}$$

Ejercicio 4.2

Calcule M_u y M_k para la misma sección del ejercicio 4,1 considerando $A_s = 8$ barras N°36 ($80,44\text{cm}^2$)

Para el recubrimiento exigido, estribos N°10 y barras principales N°36 situadas en tres camadas, $d_s = 129\text{mm}$. El recubrimiento de la primera camada se determina por el mismo procedimiento, siendo $57,4\text{mm}$. Entonces:

$$d = h - d_s = 42,1\text{cm}$$

$$\omega = 0,7643$$

$$\omega' = 0,1938$$

Cálculos y discusión

Repitiendo los pasos 1 y 2 y comprobando las características del fallo:

$$\omega - \omega' = 0,5705 > \omega_b \text{ por tanto el FALLO será frágil y } \varepsilon_s < \varepsilon_y$$

3. Cálculo de c

Suponiendo que $\varepsilon_s' > \varepsilon_y$, lo que debe cumplirse sin dudas para una sección con cuantía a tracción mayor que la anterior

$$C_c + C_s = T_s$$

$$0,85f_c' a \cdot b + f_y A_s' = f_s A_s$$

$$f_s = \varepsilon_s E_s \quad \varepsilon_s = 0,003 \frac{d-c}{c}$$

La ecuación de fuerzas quedaría:

$$0,85f_c' a \cdot b + f_y A_s' = \varepsilon_s E_s A_s$$

$$0,85f_c' \beta_1 c \cdot b + f_y A_s' = 0,003 \frac{d-c}{c} E_s A_s$$

$$52,19c^2 + 5438,4c - 203191 = 0$$

$$c = 28,99\text{cm}$$

$$a = 0,85 \cdot 28,99 = 24,64\text{cm}$$

$$\varepsilon_s = 0,003 \frac{42,1-28,99}{28,99} = 0,00136$$

$$f_s = 0,00136 \cdot 2 \cdot 10^5 = 271,6\text{MPa}$$

4. Cálculo de Momento Nominal.

El Momento Nominal (M_n) sería

$$M_n = 0,85f_c' a \cdot b \left(d - \frac{a}{2} \right) + f_y A_s' (d - d')$$

$$M_n = 0,85 \cdot 2,5 \cdot 24,64 \cdot 30 \left(42,1 - \frac{24,64}{2} \right) + 20,4 \cdot 30(42,1 - 5,22)$$

$$M_n = 69349,9\text{kN} \cdot \text{cm} = 693,5\text{kN} \cdot \text{m}$$

Y calculando el valor del máximo momento último y el actuante, al saber que $\phi = 0,65$ ya que el fallo es frágil: $\omega - \omega' = 0,5705 > \omega_b$, $\varepsilon_y > \varepsilon_s$.

Entonces:

$$M_u = \phi M_n = 0,65 \cdot 693,5 = 450,77\text{kN} \cdot \text{m}$$

$$M_k = \frac{M_u}{\gamma_f} = \frac{450,77}{1,36} = 331,45\text{kN} \cdot \text{m}$$

Utilizando las ayudas de cálculo, en este caso para FALLO FRÁGIL, la TABLA A-3, se trabaja con la ecuación de fuerzas:

$$\omega_r = 0,85 \frac{a}{d} = \eta \omega - \omega'$$

$$\frac{\omega_r}{\eta} = \omega - \frac{\omega'}{\eta}$$

y como no se conoce el valor de η , se requiere de un proceso de tanteos a partir de suponer este valor.

Para el ejemplo en desarrollo se supone $\eta = 0,95$

$$\frac{\omega_r}{\eta} = 0,7643 - \frac{0,1938}{0,95} = 0,5603$$

se comprueba en la TABLA A-3 para el refuerzo G-40, $f_y = 300 \text{ MPa}$, el valor supuesto de η , resultando menor y alrededor de 0,89.

Repitiendo el procedimiento para un $\eta = 0,91$

$$\frac{\omega_r}{\eta} = 0,7643 - \frac{0,1938}{0,91} = 0,55513$$

valor aceptable que permite concluir los cálculos obteniendo en la TABLA A-3

$$\eta = 0,9 \quad \mu_r = 0,3516$$

y finalmente se calcula M_n por:

$$\begin{aligned} M_n &= \mu_r b d^2 f_c' + f_y A_s' (d - d') \\ M_n &= 0,3516 \cdot 30 \cdot 42,1^2 \cdot 2,5 + 30 \cdot 20,4(42,1 - 5,22) \\ M_n &= 69309 \text{ kN} \cdot \text{cm} = 693,09 \text{ kN} \cdot \text{m} \end{aligned}$$

Semejante al obtenido de forma más precisa por el procedimiento anterior.

Ejercicio 4.3

Calcule M_u y M_k para la misma sección del ejercicio 4,1 considerando $A_s' = 4$ barras N°32 ($32,7 \text{ cm}^2$), situadas en dos camadas y entonces, con el auxilio de la tabla A-8 de los anexos, se determina $d' = 88 \text{ mm}$

Para estas condiciones $\omega' = 0,2871$

Repitiendo los pasos 1 y 2 y comprobando las características del fallo:

$$\omega - \omega' = 0,2419 < \omega_b \quad \text{por tanto el FALLO será mucho más dúctil que la anterior } \varepsilon_y < \varepsilon_s$$

Cálculos y discusión

3. Cálculo de c

Suponiendo que $\varepsilon_s' > \varepsilon_y$

$$C_c + C_s = T_s$$

$$0,85 f_c' a \cdot b + f_y A_s' = f_y A_s$$

$$a = \frac{f_y (A_s - A_s')}{0,85 b f_c'}$$

$$a = \frac{300(60,36 - 32,72)}{0,85 \cdot 25 \cdot 30} = 12,99 \text{ cm}$$

$$c = \frac{a}{\beta_1} = \frac{12,99}{0,85} = 15,28 \text{ cm}$$

Comprobando la suposición de que el acero comprimido fluye:

$$\varepsilon_s' = \frac{c - d'}{c} 0,003 = \frac{15,28 - 8,8}{15,28} 0,003 = 0,0013 < \varepsilon_y$$

Entonces hay que resolver la ecuación de fuerzas, que sería:

$$0,85f_c' a \cdot b + f_s' A_s' = f_y A_s$$

$$0,85f_c' a \cdot b + \varepsilon_s' E_s A_s' = f_y A_s$$

$$0,85f_c' \beta_1 c \cdot b + 0,003 \frac{c - d'}{c} E_s A_s' = f_y A_s$$

Ecuación que puede ordenarse como sigue:

$$c^2 - \frac{A_s f_y - 0,003 E_s A_s'}{0,85 \beta_1 f_c' b} - \frac{0,003 E_s A_s' d'}{0,85 \beta_1 f_c' b} = 0$$

De donde puede obtenerse el valor de c y posteriormente f_s' , resultando finalmente:

$$c = 16,5 \text{ cm} \quad a = 0,85 \cdot 16,5 = 14,03 \text{ cm}$$

$$\varepsilon_s = 0,003 \frac{16,5 - 8,8}{16,5} = 0,0014 \quad f_s' = 0,0014 \cdot 2 \cdot 10^5 = 280,09 \text{ MPa}$$

El Momento Nominal (M_n) sería

$$M_n = 0,85f_c' a \cdot b \left(d - \frac{a}{2} \right) + f_s' A_s' (d - d')$$

$$M_n = 0,85 \cdot 2,5 \cdot 14,03 \cdot 30 \left(45,64 - \frac{14,03}{2} \right) + 32,72 \cdot 30 (45,64 - 8,8)$$

$$M_n = 683,79 \text{ kN} \cdot \text{m}$$

Y como $c < 0,375d = 17,12 \text{ cm}$, entonces $\phi = 0,9$ y $M_u = 615,41 \text{ kN} \cdot \text{m}$

Sin embargo se prefiere el procedimiento propuesto por Nilson que permite obtener el área de refuerzo a compresión máximo para que $\varepsilon_s' = \varepsilon_y$, lo que asegura un óptimo aprovechamiento del refuerzo comprimido. Esta $A_{s, revisada}$ se obtiene relacionando.

$$A_{s, revisada} = A_s' \frac{f_s'}{f_y}$$

Para el ejercicio en desarrollo:

$$f_s' = \varepsilon_s' E_s$$

$$f_s' = 0,0013 \cdot 2 \cdot 10^5 = 254,46 \text{ MPa}$$

y entonces:

$$A_{s, revisada} = 32,72 \frac{254,46}{300} = 27,79 \text{ cm}^2$$

Para el que se recalcula a

$$a = \frac{300(60,36 - 27,79)}{0,85 \cdot 25 \cdot 30} = 15,33 \text{ cm}$$

4. Cálculo de Momento Nominal.

El Momento Nominal (M_n) sería

$$M_n = 0,85f_c' a \cdot b \left(d - \frac{a}{2} \right) + f_y A_{s, revisada} (d - d')$$

$$M_n = 0,85 \cdot 2,5 \cdot 15,33 \cdot 30 \left(45,64 - \frac{15,33}{2} \right) + 27,79 \cdot 30 (45,64 - 8,8)$$

$$M_n = 678197 \text{ kN} \cdot \text{cm} = 678,2 \text{ kN} \cdot \text{m}$$

Y calculando el valor del máximo momento último como $c = 18,03\text{cm}$, $c > 0,375d$ por lo que en la sección estará en la zona de transición y

$$\phi = 0,329 + \frac{0,214}{0,395} = 0,87$$

Finalmente:

$$M_u = \phi M_n = 0,87 \cdot 678,03 = 598,96\text{kN} \cdot \text{m}$$

$$M_k = \frac{M_u}{\gamma_f} = \frac{598,967}{1,36} = 446,93\text{kN} \cdot \text{m}$$

Valor menor que el obtenido calculando el aporte real del acero comprimido.

Comparando este resultado con la sección del ejercicio 4,1, puede apreciarse como el incremento de A_s' , que es considerable, solo provoca un pequeñísimo incremento de la capacidad portante de la sección.

Para el uso de las ayudas de cálculo en este caso se requerirá también de un proceso de tanteos, pues no se conoce el de η' . De la ecuación de fuerzas:

$$\omega_r = \omega - \eta' \omega'$$

Considerando $\eta' = 0,9$

$$\omega_r = \omega - 0,9 \cdot \omega' = 0,2706$$

Se obtiene en la TABLA A-2, $k = \frac{c}{d} = 0,3737$ y comprobando:

$$\varepsilon_s' = \frac{0,003}{k} \left(k - \frac{d'}{d} \right) = \frac{0,003}{0,3737} (0,3737 - 0,193)$$

$$\varepsilon_s' = 0,00145 < \varepsilon_y$$

Entonces suponiendo un valor de η' entre la relación $\frac{\varepsilon_s'}{\varepsilon_y} = 0,93$ y el asumido y calculando un nuevo valor de ω_r

$$\omega_r = \omega - 0,93 \cdot \omega' = 0,262$$

se obtiene en la TABLA A-2, $k = \frac{c}{d} = 0,363$ y comprobando:

$$\varepsilon_s' = \frac{0,003}{k} \left(k - \frac{d'}{d} \right) = \frac{0,003}{0,363} (0,363 - 0,193)$$

$$\varepsilon_s' = 0,0014 < \varepsilon_y, \quad \eta' = 0,937$$

y considerando $\eta' = 0,93$ válido, se obtiene $\mu_r = 0,221$, finalmente:

$$M_n = \mu_r b d^2 f_c' + \eta' f_y A_s' (d - d')$$

$$M_n = 0,221 \cdot 30 \cdot 45,64^2 \cdot 2,5 + 0,93 \cdot 30 \cdot 32,72 (45,64 - 8,8)$$

$$M_n = 67992,6\text{N} \cdot \text{cm} = 679,93\text{kN} \cdot \text{m}$$

Valor ligeramente mayor que el calculado por el procedimiento anterior más conservador, pero más sencillo y rápido.

Generalizando estos resultados se construyen las curvas mostradas en la Figura 4,19, donde se varía la cuantía a tracción ω planteando el valor del momento resistente en tres dimensiones:

M_n momento nominal, ideal resistente de la sección considerando el aporte de los materiales en sus valores característicos

M_u momento último de la sección, que caracteriza la seguridad de la sección tomando en cuenta los factores de incertidumbre de los materiales. $M_u = \phi M_n$

M_k momento máximo actuante completándose el análisis de la seguridad con los factores de incertidumbre atribuibles a las cargas y a otras situaciones de carácter general.

$$M_k = \frac{\phi M_n}{\gamma_f}$$

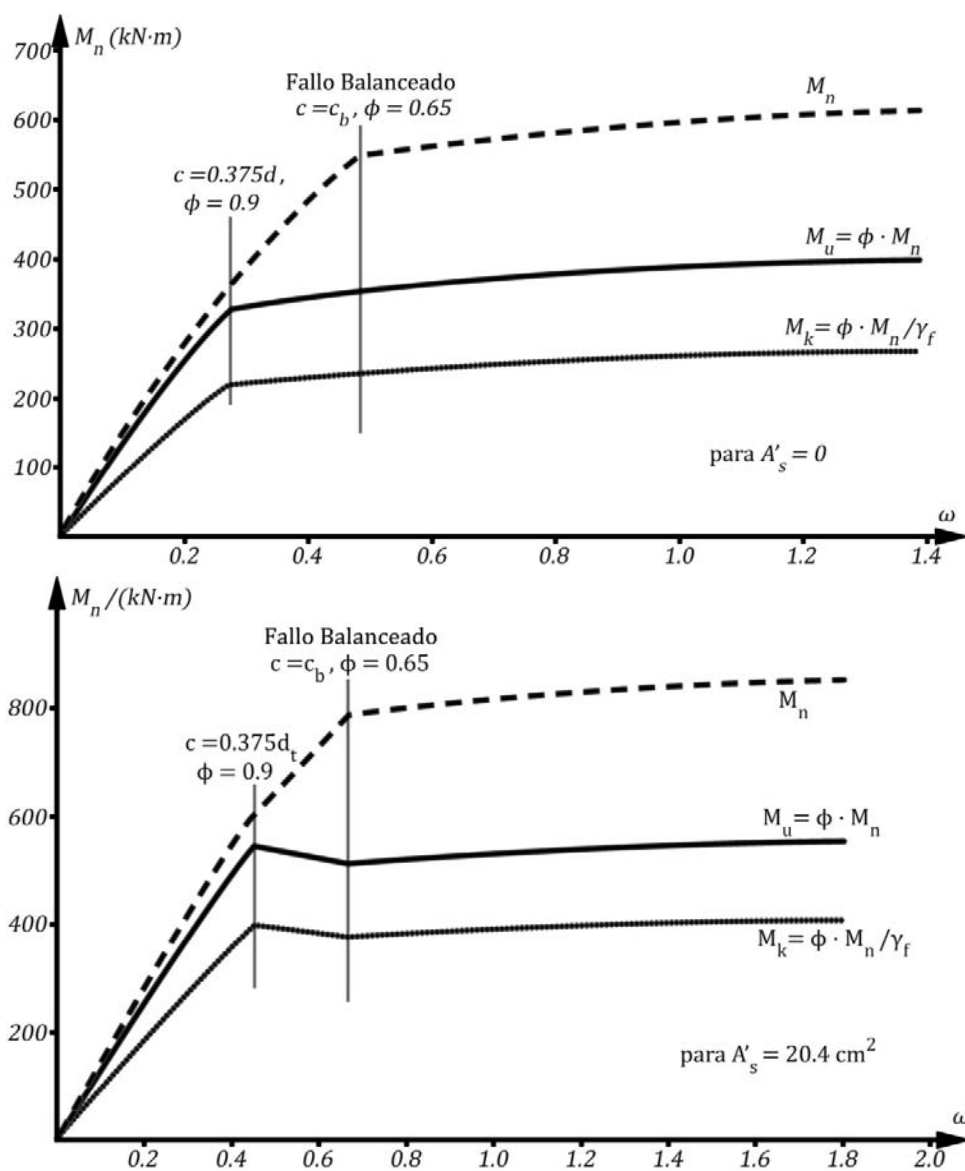


Figura 4,19: Curva M vs ω Momento Nominal (M_n). Momento Último (M_u). Momento actuante (M_k)

En los gráficos, tanto para el que se desprecia el aporte del acero comprimido como en el que este es tomado en cuenta, se puede apreciar la diferencia entre la resistencia ideal de la sección (M_n) y el momento actuante admisible (M_k). Esta diferencia es el factor de seguridad aplicado a la sección, ya que $M_k = \frac{M_n}{FS}$.

Además se ratifican las conclusiones referidas al comportamiento de la sección a partir del fallo balanceado, donde la capacidad resistente de la sección no aumenta significativamente con el incremento del área de refuerzo a tracción.

Es significativo también el cambio que se produce en M_u a partir de que $c = 0,375d$, debido a la reducción del factor de seguridad ϕ , evidenciándose la conveniencia de diseñar secciones donde predominen la flexión, asegurando que $\phi = 0,9$. En el caso de que se considere A_s' cero el momento último sigue creciendo aunque muy poco, por lo que no se justifica el incremento del refuerzo traccionado para un incremento insignificante de la capacidad portante de la sección. Sin embargo cuando hay refuerzo comprimido aportando, el efecto del coeficiente ϕ es mucho mayor pues afecta también a este término y por tanto más significativo su papel en el incremento del factor de seguridad. Nótese en el gráfico correspondiente como para $c > 0,375d$ se produce una caída de la capacidad portante de la sección.

4,8 DISEÑO DE SECCIONES.

Al enfrentar el diseño de secciones se cuenta con los siguientes **DATOS**

- Momento de las cargas actuantes: $M_u = \gamma_f M_k = 1,2M_{CP} + 1,6M_{CU}$
- Calidades de los materiales: f_c', f_y

Y las **INCÓGNITAS** son las dimensiones de la sección y del refuerzo.

En función de esto último el diseño se enfrenta en dos situaciones distintas:

- a) El diseño es libre al no existir un peralte h pre-fijado.
- b) El peralte está pre-fijado por razones arquitectónicas o constructivas.

4,81 ALGUNAS CONSIDERACIONES SOBRE EL ACERO COMPRIMIDO

El análisis del empleo del refuerzo a compresión en vigas obliga a hallar una respuesta adecuada para cada una de las siguientes interrogantes:

1. *¿Cuándo se requiere estructuralmente refuerzo en la zona comprimida? ¿Son aconsejables estos diseños?*
2. *¿Se requiere imponer alguna restricción al peralto de estas secciones?*
3. *Para garantizar una adecuada ductilidad en el diseño y secciones con alta racionalidad ¿Cuál debe ser la contribución del hormigón para equilibrar el aporte del acero de tracción?*
4. *¿Cómo verificar si el acero en compresión entra o no en fluencia?*

Se revisarán a continuación las respuestas a estas interrogantes para conformar así los criterios de diseño que deben respetarse.

¿Cuándo se requiere estructuralmente refuerzo en la zona comprimida? ¿Son aconsejables estos diseños?

En realidad estos diseños se deben a restricciones de muy diversa índole que se le imponen al peralto de la sección, en ocasiones de tipo arquitectónicas y en otras de índole estructural. En general se trata de secciones poco peraltadas que pueden llegar a presentar inconvenientes con los estados límite de fisuración y deformación, y como tal deben tratarse. Se reconocen las bondades de las secciones poco peraltadas, incluso llegando al caso particular de la viga plana:

- Cuando se trate de vigas que forman parte de entrepisos, una reducción en su peralte se traducirá en una disminución de la altura total de la edificación, tanto mayor cuanto mayor sea la cantidad de niveles que presente la edificación. Esta reducción en la altura del edificio en sí mismo mejorará los índices técnico económicos de la cimentación y de los propios sistemas de arriostramiento para carga horizontal (marcos, diafragmas o tímpanos).
- En zonas de parqueo es conveniente asegurar los mayores gálivos, con lo cual se mejora su explotación. Esta realidad puede conducir al empleo de secciones poco peraltadas.
- Los entrepisos planos cada vez toman mayor auge y para alcanzarlos se puede recurrir al empleo de vigas planas que se oculten en el propio peralto de la losa.

Otras bondades pueden ser apuntadas, pero lo esencial es que se trata generalmente de vigas en las que pueden llegar a predominar los criterios de deformabilidad, más allá de los de resistencia, razones que justifican una adecuada selección del peralto.

Desde un punto de vista estructural las secciones con refuerzo en compresión por demanda de cálculo (fíjese que no se refiere explícitamente al refuerzo constructivo dispuesto en la zona de compresión de la sección, aunque muy bien pudiera considerarse), estas secciones se requieren en las siguientes situaciones, ambas dependientes:

- a. Cuando el momento actuante supera la contribución del hormigón correspondiente a las condiciones del fallo balanceado, es decir, cuando $M_u > \phi M_{lim}$
- b. Cuando el peralto útil que se disponga sea inferior al peralto mínimo: $d \leq d_{min}$.

¿Se requiere imponer alguna restricción al peralto de estas secciones?

Si se comprende que cuanto menor es el peralto mayor es la deformabilidad, algunos autores recomiendan acotarlo a partir de la siguiente condición:

Si no se trata del caso singular de vigas planas, debe proponerse un peralto que garantice al menos el cumplimiento de la desigualdad $M_u < 1,33\phi M_{lim}$, que se corresponde con las recomendaciones brindados sobre cuantía máxima a compresión en vigas

Es cierto que cuanto mayor sea la cuantía del refuerzo en compresión, mayor puede ser la reducción del peralto de la sección, pero cuando no se garantiza la condición anteriormente apuntada el exceso de refuerzo que se demanda es difícil de colocar, se sacrifican las separaciones mínimas entre barras, reduciéndose así el hormigón que las rodea, y se desarrolla un elevado grado de microfisuras que influye negativamente en la corrosión de la armadura.

Para garantizar una adecuada ductilidad en el diseño y secciones con alta racionalidad ¿Cuál debe ser la contribución del hormigón para equilibrar a la componente A_s del acero de tracción?

Con vistas a ofrecer argumentos adicionales sobre el uso del refuerzo comprimido en vigas, se resuelve la problemática de la búsqueda de secciones racionales a partir de lograr la menor cantidad de acero posible. En esta dirección y siguiendo el planteamiento de Perchat sobre la que llama optimización “matemática”, para secciones donde ambos aceros fluyen, y trabajando con las ecuaciones básicas:

$$\Sigma F = 0$$

$$0,85f_c' a \cdot b + f_y A_s' = f_y A_s$$

$$\omega_r = 0,85 \frac{a}{d} = \omega - \omega'$$

$\Sigma M = 0$ (respecto a A_s)

$$M_u = \phi [\omega_r (1 - 0,59\omega_r) b d^2 f_c' + f_y A_s' (d - d')]$$

$$\frac{M_u}{\phi b d^2 f_c'} = \omega_r (1 - 0,59\omega_r) + \omega' (1 - \frac{d'}{d})$$

Si se le llama a la cuantía total de la sección $\omega_t = \omega + \omega'$

Trabajando con las ecuaciones de equilibrio se obtiene:

$$\omega_t = \frac{\frac{M_u}{\phi b d^2 f_c'} - \omega_r \left[0,5 \left(1 + \frac{d'}{d} \right) - 0,59\omega_r \right]}{0,5 \left(1 - \frac{d'}{d} \right)}$$

En dicha expresión para valores de $\varepsilon_s < 0,005$, ϕ es variable y menor que 0,9 lo que hace mas importante esta frontera. Y plotados en la figura 4,20 para $\frac{d'}{d} = 0,1$ y el G-40, permite concluir que para lograr la menor cantidad de refuerzo en la sección, la mejor solución es colocar la cantidad de acero comprimido, que provoque que buscando que $\omega_r = \omega_{ra}$, donde ω_{ra} es el valor correspondiente a la condición de $\varepsilon_s = 0,005$. Por lo que se demuestra que las secciones más racionales garantizan también una alta ductilidad acorde con los más rigurosos requerimientos en este sentido.

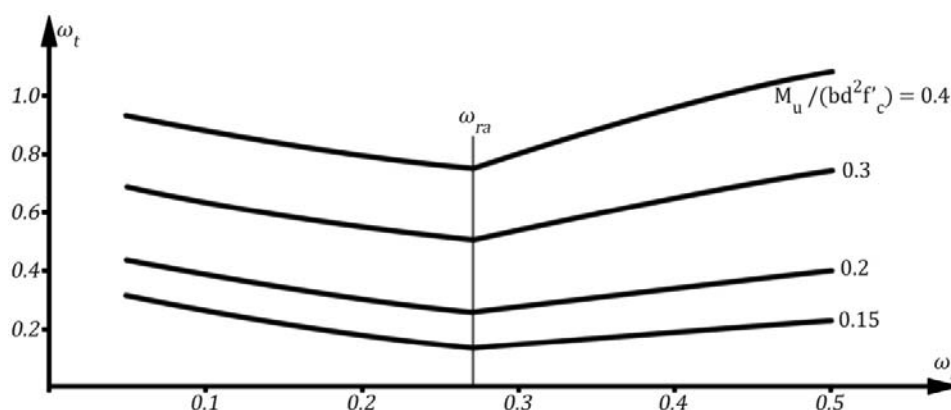


Figura 4,20: Valor de ω_r para cuantía total mínima para $d'/d=0,1$

En la Tabla 4.4 se ofrecieron los valores del **Momento específico del hormigón a compresión** correspondiente precisamente a la frontera de la tracción controlada.

¿Cómo verificar si el acero en compresión entra o no en fluencia?

Cuando se demande estructuralmente refuerzo en compresión el valor de c se prefiere fijar, según el párrafo anterior, como el correspondiente a la frontera de la tracción controlada, es decir, $c \leq 0,375d$, y para los recubrimientos normalmente utilizados los aceros nacionales generalmente fluyen, según se demuestra en los resultados de la tabla 4,5 y se muestra en la figura 4.21:

$$\frac{\varepsilon_s'}{c - d'} = \frac{0,003}{c}$$

$$\varepsilon_s' = 0,003 \frac{c - d'}{c} = 0,003 \frac{0,375d - d'}{0,375d}$$

$$\varepsilon_s' = 0,003 \frac{0,375 - \frac{d'}{d}}{0,375} = \left(3 - 8 \frac{d'}{d}\right) 10^{-3}$$

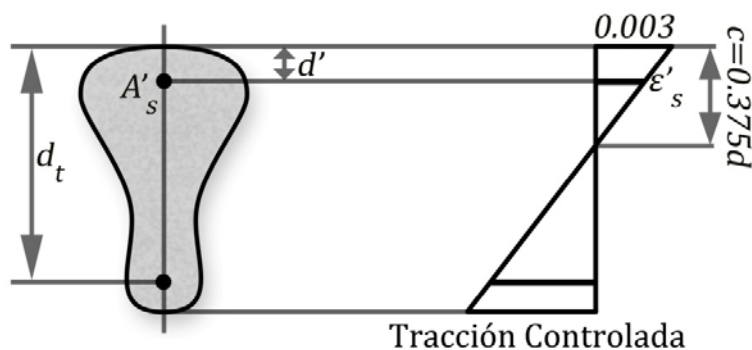


Figura 4.21: Frontera Tracción Controlada. Acero a compresión

TABLA 4,5: Variación de la deformación del acero en compresión con el recubrimiento para el caso en que $c = 0,375d$.

$\frac{d'}{d}$	ε_s'	G – 40 $\varepsilon_y = 0,0015 \quad f_y = 300MPa$	G – 60 $\varepsilon_y = 0,0021 \quad f_y = 420MPa$
0.05	0.0026	FLUYE ($\eta' = 1$)	FLUYE ($\eta' = 1$)
0.10	0.0022	FLUYE ($\eta' = 1$)	FLUYE ($\eta' = 1$)
0.15	0.0018	FLUYE ($\eta' = 1$)	NO FLUYE ($\eta' = 0,86$)
0.20	0.0014	NO FLUYE ($\eta' = 0,93$)	NO FLUYE ($\eta' = 0,67$)

Obsérvese que salvo para un recubrimiento realmente alto ($d' = 0,2d$) ninguno de los dos aceros nacionales que se emplean como armadura longitudinal alcanzan la fluencia, como tampoco sucede para el acero G – 60 con un recubrimiento igual a $d' = 0,15d$.

Sin embargo desde el punto de vista práctico, en un análisis donde se considere el aporte del refuerzo comprimido, si se comprueba que este no fluye lo más recomendable es despreciar su contribución en los cálculos.

Finalmente, como resumen, se pueden brindar las siguientes recomendaciones para el cálculo:

1. Si no se requiere refuerzo comprimido, A_s' , por cálculo:

$$M_u < \phi M_{ra} = \phi \omega_{ra} (1 - 0,59 \omega_{ra}) b d^2 f_c'$$

Lo mas económico es que $A_s' = 0$, por lo que se colocará lo requerido por las especificaciones,

$$A_s' = A_{s' min}$$

2. Si se requiere refuerzo comprimido, A_s' , por cálculo:

$$M_u > \phi M_{ra}$$

La menor cantidad total de acero se obtendrá para $\omega_r = \omega_{ra}$, con la menor área de refuerzo a compresión, calculada por:

$$A_s' \geq \frac{\frac{M_u}{\phi} - M_{ra}}{f_y(d - d')}$$

4,82 DISEÑO LIBRE

Este caso permite al proyectista alcanzar el diseño más acorde a sus criterios de racionalidad, economía y comportamiento de la sección.

Se fija como límite la condición de cuantía máxima que es:

$$\varepsilon_s \geq 0,004$$

Más exigente que la condición de que $\omega - \omega' \leq 0,75\omega_b$

Pero como para valores entre $0,005 > \varepsilon_s \geq 0,004$, $\phi < 0,9$, es preferible diseñar secciones donde $\varepsilon_s \geq 0,005$ o mas conservadoramente que cumplan que $\omega - \omega' \leq 0,5\omega_b$ asegurando entonces que $\phi = 0,9$.

Si se sabe que:

$$\omega_r = 0,85 \frac{a}{d} = 0,85 \frac{\beta_1 c}{d}$$

Entonces al valor de ω_r para la frontera en que $\varepsilon_s = 0,005$, $\frac{c}{d} = 0,375$, se le llamará ω_{ra} y se obtiene por:

$$\omega_{ra} = 0,85 \cdot \beta_1 \cdot 0,375 = 0,3188\beta_1$$

En función de la cuantía balanceada se puede determinar qué:

- Para el G-40 $\omega - \omega' \leq 0,563\omega_b = \omega_{ra}$ cuando $\varepsilon_s = 0,005$
- Para el G-60 $\omega - \omega' \leq 0,638\omega_b = \omega_{ra}$ cuando $\varepsilon_s = 0,005$

Si se puede elegir el valor de h y por tanto de d , el refuerzo A_s' no será necesario por cálculo y en la búsqueda de secciones dúctiles su aporte no será significativo por lo que se puede obviar. Solo se tomaría en cuenta si estuviera colocado por razones constructivas y tuviera un área apreciable.

El procedimiento recomendable se demuestra en el siguiente ejemplo:

Ejercicio 4.4

Diseñar la sección con las siguientes características:

$$b = 30cm$$

$$M_u = 380kN \cdot m$$

$$f_c' = 25MPa$$

$$f_y = 300MPa$$

Cálculos y discusión

1. Determinar las condiciones de trabajo.

El valor máximo de ω será $0,5\omega_b$, pero además se puede manejar criterios de valores de cuantías para las que la sección sea económica.

Estos valores dependen de los costos relativos de los materiales y pueden estimarse tentativamente entre:

$$\omega_{opt} = (0,2 \sim 0,4)\omega_b$$

Como demostración se tomará:

$$\omega = 0,25 \quad y \quad \omega' = 0$$

2. Cálculo del peralte h

De la ecuación de fuerzas y con el apoyo de la figura 4,22

$$\Sigma F = 0$$

$$0,85f_c'a \cdot b + f_s'A_s' = f_sA_s$$

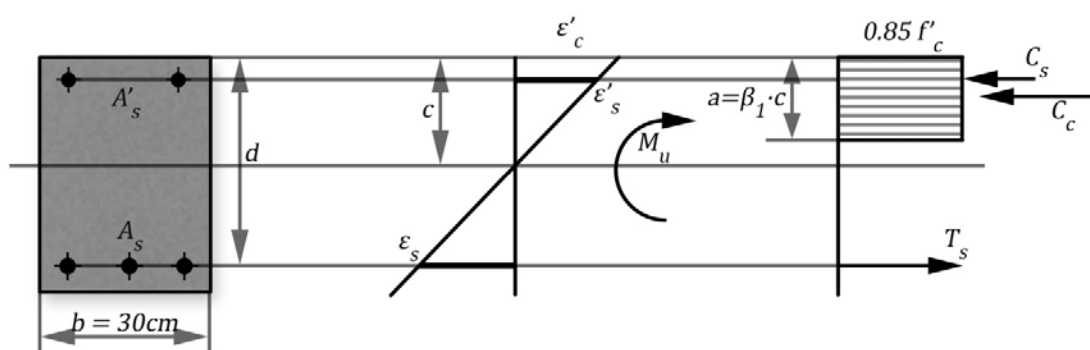


Figura: 4,22: Diagramas de deformaciones, tensiones y fuerzas. Sección rectangular. Ejercicio 5,4

Como no se tomará en cuenta el aporte de A'_s y se considerará $f_s = f_y$ la ecuación quedaría:

$$0,85f'_c a \cdot b = f_y A_s$$

Y en términos relativos:

$$0,85 \frac{a}{d} = \omega = \omega_r$$

$$\omega_r = \omega = 0,25$$

De la ecuación de momentos

$$M_u = \phi \omega_r (1 - 0,59 \omega_r) b d^2 f'_c$$

$$d = \sqrt{\frac{M_u}{\phi \omega_r (1 - 0,59 \omega_r) b f'_c}}$$

$$d = \sqrt{\frac{38000}{0,9 \cdot 0,25 (1 - 0,59 \cdot 0,25) 30 \cdot 2,5}} = 51,39 \text{ cm}$$

Redondeando a valores constructivos considerando 2 camadas: $d_s = 9 \text{ cm}$

$$d = 51 \text{ cm} \quad h = 60 \text{ cm}$$

3. Cálculo del refuerzo A_s

Calculando el valor de a

$$M_u = \phi 0,85 f'_c a \cdot b \left(d - \frac{a}{2} \right)$$

$$0,5a^2 - d \cdot a + \frac{M_u}{\phi 0,85 b f'_c} = 0$$

$$0,5a^2 - 51 \cdot a + \frac{38000}{0,9 \cdot 0,85 \cdot 30 \cdot 2,5} = 0$$

$$a = 15,27 \text{ cm}$$

Si se decide utilizar el valor de ω_r , que cambió ligeramente ante el ajuste de h

$$M_u = \phi \omega_r (1 - 0,59 \omega_r) b d^2 f'_c$$

$$0,59 \omega_r^2 - \omega_r + \frac{M_u}{\phi b d^2 f'_c} = 0$$

$$0,59 \omega_r^2 - \omega_r + \frac{38000}{0,9 \cdot 30 \cdot 51^2 \cdot 2,5} = 0$$

$$\omega_r = 0,255 > 0,25$$

Ya que $d < 51,39 \text{ cm}$ valor obtenido para $\omega_r = 0,25$

Finalmente de la ecuación de fuerzas:

$$0,85f_c' a \cdot b = f_y A_s$$

$$A_s = \frac{0,85f_c' a \cdot b}{f_y}$$

$$A_s = \frac{0,85 \cdot 25 \cdot 15,27 \cdot 30}{300} = 32,46 \text{ cm}^2$$

O utilizando los valores relativos

$$\omega = \omega_r = \frac{A_s f_y}{b d f_c'}$$

$$A_s = \omega \frac{b \cdot d f_c'}{f_y} = 0,255 \frac{30 \cdot 51 \cdot 25}{300} = 32,51 \text{ cm}^2$$

Estas barras se colocarán en dos camadas y el d_s real será de 88 mm , obtenidos en la Tabla A-8 de los anexos para un recubrimiento de 30 mm y estribos $N^\circ 10$. Valor menor que los 9 cm asumidos, factor que está del lado de la seguridad.

La gran ventaja del diseño libre para el proyectista es que permite un análisis de variantes de diseño más amplio y por tanto mayor cantidad de opciones en la búsqueda de la racionalidad, funcionabilidad y economía de la sección. Para el ejercicio que se desarrolla se muestra la siguiente tabla con los resultados de diferentes diseños, variando el peralte total de la sección. Se puede seleccionar la sección definitiva atendiendo a criterios como el área total de refuerzo, el número de camadas, la diferencia entre el área de cálculo y la real colocada, etc, en función de los puntos de vistas del calculista y los requerimientos concretos del elemento. Nótese como la ductilidad de las secciones va en aumento con el peralte y la disminución del recubrimiento.

Es importante hacer notar que en este tipo de diseño el peso propio de la viga no es un dato y por tanto será necesario incluirlo, como un elemento variable en los análisis de las variantes. En este ejemplo, buscando explicar la metodología como aspecto esencial no se tomó en cuenta este criterio, pero si en los cálculos que se reflejan en la tabla 4,6

TABLA 4,6: Variantes de peralte y refuerzo principal para el ejercicio 4,4

$h \text{ (cm)}$	$d_s \text{ (cm)}$	$d \text{ (cm)}$	$a \text{ (cm)}$	$c \text{ (cm)}$	ω_r	$A_s \text{ (cm}^2\text{)}$	$A_{real} \text{ (cm}^2\text{)}$		$DIF. \text{ (cm}^2\text{)}$
60	9	51	15,27	17,98	0,254	32,48	32.76	4 barras $N^\circ 32$	0,28
65	9	56	13,56	15,96	0,205	28,82	28.92	4 barras $N^\circ 25$, $3\Phi 19$	0,10
65	7	58	12,96	15,24	0,189	27,53	28.29	2 barras $N^\circ 36$, $1N^\circ 32$	0,76
70	9	61	12,26	14,42	0,170	26,05	26.4	2 barras $N^\circ 32$, $2N^\circ 25$	0,35
70	7	63	11,78	13,85	0,158	25,02	25.2	2 barras $N^\circ 36$, $1N^\circ 25$	0,18

Realizando una valoración de lo que representaría para la sección tomar en cuenta el refuerzo que necesariamente debe colocarse en la zona comprimida por razones constructivas, se hacen los siguientes cálculos.

Una vez calculados h y d se introduce el aporte de A_s' considerando que está formado por 2 barras N° 16 cuya área es $3,98 \text{ cm}^2$. Entonces a partir del tercer paso:

$$M_u = \phi \left[0,85f_c' a \cdot b \left(d - \frac{a}{2} \right) + f_y A_{real}' (d - d') \right]$$

$$0,5a^2 - d \cdot a + \frac{\frac{M_u}{\phi} - f_y A_{real}' (d - d')}{0,85bf_c'} = 0$$

$$0,5a^2 - 51 \cdot a + \frac{\frac{38000}{0,9} - 30 \cdot 3,98(51 - 4,75)}{0,85 \cdot 30 \cdot 2,5} = 0$$

$$a = 12,93 \text{ cm}$$

$$c = \frac{a}{\beta_1} = \frac{12,93}{0,85} = 12,93 \text{ cm}$$

Comprobando que $f_s' = f_y$

$$\varepsilon_s' = 0,003 \frac{c - d'}{c} = 0,0021 > \varepsilon_y = 0,0015$$

Por tanto se confirma la suposición anterior y finalmente de la ecuación de fuerzas:

$$0,85f_c' a \cdot b + f_y A_s' = f_y A_s$$

$$A_s = \frac{0,85f_c' a \cdot b + f_y A_s'}{f_y}$$

$$A_s = \frac{0,85 \cdot 25 \cdot 12,93 \cdot 30 + 3,98 \cdot 300}{300} = 31,45 \text{ cm}^2$$

Empleando las ayudas de cálculo, se obtiene el valor de:

$$\mu = \mu_r + \omega' \left(1 - \frac{d'}{d} \right)$$

$$\mu = \frac{M_u}{\phi b d^2 f_c'} = 0,216 \quad \omega' = \frac{A_s' f_y}{b d f_c'} = 0,0312 \quad \frac{d'}{d} = 0,1373$$

$$\mu_r = 0,216 - 0,0312(1 - 0,1373) = 0,1891$$

y en la TABLA A-2 se obtiene:

$$\omega_r = 0,217$$

y se da continuidad al problema

Como se aprecia la reducción no es muy notable, ratificándose las conclusiones obtenidas alrededor del análisis de las curvas reflejadas en la Figura 4,20, de que solo se hace importante el aporte de A_s' para secciones cercanas al fallo balanceado. Si este análisis se hubiera realizado para secciones con mayor peralte, entonces el refuerzo comprimido no fluiría, recomendándose no considerar su aporte.

4,83 DISEÑO CON PERALTO PRE-FIJADO.

Como se demostró en el ejemplo anterior la relación $d - \omega_r$ es insoluble, por lo que el prefijar el peralto condiciona las características del fallo. Entonces para poder influir sobre el diseño se acude a la colocación de refuerzo a compresión para garantizar que:

$$c \leq 0,375d \quad \omega_r = \omega - \omega' \leq \omega_{ra}$$

Cuando el peralte resulta un dato pueden presentarse varios enfoques en el diseño.

- Que no se requiera A_s' por cálculo, pues colocando solo refuerzo traccionado se garantiza que $c \leq 0,375d$ ó $\omega \leq \omega_{ra}$. El procedimiento es similar al explicado anteriormente, calculando a por la ecuación de momentos y colocando el A_s' mínimo.
- Que la condición anterior no se satisfaga y resulte imprescindible colocar refuerzo comprimido. En este caso se escoge la relación $\omega - \omega'$ lo que condicionará el fallo de la sección.
- Que exista un refuerzo A_s' por razones constructivas o de diseño, lo que condiciona el comportamiento y solo debe calcularse el valor de f_s' y de la relación $\omega - \omega'$.

A continuación un ejemplo del segundo caso que permita generalizar el procedimiento a seguir.

Ejercicio 4.5

$b = 30cm$	$h = 70cm$	$M_u = 640kN \cdot m$
$f_c' = 20MPa$ ($\beta_1 = 0,85$)		$f_y = 420MPa$

Cálculos y discusión

1. Comprobación inicial

Para el ejercicio en desarrollo, considerando $d_s = 9cm$, estimando 2 capas de refuerzo y conociendo que el recubrimiento efectivo es de $30mm$, la comprobación principal consiste en comparar con el momento de cálculo M_u con M_{ra} , frontera en que se produce un cambio en el comportamiento de la sección:

$$M_{ra} = \omega_{ra}(1 - 0,59\omega_{ra})bd^2f_c'$$

Donde ω_{ra} cuantía para la frontera del predominio de la tracción

$$\omega_{ra} = 0,85\beta_1 0,375 = 0,271$$

$$M_{ra} = 0,271(1 - 0,59 \cdot 0,271)30 \cdot 59^2 \cdot 2 = 50820,1 = 508,2kN \cdot m$$

Como $M_u > \phi M_{ra}$, entonces $\omega > \omega_{ra}$ por lo que se requerirá refuerzo a compresión, en una magnitud tal que garantice que el fallo, de producirse, sea en tracción controlada.

Comprobando el valor límite de acero a compresión máximo por:

$$M_u < \phi M_{lim} = 0,9[1,33(0,333bd^2f_c')]$$

$$M_u < \phi M_{lim} = 0,9[1,33(0,333 \cdot 30 \cdot 61^2 \cdot 2)] = 89192,4 = 891,92kN \cdot m$$

2. Cálculo de A_s'

Partiendo del criterio de fijar A_s' , se escoge la condición de fallo

$$\omega_r = \omega - \omega' \leq \omega_{ra} = 0,271$$

Entonces de la ecuación de momentos

$$M_u = \phi[M_{ra} + f_y A_s'(d - d')]$$

$$A_s' = \frac{\frac{M_u}{\phi} - M_{ra}}{f_y(d - d')}$$

$$A_s' = \frac{\frac{64000}{0,9} - 50820}{42(61 - 7)} = 8,42cm^2$$

Nótese que se considera que el recubrimiento del acero a compresión es de 7cm , como regla conservadora, pero apropiado para el paso de selección de este. El valor obtenido debe llevarse a área de acero real, para el ejemplo $A'_{real} = 8,52\text{cm}^2$ (3 barras N°19) con un valor real de $d' = 4,9\text{cm}$, lo que hará disminuir ligeramente el valor de ω_r .

3. Cálculo de A_s

Calculando a para el cambio introducido al colocar el refuerzo A'_{real}

$$M_u = \phi \left[0,85f'_c a \cdot b \left(d - \frac{a}{2} \right) + f_y A'_{real} (d - d') \right]$$

$$0,5a^2 - d \cdot a + \frac{\frac{M_u}{\phi} - f_y A'_{real} (d - d')}{0,85bf'_c} = 0$$

$$0,5a^2 - 61 \cdot a + \frac{\frac{64000}{0,9} - 42 \cdot 8,52(61 - 4,9)}{0,85 \cdot 30 \cdot 2} = 0$$

$$a = 18,99\text{cm}$$

$$c = \frac{a}{\beta_1} = \frac{18,88}{0,85} = 22,34\text{cm}$$

Comprobando que $f'_s = f_y$

$$\varepsilon'_s = 0,003 \frac{c - d'}{c} = 0,00234 > \varepsilon_y = 0,0015$$

Si se decide otro procedimiento, se puede calcular el valor de ω_r , que cambió ligeramente ante el ajuste de h

$$M_u = \phi [\omega_r (1 - 0,59\omega_r) b d^2 f'_c + f_y A'_{real} (d - d')]$$

$$0,59\omega_r^2 - \omega_r + \frac{\frac{M_u}{\phi} - f_y A'_{real} (d - d')}{b d^2 f'_c} = 0$$

$$0,59\omega_r^2 - \omega_r + \frac{\frac{64000}{0,9} - 42 \cdot 8,52(61 - 4,9)}{30 \cdot 61^2 \cdot 2} = 0$$

$$\omega_r = 0,265 < \omega_{ra}$$

Si se emplean las ayudas de cálculo, se obtiene el valor de:

$$\mu = \mu_r + \omega' \left(1 - \frac{d'}{d} \right)$$

$$\mu = \frac{M_u}{\phi b d^2 f'_c} = 0,3185 \quad \omega' = \frac{A'_s f_y}{b d f'_c} = 0,098 \quad \frac{d'}{d} = 0,115$$

$$\mu_r = 0,3185 - 0,098(1 - 0,115) = 0,2317$$

y en la TABLA A-2 se obtiene

$$\omega_r = 0,265$$

y se da continuidad al problema

Y finalmente de la ecuación de fuerzas:

$$0,85f'_c a \cdot b + f_y A'_s = f_y A_s$$

$$A_s = \frac{0,85f'_c a \cdot b + f_y A'_s}{f_y}$$

$$A_s = \frac{0,85 \cdot 20 \cdot 18,99 \cdot 30 + 8,52 \cdot 420}{420} = 31,58\text{cm}^2 \quad (4 \text{ barras N}^\circ 32)$$

Aquí sería útil una reflexión sobre la importancia de atender la elección del número de barras, o sea la relación $A_{s,cálculo}$ y A_{real} . Si en vez del área colocada fuera necesario colocar 7 barras N° 25, siendo $A_{real} = 35,7\text{cm}^2$, entonces el valor de c sería:

$$a = \frac{f_y(A_s - A_s')}{0,85bf_c'} = \frac{420(35,7 - 8,52)}{0,85 \cdot 20 \cdot 30} = 22,38\text{cm}$$

$$c = \frac{a}{\beta_1} = \frac{22,38}{0,85} = 26,33\text{cm}$$

Valor mayor que $0,375d = 22,88\text{cm}$ por lo que los cálculos anteriores no serían válidos, ya que $\phi < 0,9$

Comprobando el verdadero valor de momento último de la sección:

$$M_n = 0,85f_c' a \cdot b \left(d - \frac{a}{2} \right) + f_y A_s' (d - d')$$

$$M_n = 0,85 \cdot 2 \cdot 22,38 \cdot 30 \left(61 - \frac{22,38}{2} \right) + 8,56 \cdot 42(61 - 4,9)$$

$$M_n = 76929\text{kN} \cdot \text{cm} = 769,29\text{kN} \cdot \text{m}$$

Y como:

$$\phi = 0,227 + \frac{0,242}{\frac{c}{d}}$$

$$\phi = 0,227 + \frac{0,242}{\frac{26,33}{61}} = 0,81$$

Entonces el momento resistente de cálculo de la sección será:

$$M_u = \phi M_n = 0,81 \cdot 769,29 = 623,09\text{kN} \cdot \text{m}$$

Menor que el actuante, por lo que se concluye que aunque se coloca más refuerzo, al provocarse una caída en la ductilidad y del valor del coeficiente de reducción de la capacidad resistente de la sección, ϕ , la sección no resiste el momento actuante de 640kN.m . La solución en estos casos sería colocar mayor cantidad de refuerzo comprimido

Como se explicó en el epígrafe 4,81 al abordarse el aporte del refuerzo comprimido para grandes recubrimientos de este y sobre todo para el G—60 se produce el caso que $\varepsilon_s' < \varepsilon_y$ incluso en la zona de transición. Por tanto es posible que al diseñar una acción se presente la situación contradictoria de que se requiere A_s' por cálculo y este no alcance su máxima capacidad portante.

En este caso se recomienda el siguiente procedimiento para calcular el A_s' requerido

- a) Comprobar si para la frontera de la tracción controlada ($c_t = 0,375d$) el acero comprimido fluye

$$\varepsilon_a = 0,003 \frac{c_t - d'}{c_t}$$

Si $\varepsilon_a < \varepsilon_y$

calcular

$$f_s' = \varepsilon_a E_s$$

- b) Cálculo de A_s' tomando en cuenta el valor de f_s' para esta frontera

$$A_s' = \frac{\frac{M_u}{\phi} - M_{ra}}{f_s'(d - d')}$$

c) En el cálculo de A_s se puede considerar conservadoramente que

$$c = c_t = 0,375d \quad a_t = \beta_1 c_t$$

Y el valor de f_s' obtenido anteriormente por lo que de la ecuación de fuerza

$$A_s = \frac{0,85f_c' a_t \cdot b + f_s' A_s'}{f_y}$$

Una alternativa más precisa es calcular el verdadero valor de c de la sección cuando se coloca el A'_{real} ante la problemática de que no fluye.

El procedimiento se demuestra en el siguiente ejercicio

Ejercicio 4,6

$$b = 30\text{cm}$$

$$h = 50\text{cm}$$

$$M_u = 250\text{kN} \cdot \text{m}$$

$$f_c' = 20\text{MPa} \quad (\beta_1 = 0,85) \quad f_y = 420\text{MPa}$$

$$(AGRESIVIDAD BAJA) \quad r = 30\text{mm}$$

Cálculos y discusión

Cálculo del acero a compresión

$$c_t = 0,375d = 16,125\text{cm}$$

$$\omega_{ra} = 0,271$$

$$M_{ra} = \omega_{ra}(1 - 0,59\omega_{ra})bd^2 f_c' = 252,53\text{kN} \cdot \text{m}$$

$$\varepsilon_a = 0,003 \frac{c_t - d'}{c_t} = 0,0017 < \varepsilon_y$$

$$f_s' = \varepsilon_a E_s = 339,54\text{MPa} < f_y$$

Obteniendo A_s' para esta tensión actuante

$$A_s' = \frac{\frac{M_u}{\phi} - M_{ra}}{f_s'(d - d')} = 3,88\text{cm}^2$$

$$\text{Colocándose: } A'_{real} = 3,98\text{cm}^2, \quad d' = 4,76\text{cm}$$

Cálculo de A_s

$$\text{Asumiendo que } c = c_t = 0,375d$$

$$a_t = \beta_1 c_t = 13,71\text{cm}$$

Y finalmente de la ecuación de fuerzas:

$$A_s = \frac{0,85f_c' a_t \cdot b + f_s' A_s'}{f_y}$$

$$A_s = \frac{0,85 \cdot 20 \cdot 13,71 \cdot 30 + 33,95 \cdot 3,98}{42} = 19,86\text{cm}^2$$

Un análisis más preciso obliga a calcular el verdadero valor de c , por tanto

$$M_u = \phi \left[0,85f_c' \beta_1 c \cdot b \left(d - \frac{\beta_1 c}{2} \right) + f_s' A'_{real}(d - d') \right]$$

Y como

$$f_s' = \varepsilon_s' E_s = 0,003 \frac{c - d'}{c} E_s$$

$$M_u = \phi \left[0,85f_c' \beta_1 c \cdot b \left(d - \frac{\beta_1 c}{2} \right) + 0,003 \frac{c - d'}{c} E_s A'_{real} (d - d') \right]$$

Ecuación que puede plantearse de la forma

$$0,5\beta_1 c^3 - d \cdot c^2 + \frac{\frac{M_u}{\phi} - 0,003 E_s A'_{real} (d - d')}{0,85 b \beta_1 f_c'} c + \frac{0,003 E_s A'_{real} (d - d') d'}{0,85 b \beta_1 f_c'} = 0$$

Resultado $c = 14,97 \text{ cm}$, obviamente menor que el calculado anteriormente

$$a = \beta_1 c = 12,72 \text{ cm}$$

Entonces

$$\varepsilon_s' = 0,003 \frac{c - d'}{c} = 0,00205 < \varepsilon_y$$

$$f_s' = \varepsilon_s' E_s = 409,35 \text{ MPa} < f_y$$

$$A_s = \frac{0,85 f_c' a \cdot b + f_s' A_s'}{f_y} = 19,33 \text{ cm}^2$$

Menor que el calculado de forma simplificada. Los resultados del procedimiento simplificado se alejarán más del obtenido de forma precisa en la medida que el valor de A'_{real} se aleje del requerido.

Estos análisis hacen recomendar no usar refuerzo G-60 en vigas poco peraltas donde la relación $\frac{d'}{d} \geq 0,15$.

El procedimiento general explicado en el ejercicio resulta válido para cuando A_s' está prefijado, comenzando por el paso 3 y allí chequear que $\omega - \omega' = \omega_r \leq \omega_{ra}$ y que $\varepsilon_s' < \varepsilon_y$, semejante al seguido en el ejercicio 4,4 cuando se tomó en cuenta el refuerzo A_s' .

Esta práctica resulta importante en el diseño de vigas continuas las que están sometidas a momentos positivos, en la fibra inferior, y negativos en la superior. Por tanto al diseñar las secciones de este tipo siempre se debe tomar en cuenta el refuerzo calculado en las demás, lo que podrá apreciarse en el siguiente ejemplo:

Ejercicio 4,7

Diseñe la sección sobre el apoyo de la viga continua que se muestra en la figura 4,23, considerando que del diseño de la sección central y del despiezo llegan al apoyo 2 barras N°25, $A'_{real} = 10,2 \text{ cm}^2$, $d' = 5,23 \text{ cm}$

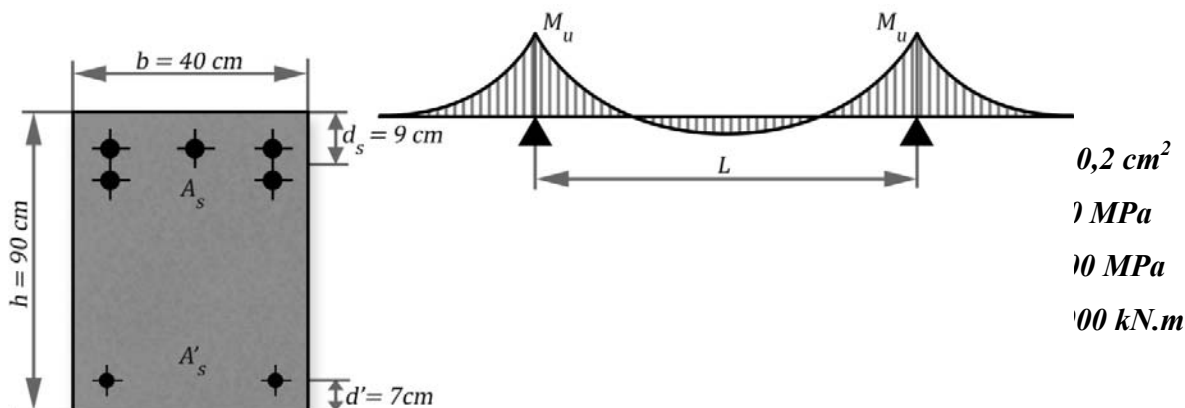


Figura 4,23: Datos generales. Ejercicio 4,7

Cálculos y discusión

Siguiendo un proceder semejante al ejercicio 4,3, se calcula el valor a y se comprueba el comportamiento de la sección:

$$M_u = \phi \left[0,85 f_c' a \cdot b \left(d - \frac{a}{2} \right) + f_y A'_{real} (d - d') \right]$$

$$0,5a^2 - d \cdot a + \frac{\frac{M_u}{\phi} - f_y A'_{real} (d - d')}{0,85 b f_c'} = 0$$

$$0,5a^2 - 81 \cdot a + \frac{\frac{90000}{0,9} - 30 \cdot 10,2 (81 - 5,23)}{0,85 \cdot 30 \cdot 2} = 0$$

$$a = 15,41 \text{ cm}$$

$$c = \frac{a}{\beta_1} = \frac{15,41}{0,85} = 18,13 \text{ cm}$$

$c < c_t = 0,375d = 31,13 \text{ cm}$, por tanto se garantiza el fallo dúctil de la sección, que está en tracción controlada y se ratifica que $\phi = 0,9$

Comprobando que $f_s' = f_y$

$$\varepsilon_s' = 0,003 \frac{c - d'}{c} = 0,0021 > \varepsilon_y = 0,0015$$

Si se emplean las ayudas de cálculo, se obtiene el valor de:

$$\mu = \mu_r + \omega' \left(1 - \frac{d'}{d} \right)$$

$$\mu = \frac{M_u}{\phi b d^2 f_c'} = 0,1905 \quad \omega' = \frac{A_s' f_y}{b d f_c'} = 0,0472 \quad \frac{d'}{d} = 0,086$$

$$\mu_r = 0,1905 - 0,0472 (1 - 0,086) = 0,1474$$

y en la TABLA A-2 se obtiene

$$\omega_r = 0,163$$

y se da continuidad al problema

Y finalmente de la ecuación de fuerzas:

$$A_s = \frac{0,85 f_c' a_t \cdot b + f_s' A_s'}{f_y}$$

$$A_s = \frac{0,85 \cdot 20 \cdot 15,41 \cdot 30 + 300 \cdot 10,2}{300} = 45,13 \text{ cm}^2$$

Se colocarían 9 barras N°25 que hacen un $A_{real} = 45,9 \text{ cm}^2$. En una primera camada se situarían 5 barras y en una segunda las 4 restantes. El recubrimiento mecánico real es de 87,6mm, obtenido de la tabla A-8 para las condiciones del ejemplo, menor por lo que está del lado de la seguridad. Además debe aclararse que la tabla A-8 de los anexos brinda recubrimientos considerando el mismo número de barras en cada camada lo que en este caso no es exacto, ya que al tener más barras en la primera camada el recubrimiento será menor.

Ejercicio 4,8

En el siguiente ejercicio se evalúan diferentes soluciones con refuerzo comprimido desde la mínima hasta la máxima, con vista a realizar un análisis comparativo que complemente las recomendaciones

ofrecidos sobre el empleo de este en los diseños a flexión. Son vigas prefabricadas situadas en zonas de agresividad MEDIA.

$$b = 30\text{cm} \quad h = 65\text{cm} \quad M_u = 550\text{kN} \cdot \text{m}$$

$$f_c' = 25\text{MPa} \quad (\beta_1 = 0,85) \quad f_y = 300\text{MPa}$$

Cálculos y discusión

- *Refuerzo comprimido mínimo*

$$\omega_{ra} = 0,85\beta_1 0,375 = 0,271, \text{ y considerando 2 camadas y } d_s = 9\text{cm}$$

$$M_{ra} = \omega_{ra}(1 - 0,59\omega_{ra})bd^2f_c'$$

$$M_{ra} = 0,271(1 - 0,59 \cdot 0,271)30 \cdot 56^2 \cdot 2,5 = 53537,9 = 535,38\text{kN} \cdot \text{m}$$

Como $M_u > \phi M_{ra}$, entonces $\omega > \omega_{ra}$ por lo que se requerirá refuerzo a compresión.

$$A_s' = \frac{\frac{M_u}{\phi} - M_{ra}}{f_y(d - d')}$$

$$A_s' = \frac{\frac{55000}{0,9} - 53938}{30(56-7)} = 5,15\text{cm}^2$$

Colocando 2 barras N°19 y completando los cálculos que se reflejan en la siguiente tabla, donde se buscan varias soluciones entre esta, la de A_s' mínima y la máxima.

- *Refuerzo comprimido máximo*

Conociendo que el valor límite es:

$$M_u < \phi M_{lim} = 0,9[1,33(0,333bd^2f_c')] = 93962,4\text{kN} \cdot \text{m}$$

Entonces la cantidad máxima de A_s' será:

$$M_a' = 0,9[0,33(0,333 \cdot 30 \cdot 61^2 \cdot 2)] = 232,62\text{kN} \cdot \text{m}$$

$$A_s' = \frac{M_a'}{f_y(d - d')} = \frac{23262}{30(56 - 7)} = 15,82\text{cm}^2$$

Colocando para esta situación 2 barras N°25 y 2 N°19:

Del análisis de estos resultados resaltan dos alternativas:

- Variante de refuerzo total menor, que se logra con el menor A_s' que debe resultar la más económica.
- Variantes mas dúctiles, alcanzadas con el mayor A_s' , lo que puede apreciarse al comparar los valores de ω_r y a

Y como siempre la decisión final estará en manos del proyectista en función de las exigencias del proyecto.

Estas alternativas se ilustran en la figura 4,24, representándose la contradicción entre economía y ductilidad.

TABLA 4,7: Variantes de refuerzo comprimido y principal para el ejercicio 4,8

$A_s'(cm^2)$		$d'(cm)$	ω'	ω_r	$a(cm)$	$A_s(cm^2)$	$A_{real}(cm^2)$		$A_{total-teórica}(cm^2)$	$A_{total-real}(cm^2)$
5.68	2barras N°19	4,94	0.0406	0.2661	17,38	42.61	43.08	4 N°36, 1N°19	48,21	48.76
7.74	2 N°22	5,57	0.0553	0.2476	16,17	42.11	43.08	4 N°36, 1N°19	49,85	50.82
10.2	2 N°25	5,73	0.0729	0.2263	14,75	41.55	42.23	4 N°36, 1N°16	51,75	52.43
15.3	3 N°25	5,73	0.1093	0.1842	11,92	40,64	40,95	5 N°32	55,94	56.25
15.88	2 N° 25, 2 N°19	5,73	0.1134	0.1796	11,61	40,56	40,95	5 N°32	56,44	56,83

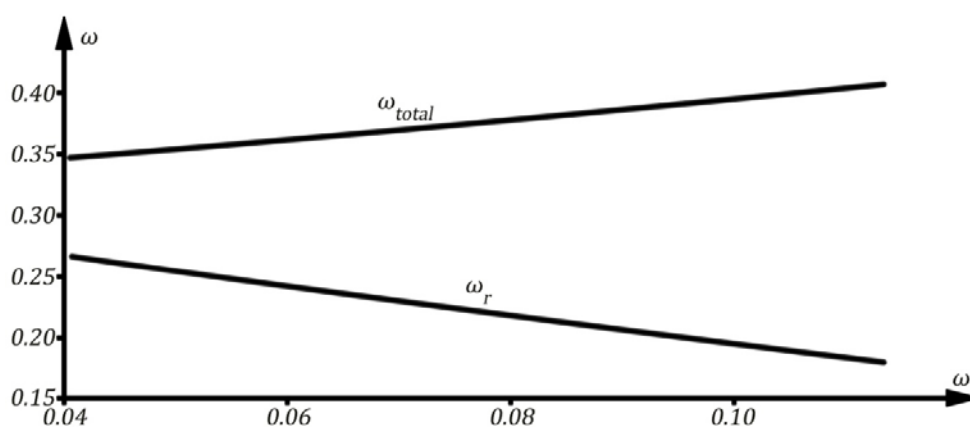


Figura 4,24: Relación entre el refuerzo a compresión, el refuerzo total de la sección y la ductilidad

4,9 SECCIONES T.

Las vigas con secciones transversales en forma T son muy comunes en elementos de Hormigón Armado, ya sea por formar parte de conjuntos monolíticos de cubiertas o entrepisos o por ser vigas aisladas que tienen esta forma, buscando aprovechar mejor las características resistentes de la sección. En la Figura 4,25 se muestran estos dos casos graficándose como se conforma la sección T en las vigas monolíticas de conjunto con la losa.

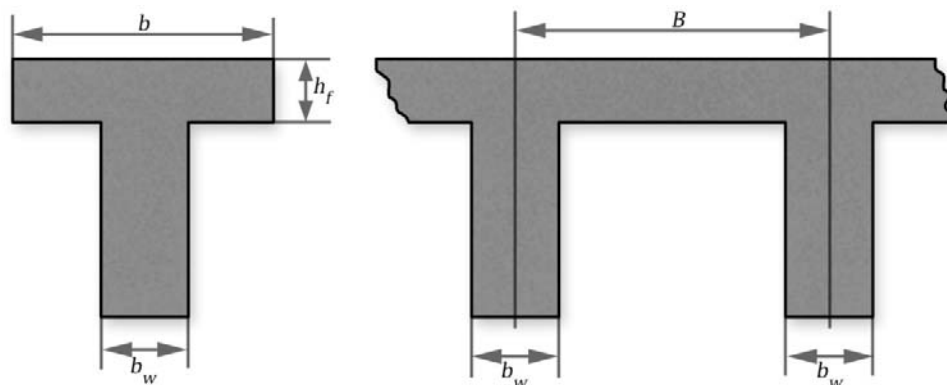


Figura 4,25: Vigas T aisladas y múltiples

4.9.1 ANCHO EFECTIVO DEL ALA.

El primer problema a resolver en el cálculo de secciones T es la definición del ancho a considerar en el ala comprimida, problema que se hace capital en el caso de vigas monolíticas. Los esfuerzos a compresión a que está sometida esta zona son variables, siendo menores a medida que la sección se aleja del alma de la viga (ver Figura 4.26). sin embargo desde el punto de vista práctico se sustituye este ancho comprimido real por un **ancho efectivo del ala (b)** que depende básicamente del la luz efectiva de la viga (l_e) y del espesor del ala.

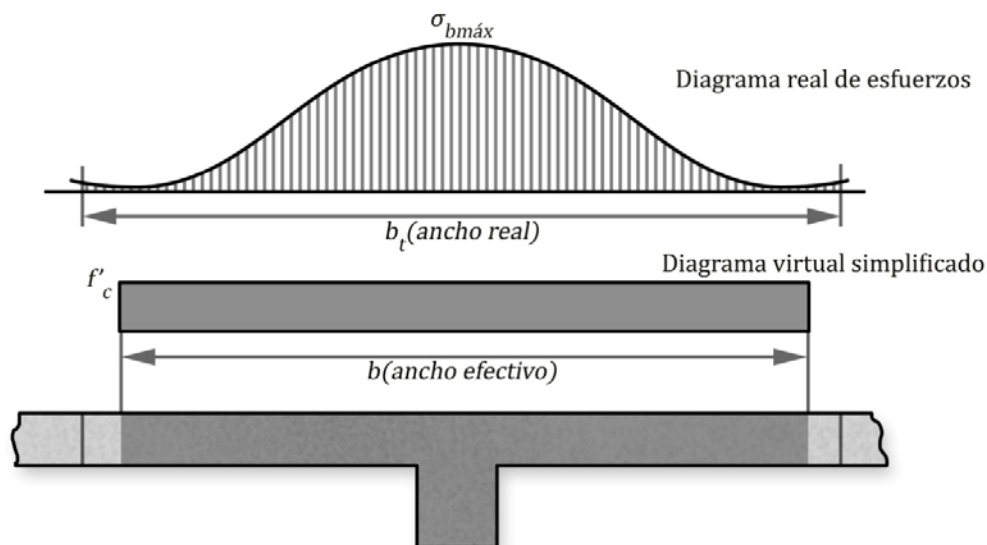


Figura 4.26: Ancho eficaz del ala (b)

A continuación se brindan las recomendaciones adoptadas por la NC para la determinación del b . Se toma el menor de las siguientes dimensiones

- VIGAS MONOLÍTICAS SIMÉTRICAS

$$\begin{aligned} & \frac{l_e}{4} \\ & 16h_f + b_w \\ & \frac{B}{2} \end{aligned}$$

- VIGAS MONOLÍTICAS CON LOSA A UN SOLO LADO.

$$\begin{aligned} & \frac{l_e}{12} \\ & 6h_f + b_w \\ & \frac{B}{2} \end{aligned}$$

- VIGAS AISLADAS

$$\begin{aligned} & b \leq b_w \\ & h_f \geq 0,5b_w \end{aligned}$$

4.9.2 ECUACIONES GENERALES

En secciones T se pueden presentar dos casos, desde el punto de vista del comportamiento de la sección (ver Figura 4,27):

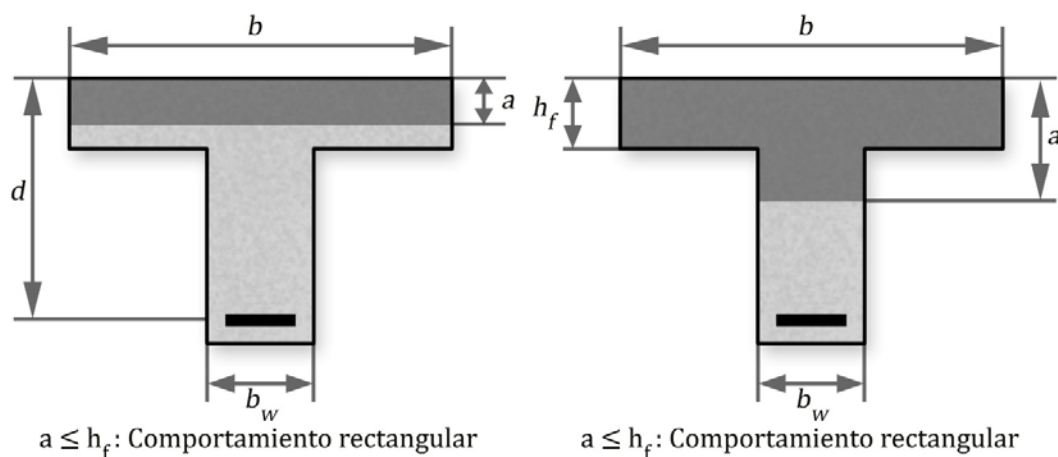


Figura 4,27: Comportamiento secciones T

- Cuando el bloque de compresiones está contenido en el ala superior y por tanto la sección se comporta como si fuera una sección rectangular con ancho b .
- Cuando la altura del bloque de compresiones sobrepasa el espesor del ala y afecta a parte del alma de la sección.

Entonces si:

$$a \leq h_f$$

COMPORTAMIENTO RECTANGULAR

$$a > h_f$$

COMPORTAMIENTO T

En el primer caso el cálculo es similar al explicado para una sección rectangular, en el segundo para la solución de las ecuaciones de equilibrio se procede a dividir el aporte del área comprimida de hormigón en dos bloques, como se muestra en la figura 4,28.

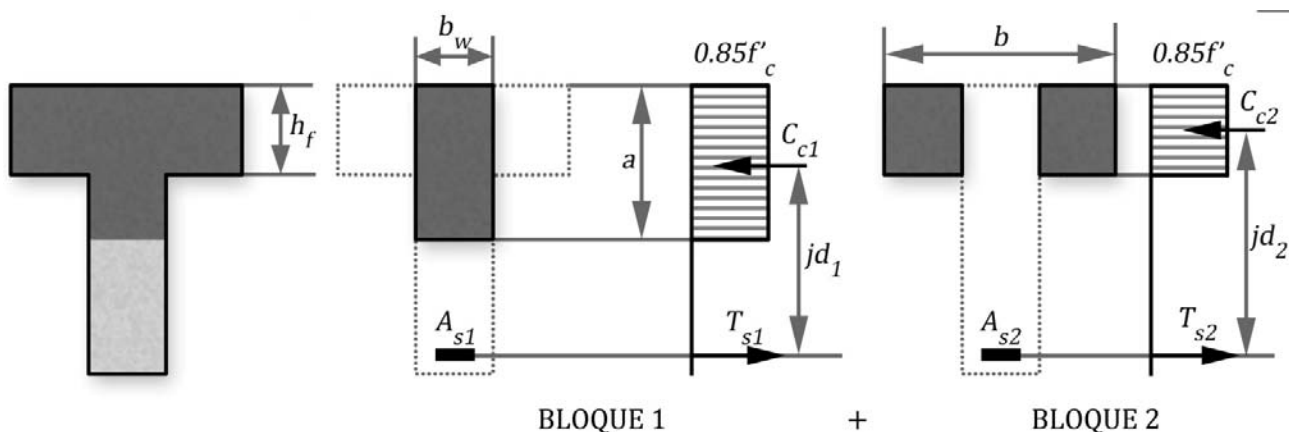


Figura 4,28: Diagrama de tensiones y fuerzas en secciones T

En general se parte de no considerar el aporte del refuerzo comprimido, inexistente o poco significativo en este tipo de secciones.

$$\Sigma F = 0$$

$$C_c = T_s$$

$$C_c = C_{c1} + C_{c2}$$

$$C_{c1} = 0,85f_c' b_w a$$

$$C_{c2} = 0,85f_c' h_f (b - b_w)$$

aporte del bloque comprimido del alma

aporte del ala

Finalmente la ecuación de fuerzas:

$$0,85f_c' b_w a + 0,85f_c' h_f (b - b_w) = f_y A_s$$

Y se le llama:

$$\omega_a = \frac{A_s f_y}{b_w d f_c'}$$

$$Y = \frac{h_f (b - b_w)}{b_w d}$$

En términos relativos, la ecuación quedaría:

$$0,85 \frac{a}{d} + 0,85Y = \omega_a$$

$$\omega_r = 0,85 \frac{a}{d} = \omega_a - 0,85Y$$

$\Sigma M = 0$ (respecto a A_s)

$$M_u = \phi (C_{c1} \cdot jd_1 + C_{c2} \cdot jd_2)$$

Donde:

$$jd_1 = d - \frac{a}{2}$$

$$jd_2 = d - \frac{h_f}{2}$$

$$X = \frac{h_f (b - b_w) \left(d - \frac{h_f}{2} \right)}{b_w d^2} = Y \left(1 - \frac{h_f}{2d} \right)$$

Finalmente:

$$M_u = \phi \left[0,85f_c' a \cdot b_w \left(d - \frac{a}{2} \right) + 0,85f_c' h_f (b - b_w) \left(d - \frac{h_f}{2} \right) \right]$$

Dividiendo entre $b_w d^2 f_c'$

$$\mu_t = \frac{M_u}{\phi b_w d^2 f_c'} = 0,85 \frac{a}{d} \left(1 - 0,5 \frac{a}{d} \right) + 0,85X$$

En función de ω_r

$$\mu_t = \frac{M_u}{\phi b_w d^2 f_c'} = \omega_r (1 - 0,59\omega_r) + 0,85X$$

4,9,3 COMPROBACIÓN DE SECCIONES T

El procedimiento a seguir parte, en primer lugar, de determinar si la sección tiene comportamiento rectangular ó T. Suponiendo que la sección tiene comportamiento rectangular se calcula la posición de la línea neutra:

$$0,85f'_c'ba = f_yA_s$$

$$a = \frac{f_yA_s}{0,85f'_c'b}$$

Entonces se comprueba si:

$$a \leq h_f$$

COMPORTAMIENTO RECTANGULAR. Y se procede a calcular el M_u para una sección rectangular común como se explico en 4,5

$$a > h_f$$

COMPORTAMIENTO T

Procedimiento que se ejemplifica en el siguiente ejercicio

Ejercicio 4,9

La sección prefabricada, que se muestra en la Figura 4,29, está situada en una zona de agresividad BAJA, con las características que se brindan a continuación, obtenga el M_u

$$b = 30\text{cm}$$

$$h = 55\text{cm}$$

$$b_w = 10\text{cm}$$

$$h_f = 10\text{cm}$$

$$A_s = 20,4\text{cm}^2$$

$$f_y = 300\text{MPa}$$

$$d_s = 7\text{cm}$$

$$f'_c = 20\text{MPa} (\beta_1 =$$

$$0,85)$$

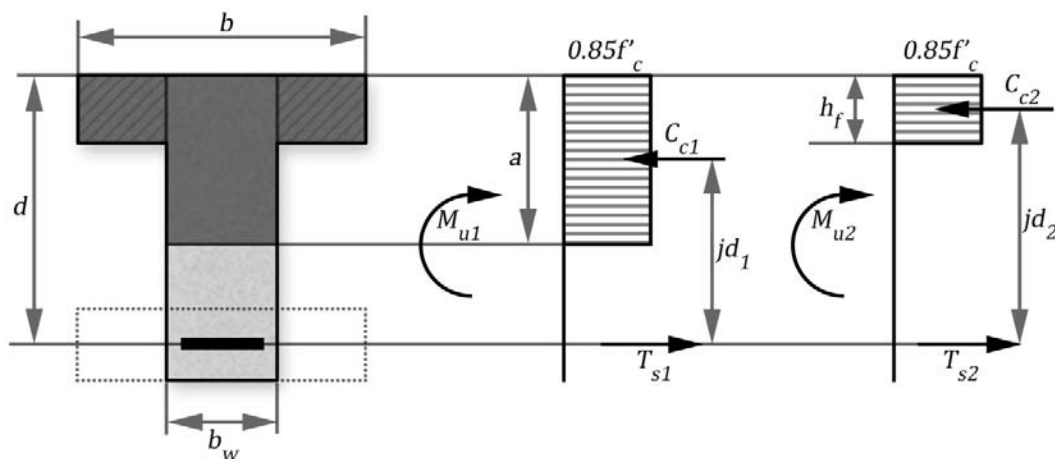


Figura 4,29: Diagrama tensiones y fuerzas. Sección T. Ejercicio 4,9

Cálculos y discusión

1. Determinación del comportamiento,

Calculando la posición de la línea neutra al considerar la sección como rectangular:

$$0,85f'_c'ba = f_yA_s$$

$$a = \frac{f_yA_s}{0,85f'_c'b}$$

$$a = \frac{300 \cdot 20,4}{0,85 \cdot 20 \cdot 30} = 12cm$$

Entonces

$$a = 12cm > h_f = 10cm \quad \text{COMPORTAMIENTO T.}$$

2. Cálculo de a para COMPORTAMIENTO T.

$$a = \frac{f_y A_s - 0,85 f_c' h_f (b - b_w)}{0,85 f_c' b_w}$$

$$a = \frac{300 \cdot 20,4 - 0,85 \cdot 20 \cdot 10(30 - 10)}{0,85 \cdot 20 \cdot 10} = 16cm$$

$$c = \frac{a}{\beta_1} = \frac{16}{0,85} = 18,82cm$$

3. Cálculo de M_u .

$$M_n = 0,85 f_c' a \cdot b_w \left(d - \frac{a}{2} \right) + 0,85 f_c' h_f (b - b_w) \left(d - \frac{h_f}{2} \right)$$

$$M_n = 0,85 \cdot 2 \cdot 16 \cdot 10 \left(48 - \frac{16}{2} \right) + 0,85 \cdot 2 \cdot 16(30 - 10) \left(48 - \frac{10}{2} \right) = 25500$$

$$= 255kN \cdot m$$

Como:

$$c > 0,375d = 17,25cm \quad \phi < 0,9 \text{ y se calculará por la expresión:}$$

$$\phi = 0,329 + \frac{0,214}{\frac{c}{d}}$$

$$\phi = 0,329 + \frac{0,214}{\frac{18,82}{48}} = 0,875$$

$$M_u = \phi M_n$$

$$M_u = 0,875 \cdot 255 = 223,05kN \cdot m$$

o en función de ω_r

$$\frac{M_u}{\phi b_w d^2 f_c'} = \omega_r (1 - 0,59 \omega_r) + 0,85X$$

$$M_u = \phi b_w d^2 f_c' [\omega_r (1 - 0,59 \omega_r) + 0,85X]$$

Donde:

$$\omega_r = 0,85 \frac{a}{d} = 0,85 \frac{16}{48} = 0,283$$

$$X = \frac{h_f (b - b_w) \left(d - \frac{h_f}{2} \right)}{b_w d^2}$$

$$X = \frac{10(30 - 10) \left(48 - \frac{10}{2} \right)}{1048^2} = 0,373$$

$$M_u = 0,875 \cdot 10 \cdot 48^2 \cdot 2 [0,283(1 - 0,59 \cdot 0,283) + 0,85 \cdot 0,373]$$

$$M_u = 22299,1 = 229,99kN \cdot m$$

Utilizando la TABLA A-2, para el valor de

$$\omega_r = \omega_a - 0,85Y$$

$$\omega_a = \frac{A_s f_y}{b_w d f_c'} = 0,6375$$

$$Y = \frac{h_f(b-b_w)}{b_w d} = 0,4167$$

$$\omega_r = 0,2833$$

se obtiene interpolando $\mu_r = 0,2359$ y entonces:

$$M_u = \phi b_w d^2 f_c' [\mu_r + 0,85X]$$

$$M_u = 0,875 \cdot 10 \cdot 48^2 \cdot 2[0,2359 + 0,85 \cdot 0,373]$$

$$M_u = 22296,3 = 222,96 \text{ kN} \cdot \text{m}$$

4,9,4 DISEÑO DE SECCIONES T

Nuevamente el paso inicial consiste en determinar si la sección tiene o no comportamiento rectangular. Para el diseño se define el término M_{ala} , como el máximo momento capaz de resistir toda el ala comprimida. Con el apoyo en la figura 4,30

$$M_{ala} = 0,85 f_c' h_f b \left(d - \frac{h_f}{2} \right)$$

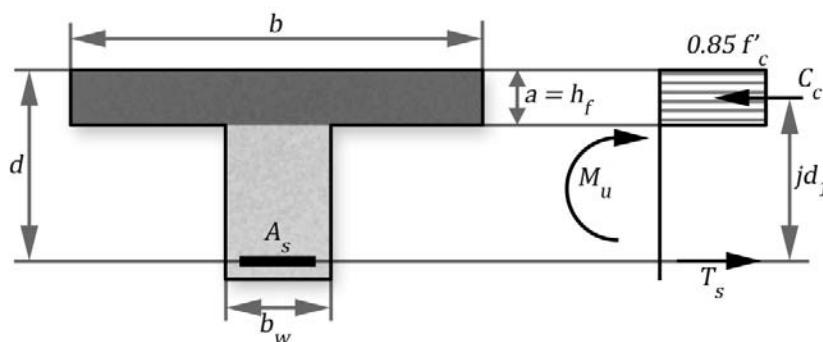


Figura 4,30: Momento del ala

Entonces sí:

$$M_u \leq \phi M_{ala} \quad a \leq h_f$$

COMPORTAMIENTO RECTANGULAR.

$$M_u > \phi M_{ala} \quad a > h_f$$

COMPORTAMIENTO T.

A continuación ejemplos de cómo se procede en el diseño de una sección que se encuentra en alguno de los casos expuestos.

Ejercicio 4,10

Diseña la viga simplemente apoyada que forma parte del entrepiso fundido “in situ” y situado en una zona de agresividad MEDIA, cuyas características se muestran en la figura 4,31

$$f_c' = 25 \text{ MPa}$$

$$q_{CP} = 6,3 \text{ kN/m}^2 \text{ (sin considerar el PP de la viga)}$$

$$f_y = 300 \text{ MPa}$$

$$q_{CU} = 2 \text{ kN/m}^2$$

$$\gamma_h = 24 \text{ kN/m}^3$$

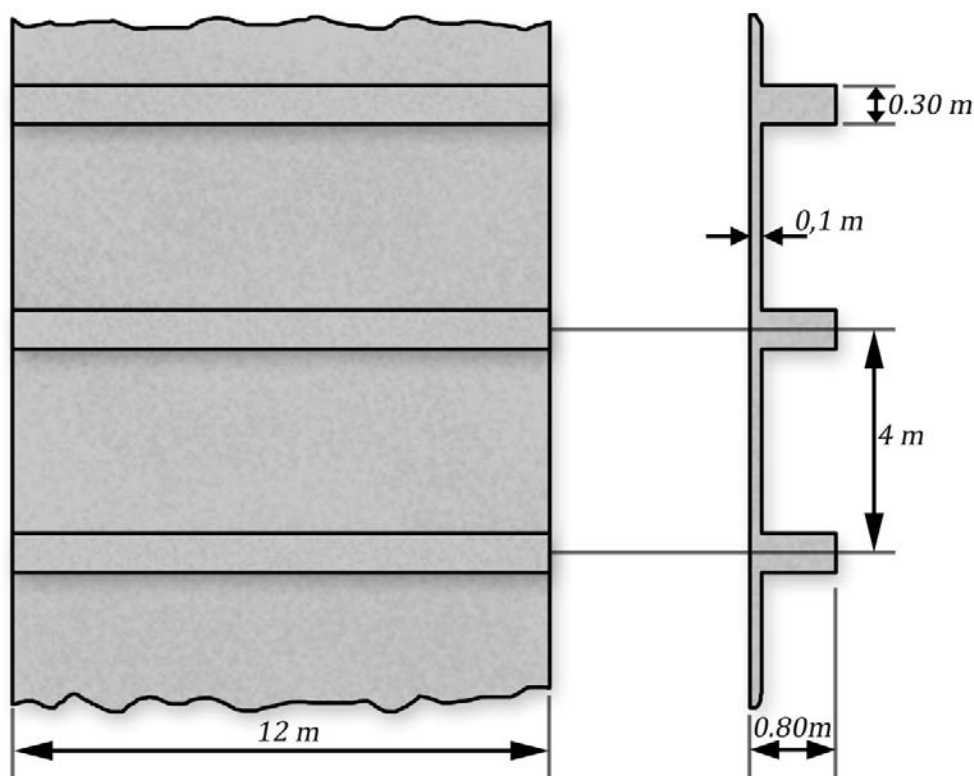


Figura 4,31: Entrepiso ejercicio 4,10

Cálculos y discusión

a) Cálculo del Momento Flector.

$$q_{CP} = 4 \cdot 6,3 = 25,2 \text{ kN/m}$$

$$q_g = 0,3 \cdot 0,8 \cdot 24 = 5,76 \text{ kN/m}$$

$$q_{CP} = 4 \cdot 2 = 8 \text{ kN/m}$$

Entonces la carga mayorada será:

$$q_u = 1,2(q_{CP} + q_g) + 1,6 \cdot q_{CU} = 49,95 = 50 \text{ kN/m}$$

Y el Momento flector para una viga simplemente apoyada:

$$M_u = \frac{q_u L^2}{8}$$

$$M_u = \frac{50 \cdot 12^2}{8} = 900 \text{ kN} \cdot \text{m}$$

b) Cálculo del ancho eficaz del ala (b)

$$b \leq \frac{l_e}{4} = \frac{12}{4} = 3 \text{ m}$$

$$b \leq 16h_f + b_w = 16 \cdot 0,1 + 0,3 = 1,9 \text{ m}$$

$$b \leq \frac{B}{2} = \frac{4}{2} = 2 \text{ m}$$

Por tanto se toma el menor $b = 1,9 \text{ m}$

c) Comprobación del comportamiento de la sección.

Calculando el M_{ala} para determinar si la sección tiene o no comportamiento rectangular:

$$M_{ala} = 0,85 f_c' h_f b \left(d - \frac{h_f}{2} \right)$$

Donde:

$$h = h_f + 80cm = 10 + 80 = 90cm$$

$$d = h - d_s \quad \text{considerando } d_s = 9cm, \text{ para 2 camadas}$$

$$d = 90 - 9 = 81cm$$

$$M_{ala} = 0,85 \cdot 2,5 \cdot 10 \cdot 190 \left(81 - \frac{10}{2} \right) = 3068,5 kN \cdot m$$

Como

$$\phi M_{ala} > M_u$$

La sección tiene comportamiento RECTANGULAR y la línea neutra abarcará solo el ala superior

d) Cálculo de la armadura

Con el apoyo en la figura 4,32 se trabaja en las ecuaciones de equilibrio.

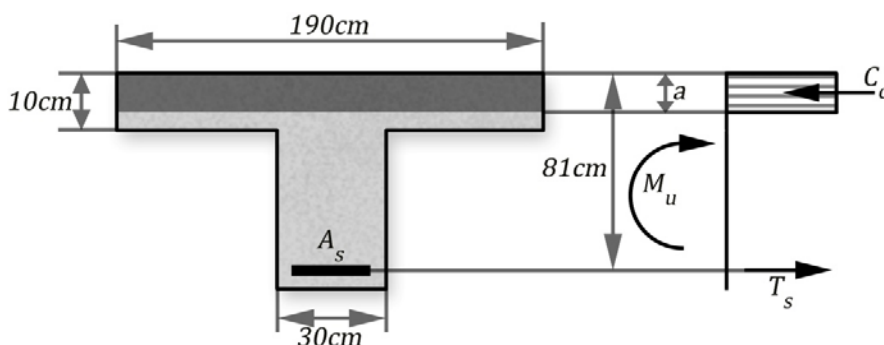


Figura 4,32: Diagrama de tensiones y fuerzas. Comportamiento Rectangular. Ejercicio 4,10

$$\Sigma M = 0$$

$$M_u = \phi \left[0,85 f_c' a \cdot b \left(d - \frac{a}{2} \right) \right]$$

$$0,5a^2 - d \cdot a + \frac{M_u}{\phi 0,85 b f_c'} = 0$$

$$0,5a^2 - 81 \cdot a + \frac{90000}{0,9 \cdot 0,85 \cdot 30 \cdot 2} = 0$$

$$a = 3,12cm$$

$$c = \frac{a}{\beta_1} = \frac{3,12}{0,85} = 3,67cm$$

Note como el valor es muy pequeño ya que el ancho del ala es grande; por esta razón el refuerzo comprimido que se colocaría por criterios constructivos prácticamente no aportaría nada a la capacidad resistente de la sección, por lo que como regla se desprecia cuando las secciones T tiene comportamiento rectangular.

Resolviendo el problema utilizando las ecuaciones adimensionales

$$M_u = \phi[\omega_r(1 - 0,59\omega_r)bd^2f_c']$$

$$0,59\omega_r^2 - \omega_r + \frac{M_u}{\phi bd^2f_c'} = 0$$

$$0,59\omega_r^2 - \omega_r + \frac{90000}{0,9 \cdot 30 \cdot 61^2 \cdot 2} = 0$$

$$\omega_r = 0,0327 < \omega_{ra}$$

Empleando las ayudas de cálculo, se obtiene el valor de:

$$\mu = \frac{M_u}{\phi bd^2f_c'} = 0,0321$$

y como $\mu_r = \mu$, en la TABLA A-2 se obtiene

$$\omega_r = 0,033$$

Entonces de la ecuación de fuerzas.

$$0,85f_c'ba = f_yA_s$$

$$A_s = \frac{0,85f_c'a \cdot b}{f_y}$$

$$A_s = \frac{0,85 \cdot 2,5 \cdot 3,12 \cdot 190}{300} = 41,96\text{cm}^2$$

O como $\omega = \omega_r$:

$$A_s = \omega_r \frac{b \cdot df_c'}{f_y}$$

$$A_s = 0,0327 \frac{190 \cdot 81 \cdot 25}{300} = 41,96\text{cm}^2$$

Se colocan 4 barras N°32 y 2 barras N°25 que hacen un $A_{real} = 42,96\text{cm}^2$ y que pueden colocarse en 2 camadas, con recubrimiento mecánico menor que 9cm

Ejercicio 4,11

Diseñe la sección del ejercicio 4,9 considerando que $M_u = 210\text{kN} \cdot \text{m}$.

Cálculos y discusión

a) Comprobación del comportamiento de la sección.

Como:

$$M_{ala} = 0,85f_c'h_f b \left(d - \frac{h_f}{2} \right)$$

Donde:

$$d = h - d_s \quad \text{considerando } d_s = 7\text{cm, para } l \text{ camadas}$$

$$d = 55 - 7 = 48\text{cm}$$

$$M_{ala} = 0,85 \cdot 2 \cdot 10 \cdot 30 \left(48 - \frac{10}{2} \right) = 219,3\text{kN} \cdot \text{m}$$

Como

$$\phi M_{ala} < M_u$$

La sección tendrá comportamiento T y $a > h_f$

b) Cálculo de la sección para comportamiento T

$$\Sigma M = 0$$

$$M_u = \phi \left[0,85f_c' a \cdot b_w \left(d - \frac{a}{2} \right) + 0,85f_c' h_f (b - b_w) \left(d - \frac{h_f}{2} \right) \right]$$

$$0,5a^2 - d \cdot a + \frac{\frac{M_u}{\phi} - 0,85f_c' h_f (b - b_w) \left(d - \frac{h_f}{2} \right)}{0,85b_w f_c'} = 0$$

$$0,5a^2 - 48 \cdot a + \frac{\frac{21000}{0,9} - 0,85 \cdot 2 \cdot 10(30-10) \left(48 - \frac{10}{2} \right)}{0,85 \cdot 10 \cdot 2} = 0$$

$$a = 12,24 \text{ cm} > h_f$$

$$c = \frac{a}{\beta_1} = \frac{12,24}{0,85} = 14,4 \text{ cm}$$

$c < c_t = 0,375d = 18 \text{ cm}$, por tanto se garantiza el fallo dúctil de la sección, que está en tracción controlada y se ratifica que $\phi = 0,9$

En función de ω_r

$$\frac{M_u}{\phi b_w d^2 f_c'} = \omega_r (1 - 0,59\omega_r) + 0,85X$$

Donde:

$$\frac{M_u}{\phi b_w d^2 f_c'} = \frac{21000}{0,9 \cdot 10 \cdot 48^2 \cdot 2} = 0,506$$

$$X = \frac{h_f (b - b_w) \left(d - \frac{h_f}{2} \right)}{b_w d^2} = \frac{10(30 - 10) \left(48 - \frac{10}{2} \right)}{10 \cdot 48^2} = 0,373$$

$$0,59\omega_r^2 - \omega_r + \frac{M_u}{\phi b_w d^2 f_c'} - 0,85X = 0$$

$$0,59\omega_r^2 - \omega_r + 0,506 - 0,85 \cdot 0,373 = 0$$

$$\omega_r = 0,217 < \omega_{ra} = 0,271$$

por lo que se confirma la suposición de que $\phi = 0,9$

Empleando las ayudas de cálculo, se obtiene el valor de:

$$\mu_t = \frac{M_u}{\phi b_w d^2 f_c'} = 0,525$$

$$\mu_t = \mu_r + 0,85X$$

$$\mu_r = 0,506 - 0,85 \cdot 0,373 = 0,189$$

y en la TABLA A-2 se obtiene

$$\omega_r = 0,217$$

De la ecuación de fuerzas

$$0,85f_c' b_w a + 0,85f_c' h_f (b - b_w) = f_y A_s$$

$$A_s = \frac{0,85f_c' b_w a + 0,85f_c' h_f (b - b_w)}{f_y}$$

$$A_s = \frac{0,85 \cdot 20 \cdot 12,24 \cdot 10 + 0,85 \cdot 20 \cdot 10(30-10)}{300} = 18,27 \text{ cm}^2$$

O en términos adimensionales:

$$0,85 \frac{a}{d} + 0,85Y = \omega_a$$

$$\omega_r = 0,85 \frac{a}{d} = \omega_a - 0,85Y$$

$$Y = \frac{h_f(b - b_w)}{b_w d} = \frac{10(30 - 10)}{10 \cdot 48} = 0,438$$

$$\omega_a = \omega_r + 0,85Y$$

$$\omega_a = 0,217 + 0,85 \cdot 0,4348 = 0,571$$

y finalmente:

$$A_s = \omega_a \frac{b \cdot d f_c'}{f_y}$$

$$A_s = 0,571 \frac{10 \cdot 48 \cdot 20}{300} = 18,27 \text{ cm}^2$$

Ejercicio 4,12

Diseñe la sección del ejercicio 4,11 considerando que $M_u = 290 \text{ kN} \cdot \text{m}$.

Cálculos y discusión

Al calcular la profundidad del bloque comprimido resulta que:

$$a = 27,63 \text{ cm} \quad y \quad c = 32,51 \text{ cm} > 0,375d = 18 \text{ cm}$$

Por tanto se encontrará en la zona de transición y $\phi < 0,9$. Lo más indicado será colocar acero comprimido en una cantidad suficiente que provoque una disminución de la profundidad de la línea neutra hasta que $c < 0,375d$ y la sección este en tracción controlada.

Entonces se define M_{ra} para la sección con comportamiento T como:

$$M_{ra} = \omega_{ra}(1 - 0,59\omega_{ra})bd^2f_c' + 0,85f_c'h_f(b - b_w)\left(d - \frac{h_f}{2}\right)$$

$$\omega_{ra} = 0,85\beta_1 0,375 = 0,271, \text{ y considerando 1 camadas y } d_s = 7 \text{ cm}$$

$$M_{ra} = 0,271(1 - 0,59 \cdot 0,271)10 \cdot 48^2 \cdot 2 + 0,85 \cdot 2 \cdot 10(30 - 10)\left(48 - \frac{10}{2}\right) = 251109,1$$

$$= 251,09 \text{ kN} \cdot \text{m}$$

Menor que el momento actuante, por lo que se calcula el acero comprimido mínimo necesario:

$$A_s' = \frac{\frac{M_u}{\phi} - M_{ra}}{f_y(d - d')}$$

$$A_s' = \frac{\frac{29000}{0,9} - 25109}{30(48 - 7)} = 5,78 \text{ cm}^2$$

El valor obtenido debe llevarse a área de acero real, para el ejemplo $A'_{real} = 7,74 \text{ cm}^2$ (2 barras N°22) con un valor real de $d' = 4,57 \text{ cm}$, lo que hará cambiar ligeramente el valor de ω_r . Y entonces de la ecuación de momentos:

$$M_u = \phi \left[0,85f_c'a \cdot b_w \left(d - \frac{a}{2}\right) + 0,85f_c'h_f(b - b_w) \left(d - \frac{h_f}{2}\right) + A'_{real}f_y(d - d') \right]$$

$$0,5a^2 - d \cdot a + \frac{\frac{M_u}{\phi} - 0,85f_c'h_f(b - b_w)\left(d - \frac{h_f}{2}\right) - A'_{real}f_y(d - d')}{0,85b_wf_c'} = 0$$

$$0,5a^2 - 48 \cdot a + \frac{\frac{29000}{0,9} - 0,85 \cdot 2 \cdot 10(30 - 10)\left(48 - \frac{10}{2}\right) - 7,74 \cdot 30(48 - 4,57)}{0,85 \cdot 10 \cdot 2} = 0$$

$$a = 10,32cm > h_f$$

$$c = \frac{a}{\beta_1} = \frac{10,32}{0,85} = 12,15cm$$

Comprobando que $f_s' = f_y$

$$\varepsilon_s' = 0,003 \frac{c - d'}{c} = 0,0019 > \varepsilon_y$$

Y finalmente de la ecuación de fuerzas

$$0,85f_c'b_wa + 0,85f_c'h_f(b - b_w) + A'_{real}f_y = f_yA_s$$

$$A_s = \frac{0,85f_c'b_wa + 0,85f_c'h_f(b - b_w)}{f_y} + A'_{real}$$

$$A_s = \frac{0,85 \cdot 20 \cdot 10,32 \cdot 10 + 0,85 \cdot 20 \cdot 10(30 - 10)}{300} + 7,74 = 24,92cm^2$$

Ejercicio 4,13

Diseñe la sección del ejercicio 4,12 considerando que $f_y = 420MPa$

Cálculos y discusión

Este es un caso extremo en que se requiere acero a compresión pero este no fluye, lo que puede comprobarse por:

$$\varepsilon_a = 0,003 \frac{c_t - d'}{c_t} = 0,0018 < \varepsilon_y = 0,0021 \quad \text{siendo} \quad c_t = 0,375d = 18cm$$

$$f_s' = \varepsilon_a E_s = 366,67MPa < f_y$$

Esfuerzo que se utilizaría para calcular el refuerzo comprimido:

$$A_s' = \frac{\frac{M_u}{\phi} - M_{ra}}{f_s'(d - d')}$$

$$A_s' = \frac{\frac{29000}{0,9} - 25109}{36,67(48 - 7)} = 4,72cm^2$$

$$\text{Colocándose: } A'_{real} = 5,68cm^2 \quad d' = 4,42cm$$

Asumiendo, según lo visto anteriormente, que $c \cong c_t = 0,375d$

$$a_t = \beta_1 c_t = 15,3cm$$

$$A_s = \frac{0,85f_c'b_wa_t + 0,85f_c'h_f(b - b_w) + A'_{real}f_s'}{f_y}$$

$$A_s = \frac{0,85 \cdot 20 \cdot 15,3 \cdot 10 + 0,85 \cdot 20 \cdot 10(30 - 10) + 7,74 \cdot 36,67}{420} = 19,25cm^2$$

Un análisis considerando el valor real del esfuerzo del acero comprimido arroja los siguientes resultados:

$$c = 12,8\text{cm} \quad a = 10,88\text{cm} \quad \varepsilon_s' = 0,00197 \quad A_s = 17,82\text{cm}^2$$

Estos últimos ejercicios demuestran como son poco apropiadas las secciones con comportamiento T, mucho menos racionales que las que tienen comportamiento rectangular. Las secciones T son competitivas siempre que se garantice que el bloque comprimido no alcance el alma, que tengan comportamiento rectangular, y que pueda aprovecharse la sección de hormigón al mismo tiempo de asegurar un gran brazo de las fuerzas resistentes.

4,10 EL MÉTODO UNIFICADO DE ERNESTO VALDÉS.

Del análisis del caso más general de cálculo de secciones de HA, sección con comportamiento T y refuerzo comprimido, el profesor Ernesto Valdés propuso un procedimiento que integra muy didácticamente la solución para la flexión.

Considerando el modelo del ACI y con el auxilio de la figura 4,33, se desarrollan las ecuaciones generales:

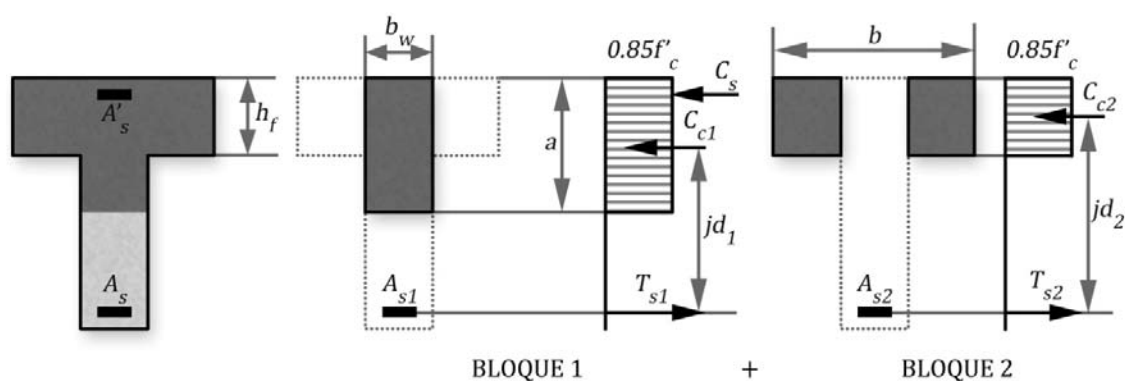


Figura 4,33: Diagrama de tensiones y fuerzas en secciones T

$$\Sigma F = 0$$

$$C_c + C_s = T_s$$

$$C_c = C_{c1} + C_{c2}$$

$$C_{c1} = 0,85f'_c b_w a$$

aporte del bloque comprimido del alma

$$C_{c2} = 0,85f'_c h_f (b - b_w)$$

aporte del ala

Finalmente al ecuación de fuerzas:

$$0,85f'_c b_w a + 0,85f'_c h_f (b - b_w) + f_y A_s' = f_y A_s$$

En términos relativos, la ecuación quedaría:

$$0,85 \frac{a}{d} + 0,85Y + \omega' = \omega_a$$

$$\omega_r = 0,85 \frac{a}{d} = \omega_a - \omega' - 0,85Y$$

$\Sigma M = 0$ (respecto a A_s) en función de ω_r

$$\mu_t = \frac{M_u}{\phi b_w d^2 f'_c} = \omega_r (1 - 0,59\omega_r) + 0,85X + \omega' \left(1 - \frac{d'}{d}\right)$$

$$\mu_t = \mu_r + 0,85X + \omega' \left(1 - \frac{d'}{d}\right)$$

Y si se le llama:

$$C_{\omega} = 0,85Y + \omega'$$

$$C_{\mu} = 0,85X + \omega' \left(1 - \frac{d'}{d}\right)$$

Valores que serían nulos para secciones con comportamiento rectangular y sin refuerzo a compresión.

Entonces las ecuaciones generales quedarían:

$$\omega_r = \omega_a - C_{\omega}$$

$$\mu_r = \mu_t - C_{\mu}$$

Y los procedimientos a seguir se esquematizan en la TABLA 4,5 y en los siguientes gráficos.

Donde para la COMPROBACIÓN, figura 4,34 a, conociendo las características de la sección y por tanto: ω , ω' , X e Y para sección T, se obtiene de la ecuación de fuerzas ω_r

$$\omega_r = \omega_a - C_{\omega}$$

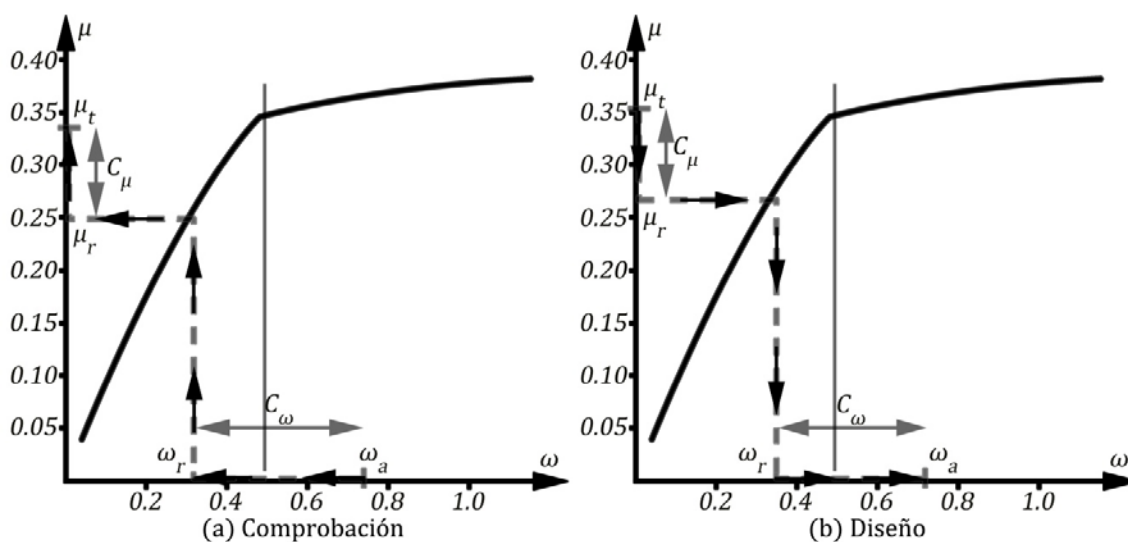


Figura 4,34: Método Unificado, procedimiento general

Donde:

$$C_{\omega} = 0,85Y + \omega'$$

Con este valor puede obtenerse:

$$\mu_r = \omega_r(1 - 0,59\omega_r)$$

y como

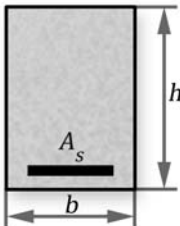
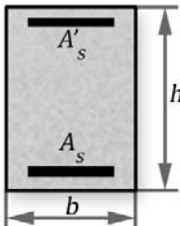
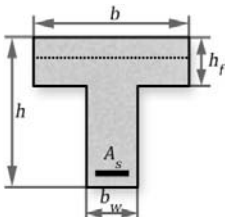
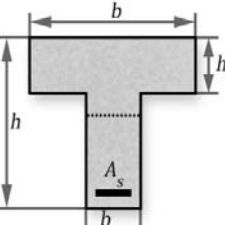
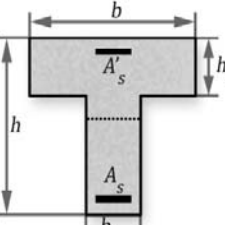
$$C_{\mu} = 0,85X + \omega' \left(1 - \frac{d'}{d}\right)$$

$$\mu_t = \mu_r + C_{\mu}$$

Se obtiene finalmente

$$M_u = \mu_t(\phi b_w d^2 f_c')$$

TABLA 4, 5: Método Unificado de cálculo de secciones de HA en flexión

SECCIÓN	ECUACIONES DE EQUILIBRIO	DEFINICIONES
	$\omega_r = 0,85 \frac{a}{d} = \omega$ $\mu = \mu_r$ $\mu_r = \omega_r (1 - 0,59 \omega_r)$	$\omega = \frac{A_s f_y}{b d f_c'}$ $\mu = \frac{M_u}{\phi b d^2 f_c'}$
	<p>Considerando que $f_s' = f_y$</p> $\omega_r = 0,85 \frac{a}{d} = \omega - \omega'$ $\mu = \mu_r + \omega' \left(1 - \frac{d'}{d}\right)$	$\omega' = \frac{A_s' f_y}{b d f_c'}$
	<p>Para sección T con comportamiento rectangular:</p> $a \leq h_f$ $\omega_r = 0,85 \frac{a}{d} = \omega$ $\mu = \mu_r$	
	<p>Para sección T con comportamiento T:</p> $a > h_f$ $\omega_r = 0,85 \frac{a}{d} = \omega_a - 0,85 Y$ $\mu_t = \mu_r + 0,85 X$	$\omega_a = \frac{A_s f_y}{b_w d f_c'} \quad \mu_t = \frac{M_u}{\phi b_w d^2 f_c'}$ $Y = \frac{h_f (b - b_w)}{b_w d}$ $X = \frac{h_f (b - b_w) \left(d - \frac{h_f}{2}\right)}{b_w d^2}$
	<p>Para sección con comportamiento T: Considerando que $f_s' = f_y$</p> $\omega_r = \omega_a - \omega_a' - 0,85 Y$ $\mu_t = \mu_r + 0,85 X + \omega_a' \left(1 - \frac{d'}{d}\right)$	$\omega_a' = \frac{A_s' f_y}{b_w d f_c'}$

En el caso del DISEÑO, figura 4,34b, se conocen el momento de cálculo M_u y una vez determinado el refuerzo comprimido a colocar en la sección y si esta tiene o no comportamiento rectangular, para las con comportamiento T; trabajando en la ecuación de momentos, calculando μ_r :

$$\mu_r = \mu_t - C_\mu \quad C_\mu = 0,85X + \omega' \left(1 - \frac{d'}{d}\right)$$

Y con este se obtiene ω_r y de la ecuación de fuerzas:

$$\omega_a = \omega_r + C_\omega \quad C_\omega = 0,85Y + \omega'$$

4,11 FLEXION ESVIADA.

En vigas extremas o sometidas a cargas horizontales se produce flexión en más de un eje, como se muestra en la figura 4,35.

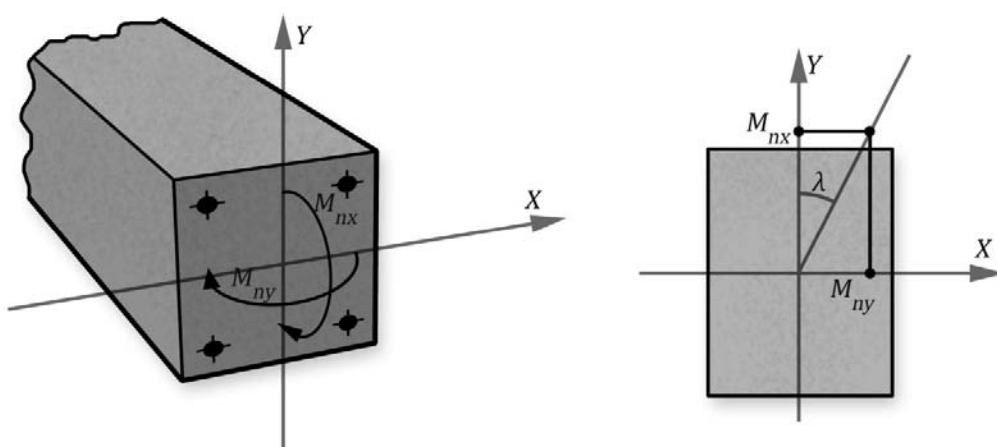


Figura 4,35: Flexión Esviada en Vigas

La acción del momento se puede plantear por los valores en los ejes x e y , M_{nx} y M_{ny} respectivamente o por el momento resultante M_n que actúa con una inclinación λ respecto al eje y . Siendo:

$$\lambda = \arctan \frac{M_{ny}}{M_{nx}}$$

$$M_n = \sqrt{M_{nx}^2 + M_{ny}^2}$$

Esta acción esviada provoca que la línea neutra no sea perpendicular a los ejes y la determinación de su inclinación θ se constituye en el problema principal a resolver en estos casos ya que no solo está determinado por las magnitudes de M_{nx} y M_{ny} , sino también por las dimensiones en la sección y la posición del refuerzo.

Tomando en cuenta estas complejidades se enfoca la solución de casos de flexión esviada en vigas como un problema de comprobación de una sección que fue diseñada previamente bajo la flexión recta.

4.11.1 ECUACIONES GENERALES PARA SECCIONES RECTANGULARES

Con el apoyo en la figura 4,36, pueden plantearse las ecuaciones generales para resolver un problema de flexión esviada, conocida la inclinación en la línea neutra θ .

$$\Sigma F = 0$$

$$C_c + S_1 + S_2 + \dots S_n = 0$$

Donde

C_c resultante del bloque comprimido del hormigón obtenido a partir de la determinación del área comprimida.

$S_i = A_i f_{si}$ aporte de cada acero.

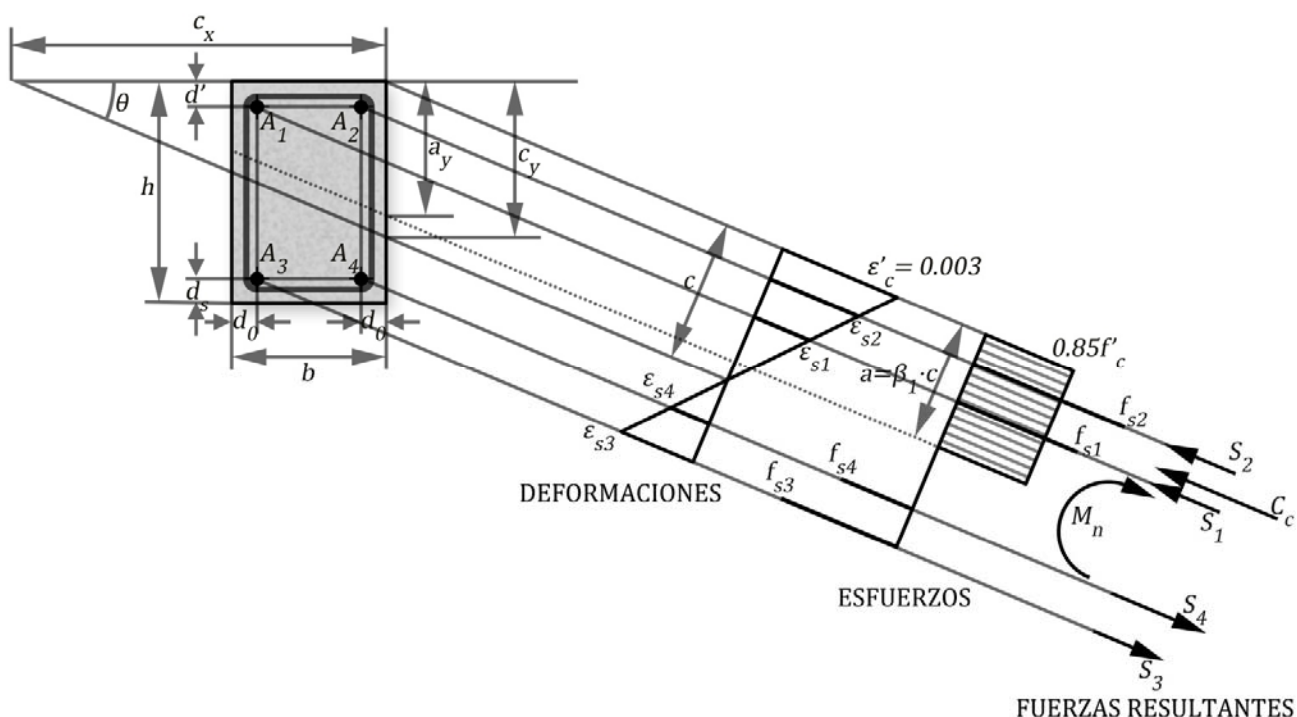


Figura 4,36: Diagrama de deformaciones, esfuerzos y fuerzas. Flexión esviada

$$\Sigma M_{nx} = 0 \text{ (respecto al eje y)}$$

$$M_{nx} = C_c \left(\frac{b}{2} - z_x \right) + S_1 \left(\frac{b}{2} - d_o \right) + S_2 \left(\frac{b}{2} - d_o \right) + \dots S_n \left(\frac{b}{2} - d_o \right)$$

$$\Sigma M_{ny} = 0 \text{ (respecto al eje x)}$$

$$M_{ny} = C_c \left(\frac{h}{2} - z_y \right) + S_1 \left(\frac{h}{2} - d' \right) + S_2 \left(\frac{h}{2} - d' \right) + \dots S_n \left(\frac{h}{2} - d' \right)$$

Donde

z_x proyección sobre el eje x del brazo en la resultante C_c .
 d_o recubrimiento lateral del refuerzo.
 z_y proyección sobre el eje y del brazo en la resultante C_c .
 d' recubrimiento del refuerzo.

Entonces la solución se completa calculando el aporte de cada refuerzo y del hormigón comprimido.

4,11,2 APORTE DEL HORMIGÓN.

Empleando el diagrama rectangular equivalente, como se muestra en la figura 4,36, el aporte del hormigón comprimido C_c puede obtenerse por:

$$C_c = 0,85f_c' A'$$

Donde A' es el área comprimida del hormigón.

El área comprimida A' puede presentar 4 formas diferentes, de la que depende el cálculo no solo de A' sino del centroide del área comprimida. El tipo de área estará determinada por la inclinación y profundidad de la línea neutra como se esquematiza en la figura 4,37.

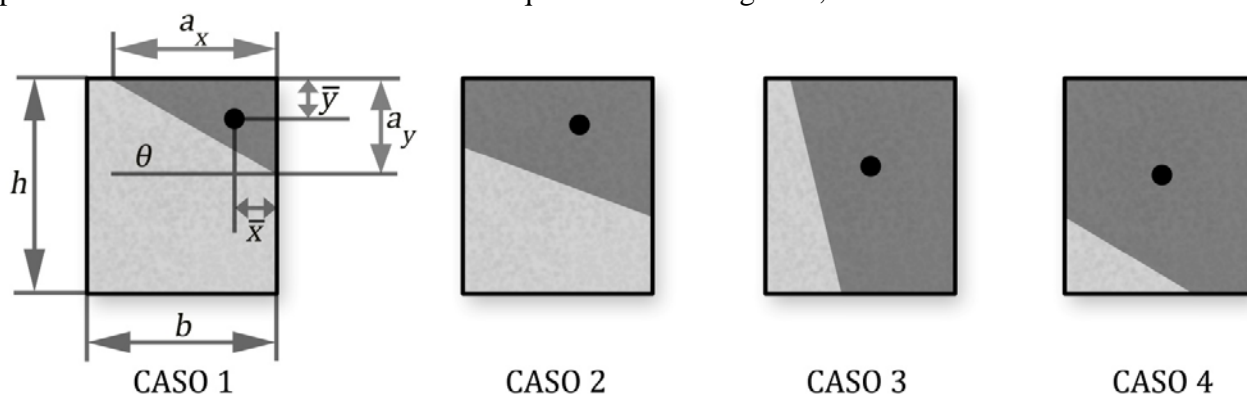


Figura 4,37: Áreas comprimidas del hormigón en la flexión esviada.

De la figura 4,36 se puede determinar:

$$\begin{aligned} c_x &= \frac{c}{\sin\theta} & a_x &= \beta_1 c_x \leq b \\ c_y &= \frac{c}{\cos\theta} & a_y &= \beta_1 c_y \leq h \end{aligned}$$

En los anexos aparece la tabla A-5 donde se resumen las expresiones para calcular, para los 4 casos: A' y la posición del centroide respecto a los ejes: \bar{x} e \bar{y} .

4,11,3 APORTE DEL REFUERZO.

En la figura 4,38, se muestra el diagrama de deformaciones para una sección sometida a la flexión esviada, apoyo importante para determinar la tensión a que está sometido cada acero (f_{st}). Aunque se ejemplifica para 4 barras situadas en las esquinas, el procedimiento es válido para mayor número de barras situadas bordeando el perímetro de la sección.

Considerando la proyección sobre el eje y

$$\frac{\epsilon_c'}{c_y} = \frac{\epsilon_{s1}}{z_1} = \frac{\epsilon_{s2}}{z_2} = \frac{\epsilon_{s3}}{z_3} = \frac{\epsilon_{s4}}{z_4}$$

Donde:

$$\begin{aligned} z_1 &= c_y - d' - (b - d_o)\tan\varphi \\ z_2 &= c_y - d' - d_o\tan\varphi \\ z_3 &= c_y - d - (b - d_o)\tan\varphi \\ z_4 &= c_y - d - d_o\tan\varphi \end{aligned}$$

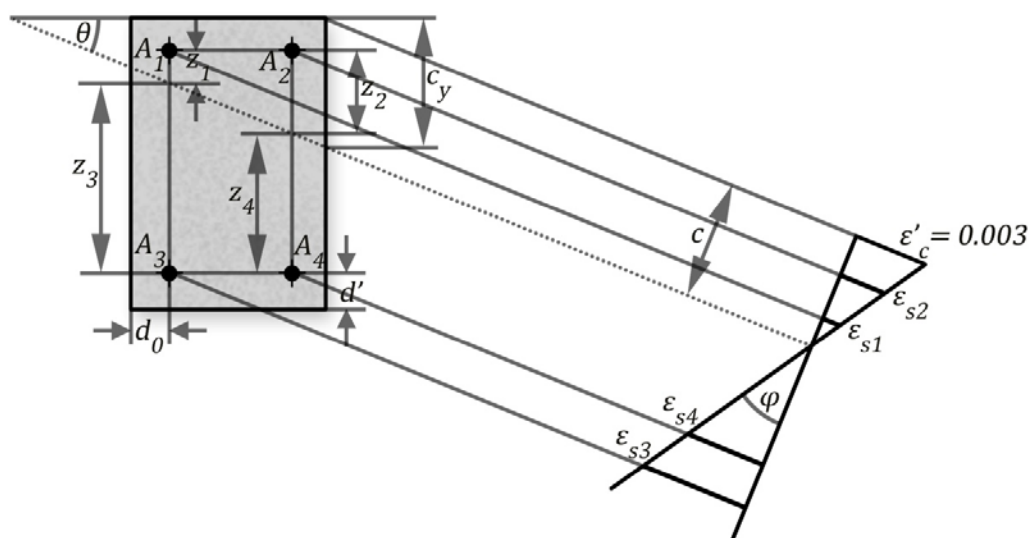


Figura 4,38: Diagrama de deformaciones

Entonces:

$$\varepsilon_{s1} = \frac{c_y - d' - (b - d_o)\tan\theta}{c_y} \varepsilon'_c$$

$$\varepsilon_{s2} = \frac{c_y - d' - d_o\tan\theta}{c_y} \varepsilon'_c$$

$$\varepsilon_{s3} = \frac{c_y - d - (b - d_o)\tan\theta}{c_y} \varepsilon'_c$$

$$\varepsilon_{s4} = \frac{c_y - d - d_o\tan\theta}{c_y} \varepsilon'_c$$

4,11,4 SOLUCIÓN TÉCNICA.

El procedimiento implica un proceso de tanteos hasta determinar los valores de θ y c que satisfacen el equilibrio de la sección, lo que lo hace prácticamente prohibitivo para cálculos manuales.

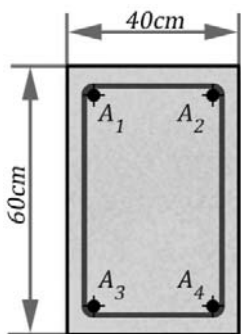
En resumen se procederá:

- 1) Fijar $\varepsilon'_c = 0,003$ y un valor de $\lambda = \arctan \frac{M_{ny}}{M_{nx}}$.
- 2) Asumir un valor de θ .
 - Asumir un valor de profundidad de la línea neutra c .
 - Calcular C_c y todos los S_i .
 - Comprobar que $\Sigma F = 0$
 - Producir cambios en c hasta que se cumpla la condición anterior.
- 3) Cálculo para el c obtenido de M_{nx} y M_{ny} .
- 4) Comprobar que $\lambda_1 = \arctan \frac{M_{ny}}{M_{nx}} \cong \lambda$.
- 5) En caso de que no se cumpla esta condición repetir el proceso para un nuevo valor θ , a partir del paso 2.

A continuación un ejemplo demostrativo de este procedimiento.

Ejercicio 4,14:

Obtenga para la sección que se muestra en la figura 4,39 el máximo momento resistente considerando que se producen simultáneamente la acción de momentos en ambos ejes, siendo el producido verticalmente el doble del horizontal.



$$\begin{aligned} A_1 &= A_2 = 2 \text{ cm}^2 \\ A_3 &= A_4 = 10 \text{ cm}^2 \\ d' &= d_o = 5 \text{ cm} \\ f_c' &= 25 \text{ MPa} \\ f_y &= 300 \text{ MPa} \end{aligned}$$

Figura 4,39: Ejercicio 5.11

Se tiene como dato λ

$$\lambda = \arctan \frac{M_{ny}}{M_{nx}}$$

Y como $M_{ny} = 2M_{nx}$

$$\lambda = \arctan \frac{1}{2} = 0,4636$$

Cálculos y discusión

Se comienza un proceso de tanteo para determinar θ y c

1) Asumiendo un valor de $\theta = 0,8 \text{ rad}$

Fijando un valor de $c = 20 \text{ cm}$

Cálculo de A' y C_c

$$c_x = \frac{c}{\sin \theta}$$

$$c_x = \frac{20}{\sin(0,8)} = 27,88 \text{ cm}$$

$$c_y = \frac{c}{\cos \theta}$$

$$c_y = \frac{20}{\cos(0,8)} = 28,11 \text{ cm}$$

$$\beta_1 = 0,85 \quad \text{para} \quad f_c' < 30 \text{ MPa}$$

$$a_x = \beta_1 c_x$$

$$a_x = 0,85 \cdot 27,88 = 23,7 < b$$

$$a_y = \beta_1 c_y$$

$$a_y = 0,85 \cdot 28,11 = 24,4 < h$$

Como $a_x < b$ y $a_y < h$ entonces el área comprimida es triangular, correspondiendo al ÁREA 1, donde en los anexos de la tabla A-5

$$A' = \frac{1}{2} a_x a_y$$

$$A' = \frac{1}{2} 23,7 \cdot 24,4 = 289,14 \text{ cm}^2$$

$$C_c = 0,85 f_c' A'$$

$$C_c = 0,85 \cdot 2,5 \cdot 289,14 = 614,39 \text{ kN}$$

y la posición del centroide del área comprimida

$$\bar{x} = \frac{a_x}{3} = \frac{23,7}{3} = 7,9 \text{ cm}$$

$$\bar{y} = \frac{a_y}{3} = \frac{24,4}{3} = 8,13 \text{ cm}$$

Cálculo de las deformaciones de los aceros utilizando las ecuaciones de compatibilidad.

$$\varepsilon_{s1} = \frac{c_y - d' - (b - d_o) \tan \theta}{c_y} \varepsilon_c'$$

$$\varepsilon_{s1} = \frac{28,11 - 5 - (40 - 5) \tan(0,8)}{28,11} 0,003 = -0,00129$$

El signo negativo indica que el refuerzo está a tracción y no comprimido como se supuso inicialmente. Además $\varepsilon_{s1} < \varepsilon_y$, por tanto no fluirá.

$$\varepsilon_{s2} = \frac{c_y - d' - d_o \tan \theta}{c_y} \varepsilon_c' = \frac{28,11 - 5 - 5 \cdot \tan(0,8)}{28,11} 0,003 = 0,00194 > \varepsilon_y$$

$$\varepsilon_{s3} = \frac{c_y - d - (b - d_o) \tan \theta}{c_y} \varepsilon_c' = \frac{28,11 - 55 - (40 - 5) \tan(0,8)}{28,11} 0,003 = -0,00651$$

$> \varepsilon_y$

$$\varepsilon_{s4} = \frac{c_y - d - d_o \tan \theta}{c_y} \varepsilon_c' = \frac{28,11 - 55 - 5 \cdot \tan(0,8)}{28,11} 0,003 = -0,00329 > \varepsilon_y$$

Comprobación del equilibrio de fuerzas.

$$\Sigma F = 0$$

$$C_c + S_1 + S_2 + S_3 + S_4 = 0$$

$$f_{s2} = f_{s3} = f_{s4} = f_y$$

y como ε_{s1} es menor que ε_y

$$f_{s1} = \varepsilon_{s1} E_s$$

$$f_{s1} = -0,00129 \cdot 2 \cdot 10^5 = -257,7 \text{ MPa}$$

$$S_1 = f_{s1} A_1 = -25,77 \cdot 2 = -51,5,2 \text{ kN}$$

$$S_2 = f_y A_2 = 30 \cdot 2 = 60 \text{ kN}$$

$$S_3 = -f_y A_3 = -30 \cdot 10 = -300 \text{ kN}$$

$$S_4 = -f_y A_4 = -30 \cdot 10 = -300 \text{ kN}$$

Entonces de la ecuación de fuerzas

$$614,34 - 51,5 + 60 - 300 - 300 = 22,8 \text{ kN}$$

Como no hay equilibrio y predominan las compresiones debe tantearse con valores menores de c . Después de varios tanteos para c se logra el equilibrio para $c = 19,672\text{cm}$, siendo los resultados

$$\begin{array}{llll} c_x = 27,42\text{cm} & c_y = 28,24\text{cm} & a_x = 27,21\text{cm} & a_y = 24\text{cm} \\ A' = 240,69\text{cm}^2 & C_c = 590,4\text{kN} & \bar{x} = 7,77\text{cm} & \bar{y} = 8\text{cm} \\ \varepsilon_{s1} = -0,00136 & \varepsilon_{s2} = 0,00192 & \varepsilon_{s3} = -0,00667 & \varepsilon_{s4} = -0,00339 \\ f_{s1} = -272\text{MPa} & f_{s2} = 300\text{MPa} & f_{s3} = -300\text{MPa} & f_{s4} = -300\text{MPa} \\ S_1 = -54,4\text{kN} & S_2 = 60\text{kN} & S_3 = -300\text{kN} & S_4 = -300\text{kN} \end{array}$$

3) Cálculo de M_{nx} y M_{ny}

$\Sigma M_{nx} = 0$ (respecto al eje y)

$$M_{nx} = C_c \left(\frac{b}{2} - z_x \right) + (-S_1 + S_2 - S_3 + S_4) \left(\frac{b}{2} - d_o \right)$$

donde

$$z_x = \bar{x} = 7,77\text{cm}$$

$$M_{nx} = 590,4 \left(\frac{40}{2} - 7,77 \right) + (54,4 + 60 + 300 - 300) \left(\frac{40}{2} - 5 \right)$$

$$M_{nx} = 89857 = 89,86\text{kN} \cdot \text{m}$$

$\Sigma M_{ny} = 0$ (respecto al eje x)

$$M_{ny} = C_c \left(\frac{h}{2} - z_y \right) + (S_1 + S_2 - S_3 - S_4) \left(\frac{h}{2} - d' \right)$$

donde

$$z_y = \bar{y} = 8\text{cm}$$

$$M_{ny} = 590,4 \left(\frac{60}{2} - 8 \right) + (-54,4 + 60 + 300 + 300) \left(\frac{60}{2} - 5 \right)$$

$$M_{ny} = 28217 = 282,17\text{kN} \cdot \text{m}$$

4) Comprobación de la suposición de θ

Para el θ asumido de $0,8$ el valor de λ sería

$$\lambda_1 = \arctan \frac{M_{ny}}{M_{nx}}$$

$$\lambda_1 = \arctan \frac{89,86}{282,17} = 0,308\text{rad}$$

Como $\lambda_1 < \lambda = 0,4362$ entonces el valor de θ no es correcto y deben repetirse los cálculos para nuevos valores de θ , en este caso se requiere aumentarlo, buscando un incremento de M_{nx} .

5) Repitiendo el proceso anterior se logra, después varios tanteos, la solución del problema para $\theta = 1,262\text{rad}$ y $c = 14,7\text{cm}$. Ver figura 4,40

$$\begin{array}{llll} c_x = 15,43\text{cm} & c_y = 48,4\text{cm} & a_x = 13,12\text{cm} & a_y = 41,11\text{cm} \\ A' = 269,68\text{cm}^2 & C_c = 572,92\text{kN} & \bar{x} = 4,37\text{cm} & \bar{y} = 13,7\text{cm} \\ \varepsilon_{s1} = -0,00412 & \varepsilon_{s2} = 0,00172 & \varepsilon_{s3} = -0,00722 & \varepsilon_{s4} = -0,00138 \\ f_{s1} = -300\text{MPa} & f_{s2} = 300\text{MPa} & f_{s3} = -300\text{MPa} & f_{s4} = -276,7\text{MPa} \\ S_1 = -60\text{kN} & S_2 = 60\text{kN} & S_3 = -300\text{kN} & S_4 = -276,7\text{kN} \end{array}$$

Entonces

$$M_{nx} = 111,04\text{kN} \cdot \text{m}$$

$$M_{ny} = 237,53\text{kN} \cdot \text{m}$$

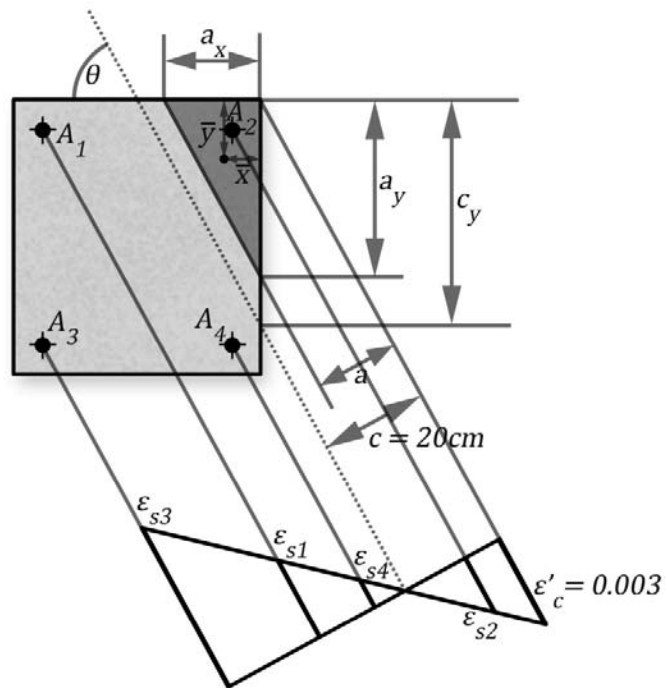


Figura 4,40: Área comprimida y deformaciones para $\theta=1.262$, $c=14,7\text{cm}$

Comprobando

$$\lambda_1 = \arctan \frac{111,04}{237,53} = 0,437\text{rad} \cong 0,4362$$

EJERCICIOS PROPUESTOS

- 1) Se tiene una sección rectangular con ancho de 30 cm , $f_c' = 25\text{ MPa}$ en la que se colocara acero $G-40$.
- Obtenga el peralte total y el refuerzo principal para que se produzca el fallo balanceado si $M_n = 864\text{ kN} \cdot \text{m}$, considerando $A_s' = 0$
 - Si se sabe que la sección anterior no es recomendable obtenga una sección donde $\omega - \omega' = \omega_{ra}$ manteniendo el valor de A_s calculado en el problema anterior. ¿Qué ocurrirá con el valor de M_n de esta nueva sección?
 - Si se decide utilizar acero $G-60$
¿Son válidos los valores obtenidos para el primer inciso? Justifique su respuesta y calcule los nuevos valores
- 2) La sección siguiente será la empleada para un voladizo
- $$b = 25\text{ cm} \quad h = 50\text{ cm} \quad f_c' = 20\text{ MPa}$$
- $$A_s = 4 \text{ barras } N^{\circ}25 \quad A_s' = 2 \text{ barras } N^{\circ}16 \quad f_y = 300\text{ MPa}$$
- Caracterice la sección en cuanto a su fallo
 - Calcule la máxima luz que puede tener el voladizo si la carga actuante es $q = 20\text{ kN/m}$ y $\gamma_f = 1,35$
- 3) Proyectistas y constructores discuten entre tres variantes de refuerzo comprimido a colocar a una sección que además tiene las siguientes características.
- $$b = 30\text{ cm} \quad h = 65\text{ cm} \quad f_c' = 20\text{ MPa}$$
- $$A_s = 6 \text{ barras } N^{\circ}25 \quad d_s = 7\text{ cm} \quad f_y = 300\text{ MPa}$$

Las variantes son:

	$A_s' \text{ (cm}^2\text{)}$
A	$4 \phi 20$
B	$2 \phi 25$
C	$4 \phi 25$

Si la sección debe resistir un $M_n = 410\text{ kN} \cdot \text{m}$

- Caractericé el fallo para cada una de esta secciones
 - Obtenga los valores de M_u para cada una de las secciones
 - Exponga a partir de los resultados anteriores, las ventajas y desventajas de cada sección; proponiendo cual usted escogería para las condiciones planteadas
- 4) Obtenga el valor mínimo de f_c' que debe tener una losa en voladizo cuyo $M_u = 32,6\text{ kN} \cdot \text{m}$ y que:
- $$b = 100\text{ cm} \quad h = 15\text{ cm} \quad A_s = 10 \text{ barras } N^{\circ}12$$
- $$r = 3\text{ cm} \quad f_y = 300\text{ MPa}$$
- 5) Diseñe la sección que resista las cargas que se señalan a continuación, cumpliendo la condición de que $\omega - \omega' = 0,5\omega_b$
- $$M_{CP} = 375\text{ kN} \cdot \text{m} \quad b = 40\text{ cm} \quad d_s = 7\text{ cm}$$
- $$M_{CU} = 170\text{ kN} \cdot \text{m} \quad f_c' = 20\text{ MPa} \quad f_y = 300\text{ MPa}$$
- Calcule el valor de A_s y h a colocar realmente en la sección
 - Con el valor de h calculado se colocan $A_s' = 2 \text{ barras } N^{\circ}25$

Explique que ocurrirá con el valor de A_s y la ductilidad de la nueva sección

Comente los resultados

- c) Si por problemas constructivos hay que reducir 10 cm el valor de peralte calculado, proponga una solución en la que se mantenga la ductilidad lograda en el inciso a
- 6) Diseñe la sección rectangular para soportar las cargas indicadas en el siguiente esquema.
 $b = 40\text{cm}$ $h = 80\text{cm}$ $f'_c = 25\text{MPa}$ $f_y = 300\text{MPa}$
- a) Considere $A_s' = 0$. Caracterice la ductilidad y el fallo de la sección
- b) Recalcule el valor de A_s considerando el valor de A_s' a colocar por especificaciones. Compare el resultado con al solución anterior
- c) Calcule el área de refuerzo necesaria a $q = 60\text{kN/m}$
- Haga una valoración general de la solución y proponga otras alternativas mejores

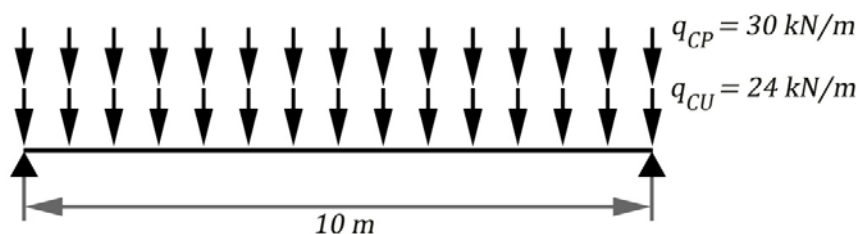


Figura 4,41 Ejercicio propuesto 6

- 7) Diseñe las secciones centrales y sobre el apoyo para la viga que se muestra (q_{CP}) Incluye el peso viga
- $b = 30\text{cm}$ $h = 60\text{cm}$ $f'_c = 20\text{MPa}$ $f_y = 420\text{MPa}$
- a) Haga un análisis detallado para determinar las combinaciones de carga pésima
- b) Considere que del refuerzo principal deben llegar al menos 2 barras a las zonas en que en el momento es cero, por lo que debe tomar en cuenta estos valores como A_s'
- Bajo estos criterios obtenga el refuerzo de las secciones en el apoyo y central

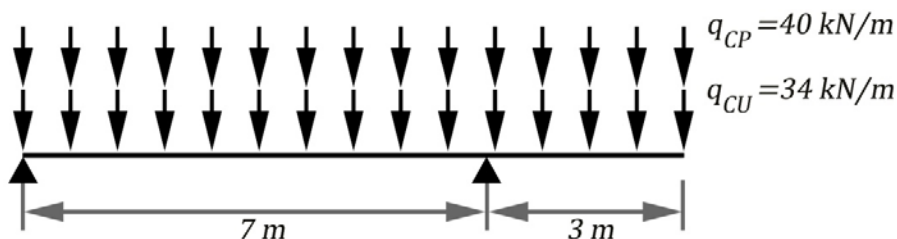
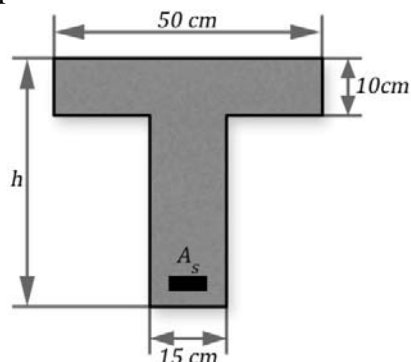


Figura 4,42 Ejercicio propuesto 7

- c) Si se duplica el valor de q_{CU} ¿Cómo resolver el diseño de las secciones en el marco de las normativas del ACI?
- 8) Diseñe una sección en que la relación entre el peralte efectivo d y el ancho b sea de 2; $\omega_r = 0,4\omega_b$ y que soporte un momento externo $M_u = 600\text{kN} \cdot \text{m}$
- Utilice refuerzo $G-60$ y un hormigón con $f'_c = 20\text{MPa}$. Considere $A_s' = 0$

- 9) Obtenga el valor de peralte mínimo para que la siguiente sección T (figura 4,43) tenga comportamiento rectangular y soporte un $M_u = 370 \text{ kN} \cdot \text{m}$

Complete el diseño calculando el valor de A_s



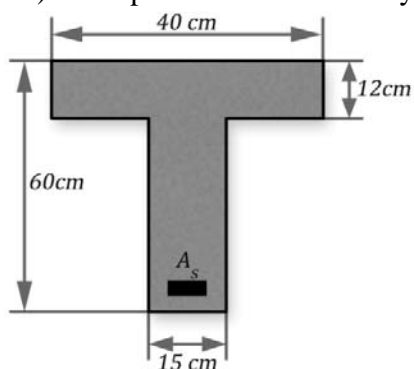
$$f_c' = 20 \text{ MPa},$$

$$f_y = 300 \text{ MPa}$$

Figura 4,43 Ejercicio propuesto 9

- 10) Calcule el momento resistente para la sección T que se muestra en la figura 4,44, conociendo que fue fundida “insitu” y colocada en un ambiente con baja agresividad.

- Para $A_s = 7$ barras $N^\circ 20$
- Para $A_s = 7$ barras $N^\circ 25$
- Compare ambas variantes y exponga sus conclusiones



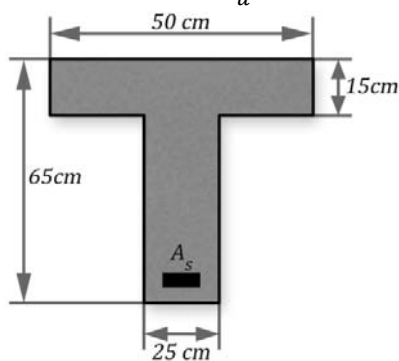
$$f_c' = 25 \text{ MPa},$$

$$f_y = 300 \text{ MPa}$$

Figura 4,44 Ejercicio propuesto 10

- 11) Diseñe la sección de la figura 4,45, sometida a un valor de:

- $M_u = 250 \text{ kN} \cdot \text{m}$
- $M_u = 400 \text{ kN} \cdot \text{m}$



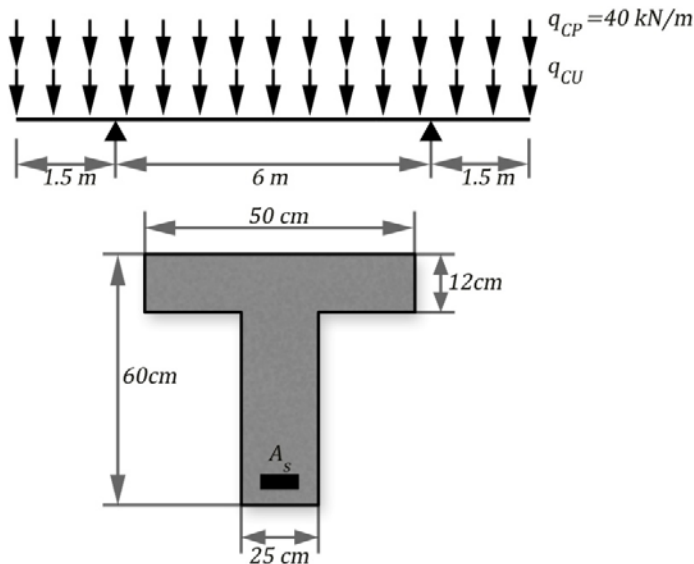
$$f_c' = 20 \text{ MPa},$$

$$f_y = 300 \text{ MPa}$$

Figura 4,45 Ejercicio propuesto 11

12) Diseñe las secciones principales de la viga que se muestra en la figura 4,46

- Para $q_{CU} = 20 \text{ kN/m}$ obtenga la combinación pésima y el área de refuerzo en las secciones centrales y de los apoyos
- Repita los cálculos para $q_{CU} = 40 \text{ kN/m}$



$$f_c' = 20 \text{ MPa},$$

$$f_y = 300 \text{ MPa}$$

1,46 Ejercicio propuesto 12

13) Un sistema de entrepiso de vigas y losas de HA fundidos in situ, cuyas vigas están espaciadas 3 m y tienen una luz de 7 m. Si la losa tiene un espesor de 13 cm, las vigas un ancho de 25 cm y sobresalen de la losa una altura de 40 cm

Si el resto de las cargas permanentes son de 4 kN/m^2 y los de uso 4 kN/m^2 , calcule el refuerzo necesario para resistirla utilizando $G-40$ y un hormigón con $f_c' = 25 \text{ MPa}$

BIBLIOGRAFÍA CONSULTADA

1. American Concrete Institute.. Building Code Requirements for Reinforced Concrete, ACI 318 – 02, Detroit, Michigan. 2005
2. ACI 318 02 Requisitos para Hormigón Estructural. PCA 2002.
3. Babe Ruano M. “Elementos de Estructura de Hormigón Armado”. Tomo I. Editorial Pueblo y Educación. la Habana. Cuba. 1978
4. Babe Ruano M. “Hormigón Armado para Arquitectos. Editorial ISPJAE 1986
5. Baykov, V. y E. Sigalov. Estructuras de Hormigón Armado. Moscú: Ed. Mir, 1986
6. Bresler, B. Concreto Reforzado en Ingeniería. México: Ed. Limusa. 1981
7. CEB–FIP. Código Modelo del Comité Europeo del hormigón y la Federación Internacional del Pretensado. 1990
8. Collins, M. Comportamiento del Hormigón. Impresiones Ligeras, ISPJAE. 1978
9. Dos Santos Lauro Modesto “Calculo de Concreto. Tomo 1 td EMS LTDA Sao Paulo 1983
10. González, O. y Otros. Aspectos Fundamentales de Concreto Reforzado. México: Ed. Limusa. 1975
11. Mattok, A, Kriz L, Hognestad E. “Rectangular concrete stress distribution in ultimate Stnrength Design” Journal ACI feb. 1961
12. Medina Torri F.; Ruiz Alejo L. “Hormigón Estructural 1” Editorial Pueblo y Educación. La Habana. Cuba. 1991
13. Nawy, E. “Concreto Reforzado. Un enfoque básico”. Ed. Prentice-Hall Inc. México. 1988
14. N.C. 053–039–1997. Obras de Hormigón Armado. Principios Generales y Métodos de Cálculo. 1997
15. Nilson, H. A.. Diseño de Estructuras de Concreto. 12ma edición. Bogotá: Ed. McGraw Hill, 1999
16. Park, R. y T, Paulay. Estructuras de Concreto Reforzado. México: Ed. Limusa, 1979
17. Perchat J. “Calculo en el Estado. Límite ultimo en flexión compresión de las piezas de Hormigón Armado” Estructura Vol IX No. 3 – 4
18. Poliakov L, Lisandro E, Kurnetsov L, “Zhelezobetonnie konstruksi” Bizca Shkola, Kiev 1984
19. Rüsch, H. Hormigón Armado y Hormigón Pretensado. México: Ed. Limusa. 1979
20. Valdés, E. Estado Límite Último de Secciones de Hormigón Armado. Ingeniería Estructural, No. 3. 1978
21. ---- Hormigón Estructural. Método Unificado, Impresiones Ligeras, UCLV. 1985

CAPÍTULO 5

El esfuerzo tangencial de cortante

5.1 INTRODUCCIÓN

El estudio de la acción de los esfuerzos cortantes sobre el Hormigón Armado ha resultado una de las tareas más complejas que han enfrentado los investigadores, tarea que aún permanece inconclusa sobre todo por la búsqueda de un modelo que dé respuesta efectiva y sencilla a la problemática de obtener el aporte del hormigón ante los diferentes tipos de fallo que se producen en una sección sometida a fuerzas cortantes; no obstante las investigaciones han avanzado sustancialmente en explicar los mecanismos del fallo y en determinar la influencia de diversos factores en ello.

Por tanto se plantea en general el estudio del cortante haciendo hincapié en:

- Comprensión del fenómeno en su conjunto
- Conocimiento de los factores que influyen en la resistencia a cortante del hormigón estructural.
- Aporte del hormigón.
- Aporte del refuerzo y su distribución

5.2 EL CONCEPTO DE ESFUERZOS CORTANTES.

A continuación un breve recordatorio del procedimiento para la obtención de las expresiones para el cálculo de las tensiones v provocadas por las fuerzas cortantes en secciones homogéneas con comportamiento elástico, como se muestra en la figura 5,1

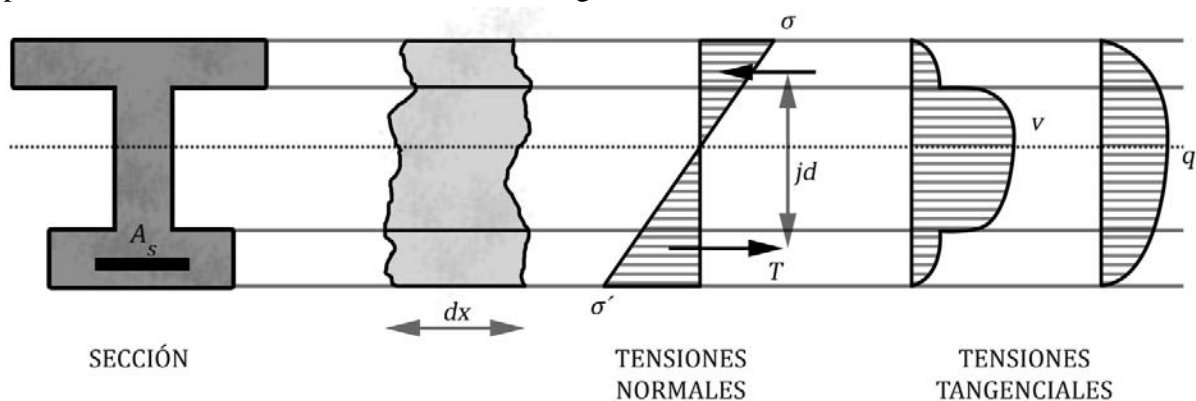


Figura: 5.1 Sección bajo esfuerzos cortantes.

Es conocida la expresión de Zhuravski donde:

$$v = \frac{V \cdot S_{as}}{b_w I}$$

Donde: S_{as} momento estático del área separada
 b_w ancho de la sección
 I momento de inercia de la sección

En una sección rectangular puede demostrarse que:

$$jd = \frac{I}{S_{as}}$$

donde: jd es el brazo mecánico del par de fuerzas a flexión

Por lo que v puede escribirse como:

$$v = \frac{V}{b_w \cdot jd}$$

Es importante también definir el término q , cortante específico ó flujo de cortante, como el cortante por unidad de ancho de la sección. Por tanto:

$$v = \frac{q}{b_w} \quad q = \frac{V}{jd}$$

Todo lo anteriormente expuesto es valido para comportamiento elástico y sección no fisurada. ¿Qué sucede si la sección se fisura? La respuesta se esquematiza en la figura 5,2

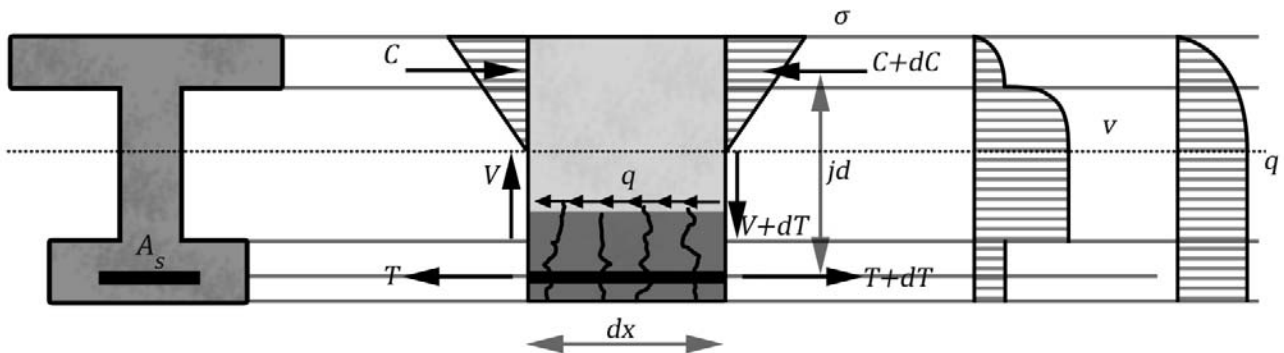


Figura 5.2: Sección fisurada bajo esfuerzos cortantes

Si se analiza el equilibrio a nivel del área sombreada.

$$T + qdx = T + dT$$

$$q = \frac{dT}{dx} = \frac{\frac{dM}{jd}}{dx}$$

Pero:

$$V = \frac{dM}{dx}$$

Por tanto:

$$q = \frac{V}{jd}$$

Valor que permanece constante en la zona agrietada donde se mantiene el equilibrio de fuerzas $C = T$

Por tanto se ratifica la expresión obtenida anteriormente de que:

$$v = \frac{q}{b_w} = \frac{V}{b_w \cdot jd}$$

5.3 MECANISMO DE RESISTENCIA A CORTANTE SIN REFUERZOS EN EL ALMA.

En elementos de hormigón estructural a flexión se recomienda, como regla, utilizar refuerzo transversal aunque no se requiera por cálculo con el propósito de evitar el fallo brusco, el desplome de la viga, buscando la contención por el aporte del acero.

Sin embargo se estudia el cortante en vigas sin refuerzo transversal ya que:

- Permite extender los conceptos del aporte del hormigón a cortante en cualquier elemento.
- Hay vigas sin refuerzo en el alma: losas, viguetas, elementos de hormigón pretensado, cimientos, etc.

5.3.1 LA FORMACIÓN DE GRIETAS

En una viga pueden reconocerse tres grandes tipos de fisuras, como se ilustra en la figura 5,3:

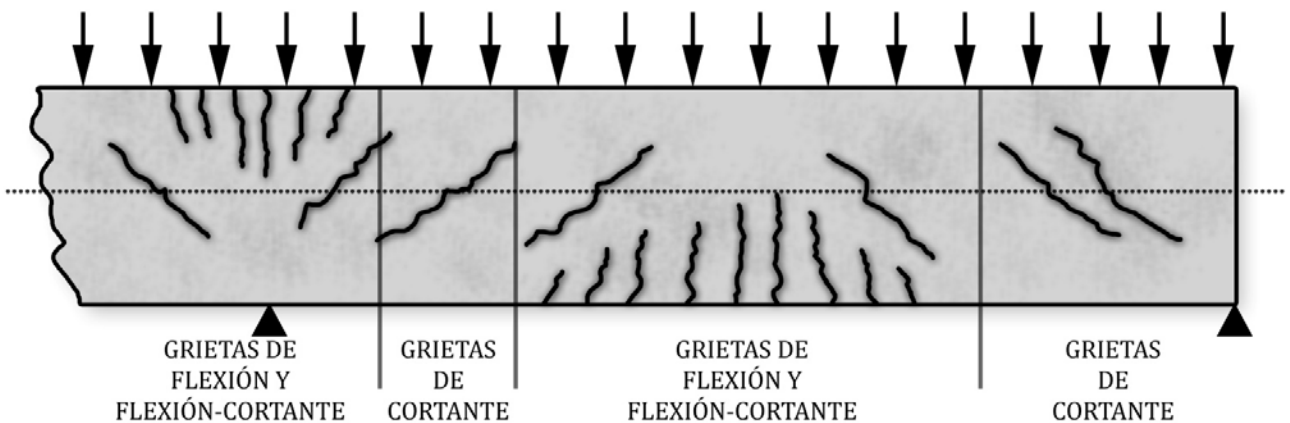


Figura 5,3: La formación de grietas

- **A flexión:** donde predomina M como elemento de fallo. Zona de máximos momentos y las grietas son verticales.
- **A cortante:** donde predomina V , en los apoyos, bajo cargas concentradas. Como regla son fisuras alrededor de 45° en el alma.
- **A flexión cortante:** en una zona intermedia entre los valores máximos de momento flector y cortante, donde después de producirse las grietas verticales por flexión, el efecto del cortante provoca el fallo.

Las características de las **grietas a flexión** y de las solicitaciones que las originan puede ser visualizado con ayuda de la figura 5,4, donde se ha planteado el círculo de Mohr, que representa al estado tensional de la flexión simple asociado a una sección donde no actúan esfuerzos de corte.

Obsérvese que el valor de la tensión principal de tracción: σ_1 coincide con el valor de la tensión normal σ_x y el ángulo de inclinación de dicha tensión sería cero, de ahí que las grietas sean perpendiculares al eje de la viga; la tensión principal σ_2 resulta cero.

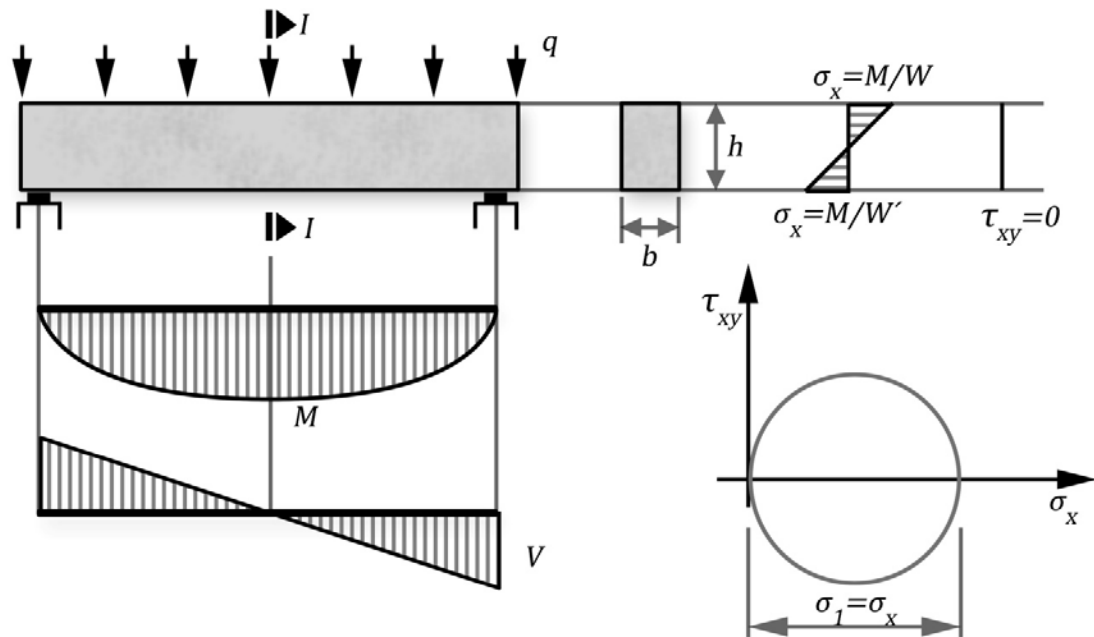


Figura 5,4: Flexión simple. Estado tensional en la sección central. Fisuras por flexión.

Las **fisuras de flexión – cortante** ocurren ante la actuación simultánea de momento flector y fuerzas cortantes, combinación que puede provocar la situación mas desventajosa. En la figura 5,5 se aprecia, por el círculo de Morh, esta problemática a nivel tensional. Puede observarse que ahora existe determinado valor de tensión de compresión: σ_2 , además de cierto ángulo α muy pequeño para el esfuerzo principal de tensión que inclinaría la grieta con respecto al eje longitudinal del elemento.

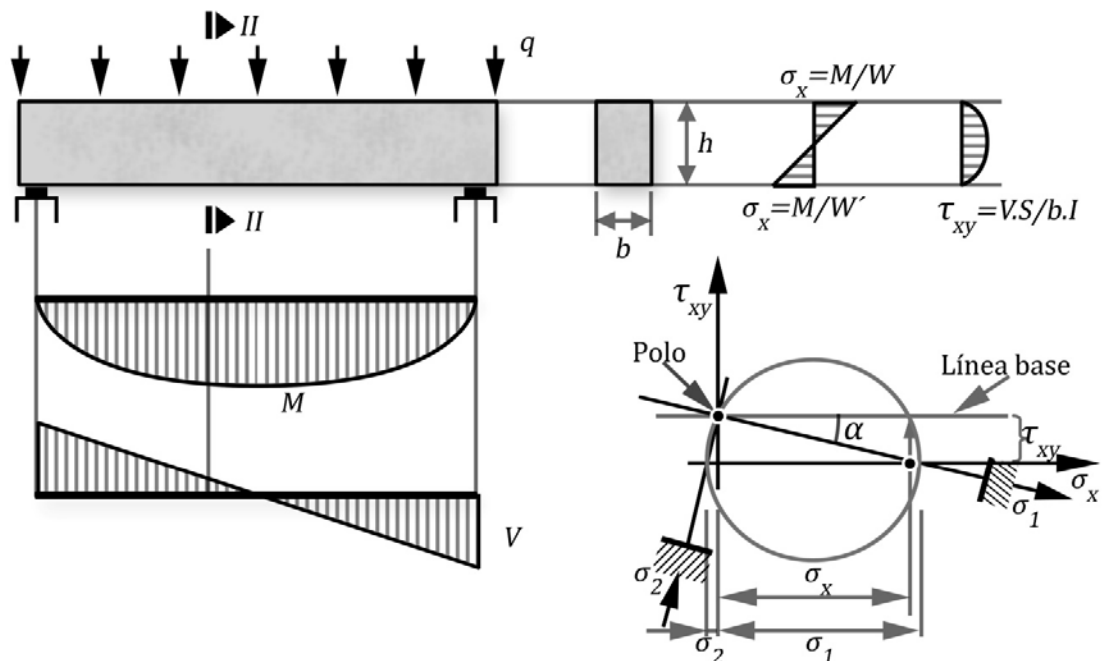


Figura 5,5: Estado tensional en la sección intermedia. Fisuras por flexión cortante.

En este caso las tensiones principales para el diseño del refuerzo se asocian a una combinación crítica entre los valores de momento y cortante actuante en determinada sección; aspecto este que se deduce de la interpretación matemática del círculo de Morh donde:

$$\sigma_{1,2} = \frac{\sigma_x}{2} \mp \sqrt{\left(\frac{\sigma_x}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2}$$

Si se analiza la sección extrema donde el valor de cortante es máximo, como regla, se obtendría que los esfuerzos principales máximos de tracción son inferiores a los que aparecen para una sección alejada del apoyo, donde existe combinado con el cortante un determinado valor de momento, figura 5,6:

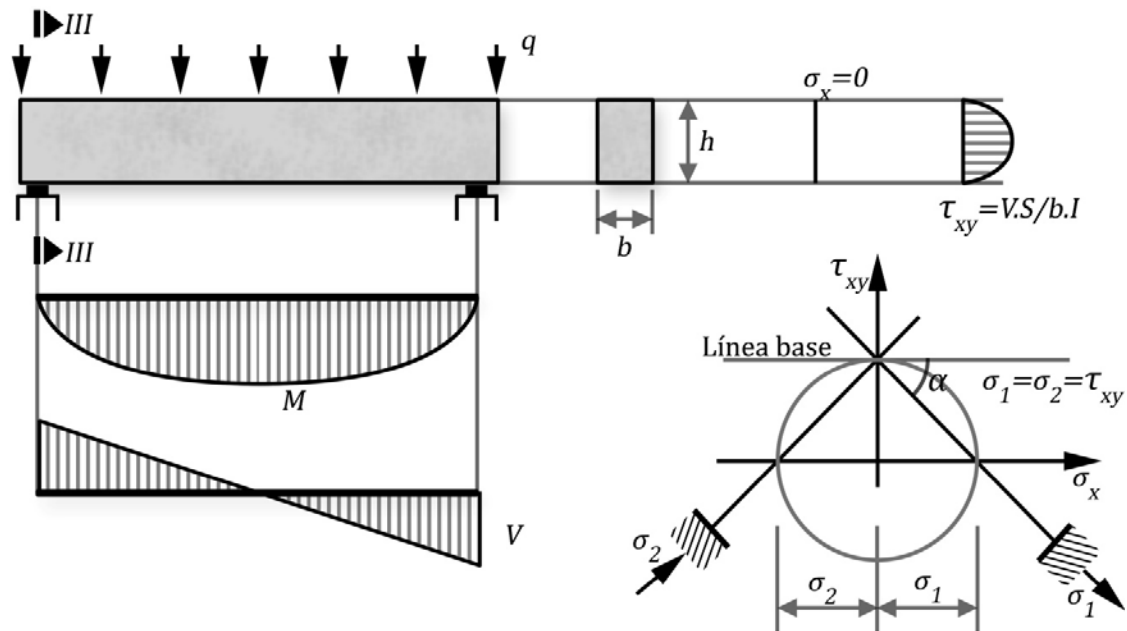


Figura 5,6: Estado tensional en la sección extrema. Fisuras a cortante

En el grafico se observa además que la inclinación de la tensión principal: σ_1 es 45° , o sea las grietas ahora se presentan inclinadas con respecto al eje longitudinal del elemento. Estas son las fisuras a las que se les llaman de **cortante**.

Estos comentarios, apoyados en conceptos de resistencia de materiales, no son aplicables totalmente al caso de Hormigón Armado, pues como es conocido el material deja de comportarse en forma elástica, no obstante, para definir la ubicación de la primera grieta pueden ser empleados, pues antes de la fisuración admitir tal aproximación no conduce a errores de peso aun cuando no sea un material homogéneo.

Otro problema no menos importante se relaciona con el hecho de que conjuntamente con los esfuerzos principales a tracción se generan esfuerzos principales de compresión en ocasiones significativos, sobre todo para secciones con nervios delgados, aun cuando el hormigón tenga aceptable resistencia a compresión, este problema se agudiza aun mas si de conjunto en la sección aparecen fuerzas de compresión en el sentido longitudinal como ocurre en elementos pretensados.

Desde el punto de vista del diseño, buscando la seguridad del elemento, hay que garantizar que este falle a flexión antes que por cortante. Por tanto un buen diseño debe asegurar que primero se presenten las grietas a flexión, verticales y en las zonas de máximo momento flector; ante un incremento de las cargas ocurrirán las fisuras por flexión cortante, en las zonas en que se combinen momento flector y fuerzas de corte y solo cuando se produzca el fallo por flexión se admitirán que se manifiesten, en el alma de la viga, las grietas por cortante.

Las grietas por cortante y por flexión cortante se hacen indeseables pues producen fallos frágiles, por tanto en ambos casos se requiere la colocación de refuerzo en el alma de la viga.

5.3.2 EQUILIBRIO POR CORTANTE.

El equilibrio por cortante se logra por el aporte de tres elementos resistentes como se muestra en la figura 5,7

- V_c aporte de la zona comprimida del hormigón, no agrietada.
- V_d aporte del refuerzo longitudinal por flexión. Efecto de dovela
- V_a aporte a lo largo de la grieta por la trabazón, fricción, de los agregados

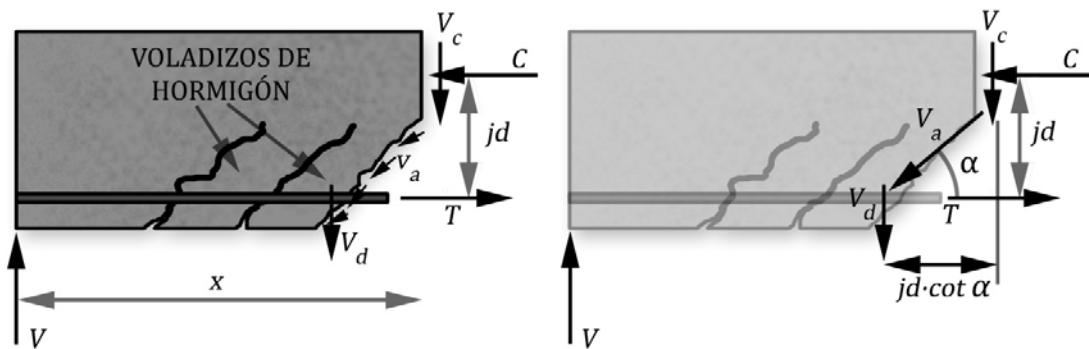


Figura. 5,7 Equilibrio por cortante

Donde el equilibrio por cortante se produce cuando:

$$V = V_c + V_d + V_a$$

$$M = x \cdot V = T \cdot jd + V_d \cdot jd \cdot \cot \alpha = jd(T + V_d \cot \alpha)$$

Apreciándose el efecto de la traslación del esfuerzo cortante por la grieta, si $\alpha = 45^\circ$, se admite que jd es aproximadamente igual a d . En el equilibrio de momento $V_d \cot \alpha$ se desprecia y por tanto se puede admitir la ecuación básica:

$$M = T \cdot jd = C \cdot jd$$

5.3.3 MECANISMO PARA LA RESISTENCIA A CORTANTE

Para evaluar los mecanismos de resistencia a cortante Park y Paulay proponen el siguiente enfoque:

$$V = \frac{dM}{dx} = \frac{d(T \cdot jd)}{dx}$$

$$V = jd \frac{dT}{dx} + T \frac{d(jd)}{dx}$$

El primer término indica el clásico comportamiento de un elemento de hormigón armado donde existe adherencia entre el acero y hormigón, entonces el brazo mecánico jd será prácticamente constante a lo largo de la viga, suposición aceptada y que se ha demostrado su validez en el capítulo sobre comportamiento del hormigón, y el término de $\frac{dT}{dx}$ al que Park y Paulay llaman fuerza de adherencia, y es el cortante específico q , como se demostró anteriormente.

Entonces como jd es constante $\frac{d(jd)}{dx} = 0$ por lo que:

$$V = jd \frac{dT}{dx} = q \cdot jd$$

A este comportamiento se le llama **ACCIÓN DE VIGA**.

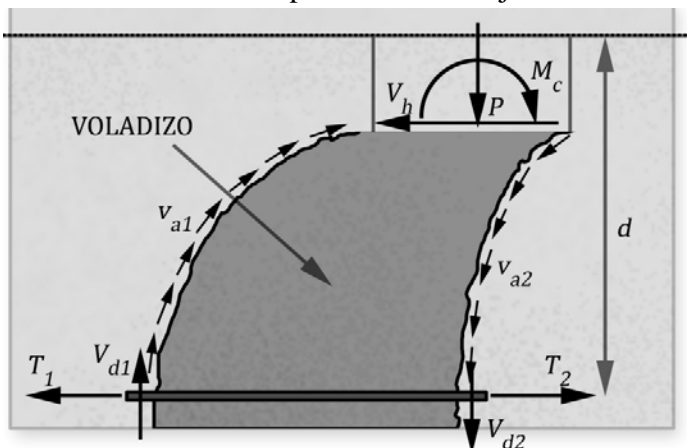
Si por el contrario no existe adherencia acero – hormigón, resulta constante la tensión en el esfuerzo, T y el equilibrio se alcanzará por la variación del brazo jd . Entonces:

$$V = T \frac{d(jd)}{dx} = C \frac{d(jd)}{dx}$$

A este comportamiento se le llama **ACCIÓN DE ARCO**

ACCIÓN DE VIGA

Después de fisurada la viga el mecanismo de resistencia a cortante se plantea por el equilibrio de cada “voladizo de hormigón” formado entre grietas, como se ilustra en la figura 5,7. Estos voladizos vistos individualmente presentan un conjunto de fuerzas y esfuerzos que se detallan en la figura 5,8.



P, M_c, V_h : fuerzas del “empotramiento” del voladizo que caracterizan el aporte de la zona comprimida.

V_d : fuerzas originadas por el efecto dovela.

v_a : esfuerzos provocados por la trabazón de los agregados a lo largo de la grieta.

$\Delta T = T_2 - T_1$: fuerza de adherencia, que garantiza la acción de viga.

Figura 5,8: Acción de viga. Fuerzas y esfuerzos actuantes.

Se ha demostrado que es la trabazón de los agregados la que aporta mayor resistencia al cortante, entre el 30 y el 50%. La zona a compresión, V_c , que durante mucho tiempo se consideró como el único elemento resistente, aporta entre el 20 y el 40% de la capacidad total y el efecto dovela, V_d , produce entre el 15 y el 25%.

Es importante destacar que todo este mecanismo funciona solo si está presente la adherencia hormigón acero y por tanto el cortante específico, q . Si falla la adherencia ocurre el fallo por la acción de arco.

ACCIÓN DE ARCO

Cuando no hay adherencia el fallo tiene otras características, que se modela como un arco atirantado como se muestra en la figura 5,9.

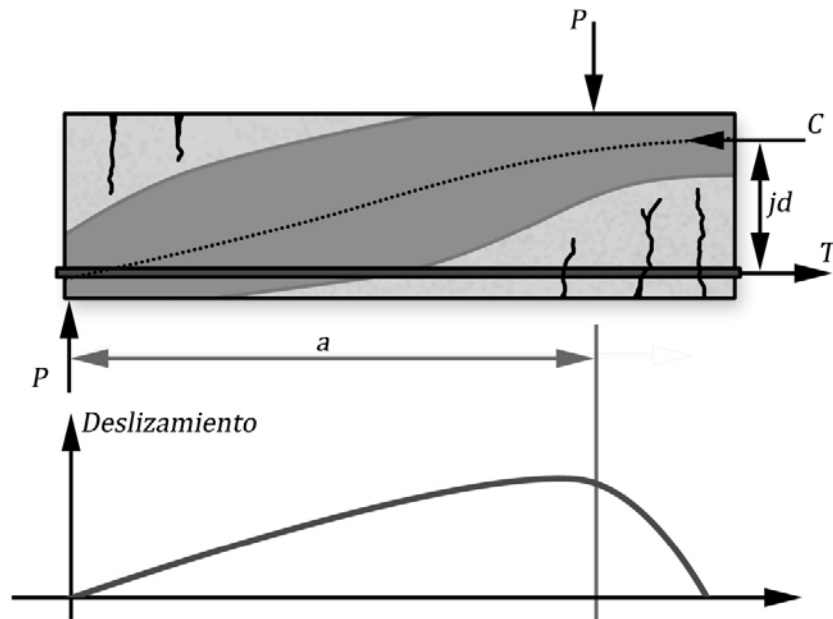


Figura 5,9: Acción de Arco

Como se aprecia el arco estaría formado por las compresiones del hormigón (área sombreada) y el refuerzo que funciona como un tensor. El fallo se produce por aplastamiento del hormigón en la zona comprimida y por el deslizamiento excesivo del acero y rotura del anclaje.

Es obvio que las acciones de viga y arco no son simultáneas ni compatibles pues el factor de adherencia acero-hormigón decide.

5.3.4 MECANISMO DE FALLO

Muy interesantes son los análisis de Park y Paulay como resultado de un importante número de ensayos en vigas de hormigón armado de donde extrajeron conclusiones sobre las características del fallo y la influencia en este de la distancia a en que se coloca la carga del apoyo.

En función de la relación $\frac{a}{d}$ pueden presentarse diversos tipos de fallo. Con el apoyo de la figura 5,10, que resume los ensayos anteriores, se puede plantear:

- a) $3 < \frac{a}{d} < 7$ Fallo a tracción diagonal por acción de viga. La rotura culmina con un fallo de arco al extenderse la grieta.
- b) $2 < \frac{a}{d} < 3$ Fallo de compresión por cortante o de flexión en la zona comprimida. Es un fallo por la acción de arco.
- c) $\frac{a}{d} > 2,5$ Fallo por cortante y adherencia por aplastamiento o desgajamiento del hormigón. Es un fallo por acción de arco.

En la figura 5,10 se aprecia que el cortante rige el diseño en el tramo $1,5 < \frac{a}{d} < 7$, a partir de aquí predomina el fallo por flexión.

Como resumen se exponen los factores que influyen en la resistencia a cortante del hormigón.

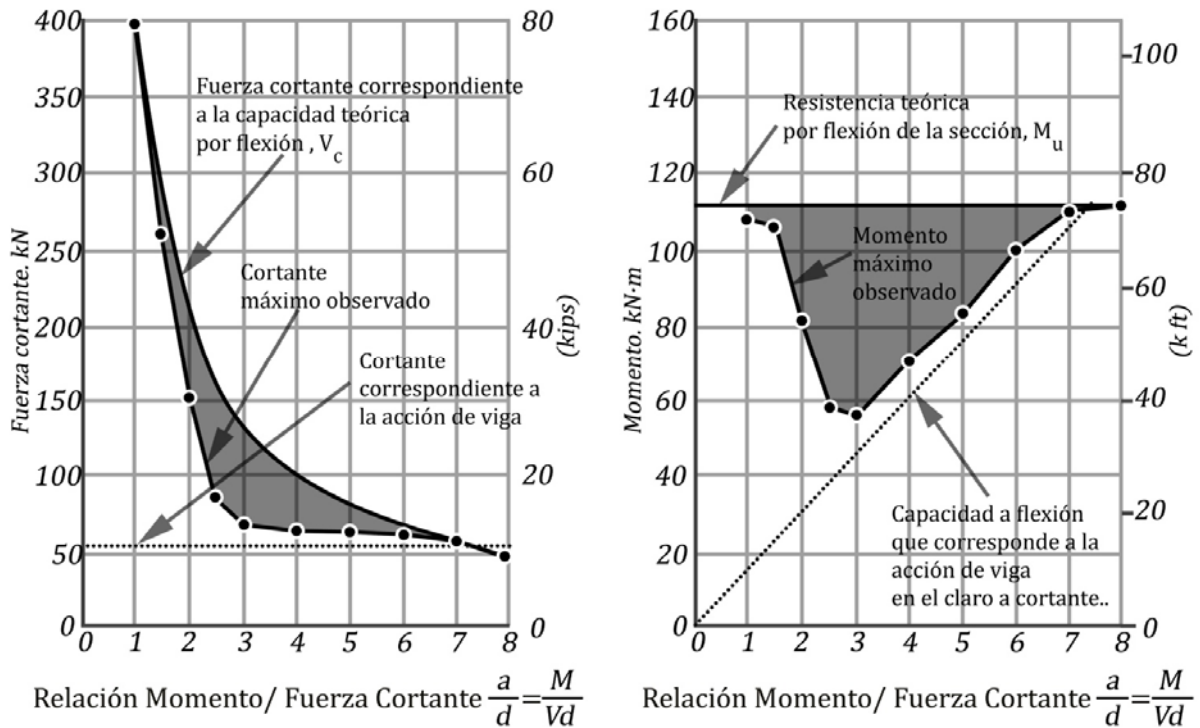


Figura 5.10: Influencia de la relación a/d

- **Resistencia a compresión del hormigón.** Resulta un elemento obvio y que influye tanto en la zona comprimida (V_c) como en la trabazón de los agregados (V_a). En las ecuaciones aparece expresado como $\sqrt{f_c}$
- **Acero longitudinal:** El efecto dovela se expresa a través del término V_d por lo que la cuantía geométrica, $\rho = \frac{A_s}{bd}$, influye en el incremento de la capacidad a cortante del hormigón
- **Relación $\frac{a}{d}$:** Este es un factor que ha demostrado su influencia en el epígrafe anterior y que resulta claro en vigas simplemente apoyadas con carga concentradas, donde:

$$a = \frac{M}{V}$$

Lo que puede generalizarse para otras vigas. En general en las expresiones para el cálculo del aporte del hormigón a cortante lo que aparece es el término $\frac{M}{V \cdot d}$

- **Tamaño del elemento:** Los experimentos que dan pie a las anteriores conclusiones están hechos para elementos pequeños y se ha demostrado que en la medida que crecen las dimensiones se reduce el aporte del hormigón a cortante. En las expresiones más comunes para el cálculo de la capacidad del hormigón a cortante se desestima esta reducción, solo el CEB lo valora en sus expresiones para secciones sin refuerzo en el alma a partir de reducir el aporte para peraltos grandes.
- **Carga axial:** Es claro que la aparición de cargas comprimidas producen un incremento en V_c y V_a

De la misma forma las cargas axiales a tracción reduce la capacidad a cortante a tal grado que muchas normas recomiendan despreciarlas.

5.4 APORTE RESISTENTE DEL HORMIGÓN A CORTANTE EN VIGAS.

Para el cálculo de la capacidad resistente a cortante del hormigón sin refuerzo en el alma, se plantea el análisis diferenciando el tipo de fisura que ocurre, es decir.

- Fisuras por cortante
- Fisuras por flexión – cortante

5.4.1 EXPRESIONES DEL ACI PARA ELEMENTOS DE HORMIGÓN ARMADO

Fisuras por cortante

Estas fisuras, en el alma de la viga, se producen aproximadamente a 45° por el efecto del cortante. En un enfoque elástico éstas ocurren por el fallo a tracción ante las tensiones diagonales provocadas por la combinación de fuerzas normales y tangenciales en ese punto.

El ACI plantea que la capacidad del hormigón ante este tipo de fisura es:

$$V_{cw} = 290\sqrt{f'_c}b_w \cdot d$$

Expresados en *MPa* para la resistencia del hormigón y en *m* para las dimensiones de la sección, se obtiene la fuerza cortante en *kN*

Donde:

- b_w ancho promedio para resistir el cortante
- SECCIONES RECTANGULARES: $b_w = b$
 - SECCIONES CIRCULARES: $b_w = \frac{3}{4} \text{diámetro}$
 - OTRAS SECCIONES: Si en la sección considerada el ancho no es constante b_w se toma como el menor ancho de la sección a través de una distancia de $\frac{3}{4}d$, medida a partir de A_s

Fisuras por flexión – cortante

Aparecen después de ocurrir las fisuras por flexión, cuando el momento flector actuante supera el momento de fisuración M_{cr} por lo que resulta un fenómeno de fallo frecuente.,

El ACI emplea una expresión empírica, conservadora y que no responde ni a la acción de arco ni a la de viga. En la figura 5,11 se compara esta expresión con ensayos realizados por distintos investigadores comprobándose su carácter conservador

$$V_{ci} = (160\sqrt{f'_c} + 17000\rho_w \frac{V_u d}{M_u})b_w \cdot d \leq V_{cw}$$

Expresados en *MPa* para la resistencia del hormigón y en *m* para las dimensiones de la sección, se obtiene la fuerza cortante en *kN*

La relación $\frac{V_u d}{M_u}$ no puede resultar mayor que 1

Como se aprecia, esta expresión toma en cuenta como factores influyentes en V_{ci}

- la calidad del hormigón, f'_c
- cuantía del refuerzo longitudinal, $\rho_w = \frac{A_s}{b_w d}$

- relación $\frac{a}{d} = \frac{M}{V \cdot d}$

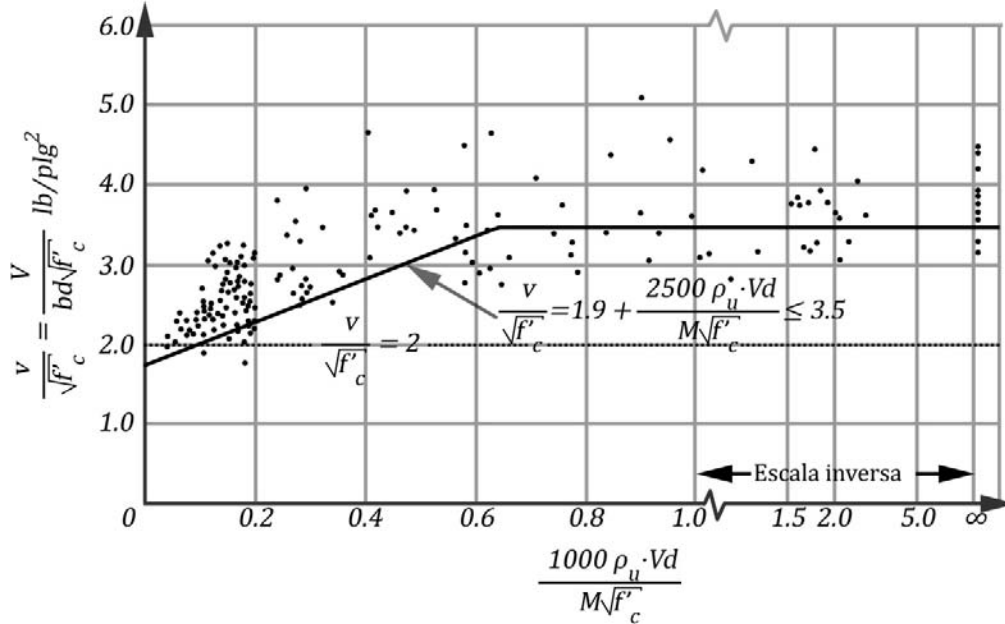


Figura 5.11: Análisis experimental de la resistencia del hormigón a cortante.

Se ha demostrado que esta expresión no es válida para hormigones de alta calidad y se prohíbe su empleo para $\sqrt{f'_c} \geq 8 \text{ MPa}$

Como expresión simplificada se permite adoptar un valor aún más conservador expresado por:

$$V_c = 170 \sqrt{f'_c} b_w \cdot d$$

Que aunque es muy sencilla para el cálculo no considera la influencia del efecto dovela, reflejado en la cuantía ρ_w ni de $\frac{a}{d}$

5.4.2 EXPRESIONES DEL ACI PARA ELEMENTOS DE HORMIGÓN PRETENSADO

Fisuras por cortante

El sentido del cálculo de la capacidad resistente a cortante del hormigón, V_{cw} , se dirige a considerar el incremento que provoca el efecto del pretensado en su carácter de carga axial. Collins propone aplicar un coeficiente γ que incrementa la resistencia del hormigón a cortante, siendo:

$$\gamma = \sqrt{1 + \frac{f_{pc}}{0,33 \sqrt{f'_c}}}$$

Entonces:

$$V_{cw} = 330 \sqrt{f'_c} \gamma \cdot b_w \cdot d + V_p$$

Donde

$$f_{pc} = \sigma^* = \frac{F}{A_g}$$

tensión en el centroide debido a la fuerza de pretensado al ocurrir todas las pérdidas (F_∞)

$$V_p$$

componente vertical de la fuerza de pretensado (F_∞)

d_p peralte efectivo del refuerzo pretensado A_p

El ACI propone la siguiente **expresión simplificada**

$$V_{cw} = 300(\sqrt{f'_c} + f_{pc}) \cdot b_w \cdot d + V_p$$

En ambos casos los datos deben suministrarse en las siguientes unidades:

f'_c, f_{pc}	MPa
b_w, d_p	m
V_u, V_p	kN

Fisuras por flexión – cortante

La filosofía de ACI parte de considerar que la grieta de flexión – cortante en el HP surge cuando la tensión a cortante en el hormigón supera en una pequeña magnitud ($0,05\sqrt{f'_c}$ MPa) al esfuerzo de corte que provoca la fisura por flexión. Se considera por separado la actuación de las cargas permanentes para considerara el caso de secciones compuestas donde estas actúan sobre una parte de la sección y las totales sobre la sección final. La expresión se plantea de la siguiente forma.

$$V_{ci} = 50\sqrt{f'_c} b_w \cdot d_p + V_p + \frac{V_i M_{cre}}{M_{max}}$$

En ella el cortante que provoca la fisura por flexión es la suma entre el cortante debido a las cargas permanentes de servicio V_p mas el término $V_i \frac{M_{cre}}{M_{max}}$. Se expresan los esfuerzos en MPa, las fuerzas en kN y las dimensiones en m

$$V_p = V_u - V_d$$

$$V_p$$

cortante debido a las cargas permanentes de servicio.

$$M_{max} = M_u - M_d$$

$$M_d$$

momento flector debido a las cargas permanentes de servicio

$$M_{cre}$$

momento adicional que produce, además de los efectos del pretensado y las cargas permanentes, una tensión en la fibra traccionada de $0,5\sqrt{f'_c}$ MPa. El cálculo de M_{cre} , para las cargas de servicio, se ilustra en la figura 5,12

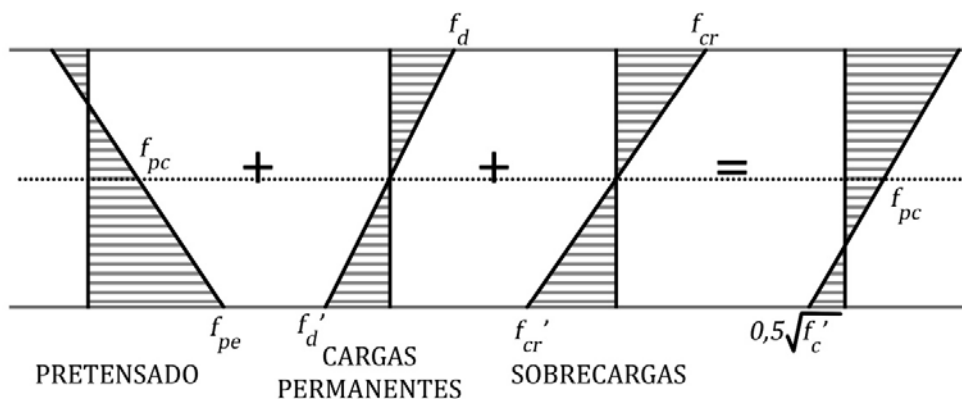


Figura 5.12: Diagramas de esfuerzos normales para las fisuras de flexión- cortante.

Donde:

$$f_{pe} = \frac{F}{A} + \frac{F \cdot e_o}{W'}$$

$$f_d' = \frac{M_d}{W'}$$

$$f_{cr}' = \frac{M_{cre}}{W'}$$

$$W' = \frac{I}{y_t}$$

Entonces

$$f_{cr}' = f_{pe} + 0,05\sqrt{f_c'} - f_d'$$

$$M_{cre} = W'(f_{pe} + 0,05\sqrt{f_c'} - f_d')$$

Estos términos pueden interpretarse de una mejor manera acudiendo a la figura 5,13:

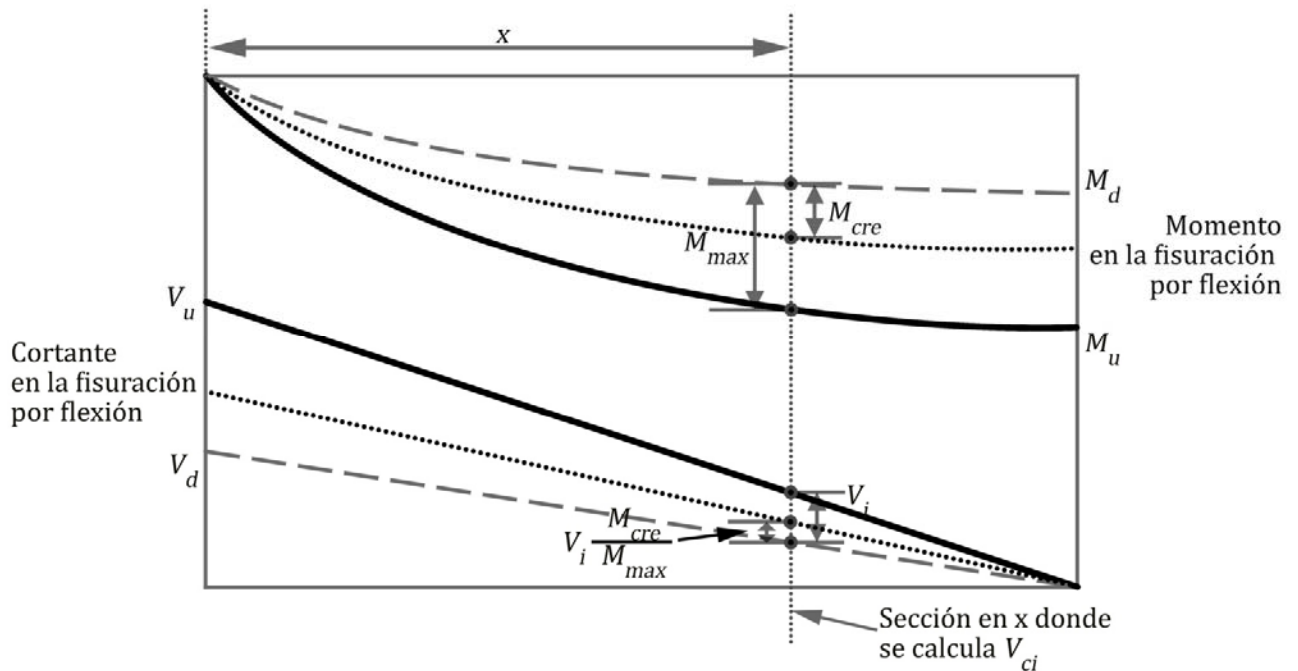


Figura 5.13: Diagramas de momento flector y fuerza cortante para las fisuras de flexión- cortante.

En secciones comunes, no compuestas no se hace necesario separar la actuación de las cargas permanentes y por tanto la norma cubana permite un análisis más sencillo donde:

$$V_{ci} = 50\sqrt{f_c'}b_wd_p + \frac{V_uM_{ci}}{M_u}$$

$$M_{ct} = W'(f_{pe} + 0,05\sqrt{f_c'}) \quad \text{momento de fisuración de la sección a flexión}$$

Ante la complejidad de estos procedimientos el ACI propone la siguiente **expresión simplificada**

$$V_c = \left(50\sqrt{f_c'} + 4800 \frac{V_u}{M_u} d_p \right) b_w d_p$$

En esta expresión no se controla la relación $\frac{V_u}{M_u}$, se controla V_c de forma que

$$170\sqrt{f'_c}b_wd_p \leq V_c \leq 420\sqrt{f'_c}b_wd_p$$

5.4.3 INFLUENCIA DE LA CARGA AXIAL

Para considerar la influencia de la carga axial en la capacidad del hormigón a cortante el ACI recomienda las siguientes expresiones:

Flexocompresión

Para las fisuras por **flexión – cortante**:

$$V_{ci} = \left(160\sqrt{f'_c} + 17000 \frac{V_u d}{M_m} \right) b_w d_p \leq V_{cw}$$

donde:

$$M_m = M_u + N_u \frac{4h - d}{8}$$

Admitiéndose que $\frac{V_u d}{M_m}$ pueda ser mayor que 1

Como expresión simplificada se admite emplear:

$$V_{ci} = \left(170 + 0,0012 \frac{N_u}{A_g} \right) \sqrt{f'_c} b_w d$$

donde:

A_g área de la sección en m^2

N_u valor de la carga axial en kN

Para las **fisuras por cortante** el valor de V_{cw}

$$V_{cw} = 290\sqrt{f'_c}b_wd \sqrt{1 + 0,00028 \frac{N_u}{A_g}}$$

Entre los valores de V_{vi} y V_{cw} se toma el menor

Flexotracción

$$V_{ci} = \left(170 + 0,045 \frac{N_u}{A_g} \right) \sqrt{f'_c} b_w d$$

donde N_u es la carga a tracción considerada como negativa

Simplificadamente puede considerarse $V_{ci} = 0$

En las figuras que aparecen en 5,14 se puede apreciar la influencia de los factores más influyentes en la resistencia a cortante del hormigón, a través de las expresiones de cálculo indicadas por las normativas. En la figura 5,14a se evidencia la influencia de la de la resistencia del hormigón, la armadura principal, dada por el término ρ_w , y la de la relación entre $\frac{V_u}{M_u}$. En esta comparación se destaca:

- La expresión más simplificada propuesta por el ACI, produce resultados conservadores (en línea discontinua en el gráfico)
- Se demuestra claramente la influencia de la cuantía ρ_w , la relación $\frac{a}{d} = \frac{M}{V \cdot d}$ y la resistencia del hormigón; incluidas dentro de la expresión mas detallada.

En la figura 5,14b se demuestra la influencia de la carga axial en la resistencia a cortante del hormigón, cuando se utilizan la expresión simplificada. No obstante permite apreciar como en

secciones a flexocompresión crece notablemente el valor de V_c y tiene un peso más significativo la resistencia del hormigón.

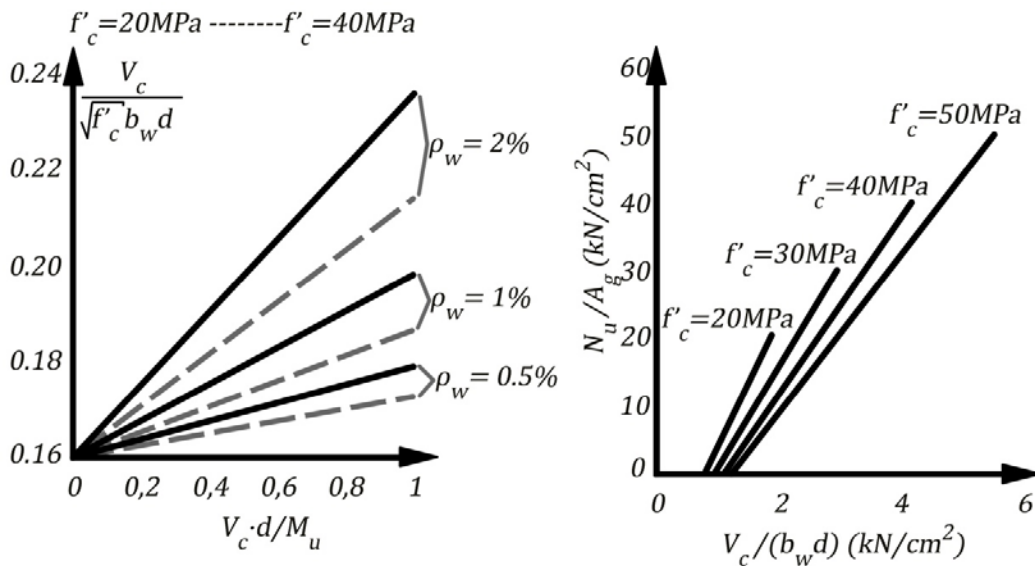


Figura 5.14: Influencia de diversos factores en la resistencia a cortante del hormigón.

5.5 MECANISMO DE RESISTENCIA A CORTANTE EN VIGAS CON REFUERZO EN EL ALMA. APORTE DEL REFUERZO TRANSVERSAL

La inclusión del refuerzo transversal resulta un elemento beneficioso, desde todo punto de vista, para la resistencia a cortante del hormigón. Estos beneficios pueden resumirse en:

- En los “voladizos” de la acción de viga toma las tracciones que se generan en el empotramiento, cose la grieta evitando su ensanchamiento y por tanto se incrementa V_a
- Favorece el anclaje de las barras y por tanto contribuye a la adherencia del acero e incrementa el efecto de dovola.
- Cuando el espaciamiento es pequeño produce confinamiento en el hormigón que mejora su f'_c .

Finalmente el refuerzo trasversal preserva el aporte del hormigón a cortante V_{ci} y permite que este refuerzo tome las tensiones adicionales que surjan.

Hasta hace poco se consideraba, conservadoramente, que el refuerzo en el alma no provocaba incrementos en V_c utilizándose las mismas expresiones en ambos casos. Sin embargo el CEB-FIB (y la NC 1989) expresa fórmulas diferentes en el caso de vigas sin refuerzo transversal. Los estudios más profundos para calcular el aporte del hormigón a cortante se han realizado en secciones sin refuerzo en el alma. Sin embargo se recomienda, no solo cuando se requiere por cálculo, colocar refuerzo transversal, pues éste mejora sensiblemente el comportamiento del hormigón a cortante por las razones antes expuestas.

El ACI conservadoramente mantiene expresiones semejantes tenga o no la sección refuerzo en el alma.

Finalmente el mecanismo resistente de la sección a cortante puede plantearse como

$$V_u \leq \phi V_n = \phi(V_c + V_s)$$

Si ocurre que:

$$V_u > \phi V_c$$

Entonces se requerirá colocar refuerzo transversal en el alma, donde el aporte necesario del refuerzo será:

$$V_s = \frac{V_u}{\phi} - V_c$$

5.5.1 ANALOGÍA DE LA ARMADURA

Es universalmente aceptado hacer una analogía de la acción del refuerzo transversal con una armadura de cordones paralelos, donde el hormigón forma los tirantes comprimidos y el acero los traccionados.

En la figura 5,15 se aprecia con claridad el símil.

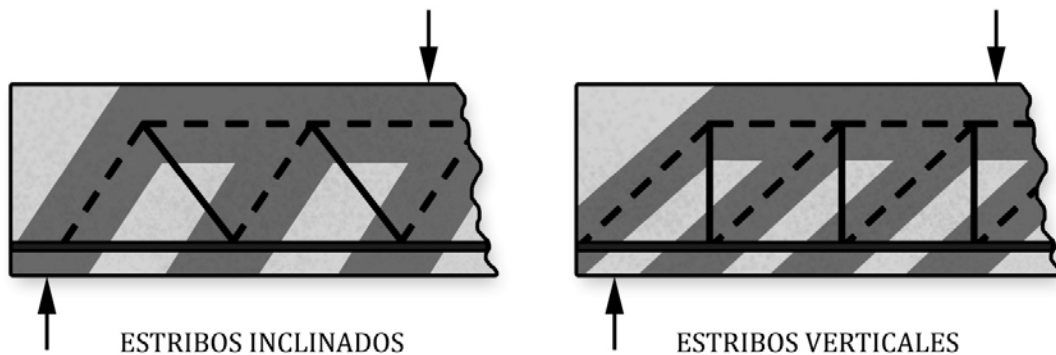


Figura 5,15: Analogía de la armadura.

Se considera que entre grietas el hormigón trabaja a compresión y la zona comprimida aporta el cordón superior también comprimido. El acero longitudinal formará el cordón inferior a tracción y el conjunto de barras transversales que cosen la grieta forma el tirante a tracción, inclinadas un ángulo α .

Si se analiza el equilibrio de esta armadura ideal y con el apoyo de la figura 5,16, puede determinarse el aporte del refuerzo al cortante

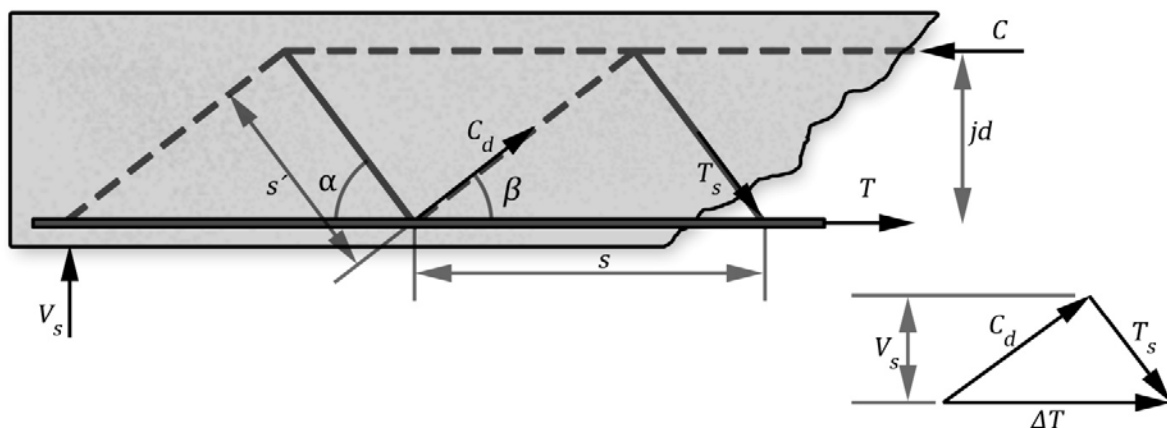


Figura 5,16: Equilibrio de la armadura virtual

Como se expresó T_s , es el aporte de todo el refuerzo a lo largo de la grieta, inclinadas un ángulo β , de forma que:

$$\frac{T_s}{s} = \frac{A_s f_{yt}}{s}$$

Y como:

$$s = jd(\cot\beta + \cot\alpha)$$

$$T_s = \frac{V_s}{\text{sen}\alpha}$$

$$\frac{T_s}{s} = \frac{V_s}{jd \text{sen}\alpha(\cot\beta + \cot\alpha)} = \frac{A_s f_{yt}}{s}$$

Entonces:

$$A_s = \frac{V_s \cdot s}{jd \cdot f_{yt} \text{sen}\alpha(\cot\beta + \cot\alpha)}$$

Donde A_s es el área de acero en una distancia s y f_{yt} la resistencia de este

Si se quisiera evaluar el trabajo del hormigón, sabido que las bielas tienen un espesor s' , puede plantearse:

$$s' = s \cdot \text{sen}\alpha = jd \cdot \text{sen}\alpha(\cot\beta + \cot\alpha)$$

Entonces:

$$f_{cd} = \frac{C_d}{b_w \cdot s'} = \frac{V_s}{b_w \cdot jd \cdot \text{sen}^2\alpha(\cot\beta + \cot\alpha)}$$

5.5.2 MÉTODO DEL ACI

El ACI considera como simplificaciones para facilitar los cálculos:

- $jd = d$, y siendo consecuente con la expresión de:

$$v_s = \frac{V_s}{b_w jd} = \frac{V_s}{b_w d}$$

- $\beta = 45^\circ$, considerar la inclinación de la grieta a cortante constante, y a 45°

Entonces la expresión de A_s y f_{cd} quedarán:

$$A_s = \frac{V_s \cdot s}{d \cdot f_{yt}(\text{sen}\alpha + \cos\alpha)} \quad \text{y para } \alpha = 90^\circ, \text{ estribos verticales } A_s = \frac{V_s \cdot s}{d \cdot f_{yt}}$$

$$f_{cd} = \frac{2V_s}{b_w d(1 + \cot\alpha)} \quad \text{y para } \alpha = 90^\circ, \text{ estribos verticales } f_{cd} = \frac{2V_s}{b_w d}$$

Un análisis de esta última simplificación demuestra que es una solución conservadora. La experimentación ha demostrado que las grietas ocurren con ángulos menores que 45° y que por tanto el cortante V_s a soportar, se distribuirá en una longitud s mayor y requerirá menos refuerzo. Visto en las expresiones obtenidas, como ejemplo para $\beta = 90^\circ$

$$A_s = 0,58 \frac{V_s \cdot s}{d \cdot f_{yt}} \quad \text{considerando } \alpha = 90^\circ, \text{ estribos verticales}$$

Por último debe destacarse que un exceso de armadura puede provocar el fallo por las bielas de hormigón a compresión. Esto se controla por diferentes normas, como en la cubana, por medio de evitar que V_s sea muy grande. En la expresión obtenida.

$$f_{cd} = \frac{2V_s}{b_w d}$$

El ACI plantea que $f_{cd} \leq 2v_s$ valor reconocido como muy conservador

El CEB plantea $f_{cd} \leq 0,67f'_c$

5.6 COMPROBACIÓN DE SECCIONES A CORTANTE

Es conocido que la comprobación o revisión de secciones se basa en calcular la resistencia nominal de esta, conocido el dimensionamiento de la sección de hormigón, la cantidad de refuerzo transversal y su colocación, y la resistencia de los materiales. Dentro de estos datos resulta clave precisar los valores de:

- A_v área del estribo empleado y el número de patas que atraviesa la grieta.
- s espaciamiento de los estribos. Si este es variable a lo largo de la viga, determinar la relación entre espaciamiento, número de estribos y distancia en que están colocados.

A continuación se desarrolla un ejercicio donde se profundiza en la obtención de la capacidad resistente del hormigón a cortante.

Ejercicio 5.1

Calcule la resistencia a cortante en la viga que se muestra en la figura 5,17

- 1) Obtenga las carga de fisuración para que aparezcan:
 - a. Para las grietas de cortante
 - b. Para las grietas de flexión – cortante
 - c. Para las grietas por flexión
- 2) Analice para cada tramo la aparición de cada tipo de grieta
- 3) Obtenga el aporte del refuerzo de estribos N° 10 a 90°, si están colocados con espaciamiento de 20cm en los voladizos y de 15cm en el resto de la viga
- 4) Obtenga el valor de P máximo que puede soportar la viga sin fallar a cortante.

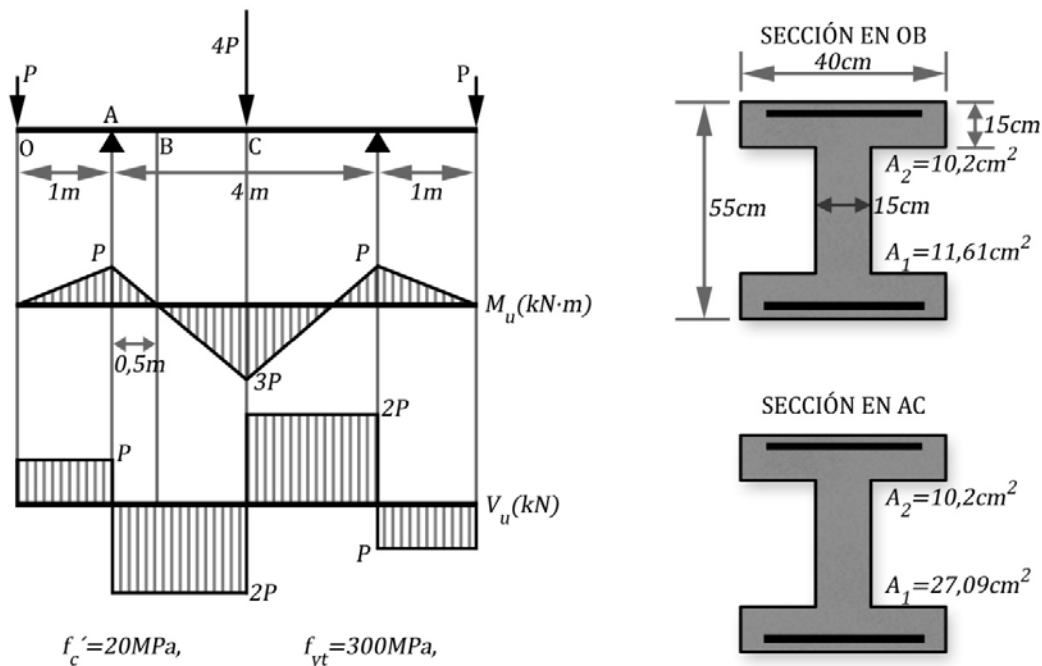


Figura 5,17: Ejercicio 5,1

Cálculos y discusión

1. Determinación de la fuerza cortante para las *grietas de cortante*.

Para este tipo de grietas la fuerza cortante se obtiene por:

$$V_{cw} = 290\sqrt{f'_c}b_wd$$

Donde:

$b_w = 0,15m$ para la sección T, a lo largo de toda la viga

$d = h - d_s$ Para el cálculo de d_s se puede determinar los recubrimientos en función de los diámetros de las barras y conociendo que el recubrimiento neto es de 35 mm. Con el auxilio de la Tabla A-8 de los anexos se determina:

$d_s = 5,72cm$ $d = 49,28cm$ para las barras N° 25, colocadas en la fibra superior

$d_s = 7,78cm$ $d = 47,22cm$ para las 7 barras N° 22 situadas en 2 camadas

Finalmente:

$$V_{cw} = 290\sqrt{20} \cdot 0,15 \cdot 0,493 = 95,87kN \quad \text{para el tramo OB}$$

$$V_{cw} = 290\sqrt{20} \cdot 0,15 \cdot 0,472 = 91,86kN \quad \text{para el tramo BC}$$

2. Determinación de la fuerza cortante para las *grietas de flexión-cortante*.

Para este tipo de grietas la fuerza cortante se obtiene por:

$$V_{cw} = \left(160\sqrt{f'_c} + 17000\rho_w \frac{V_u d}{M_u}\right) b_w d$$

Como se aprecia el valor de V_{ci} es variable a lo largo de la viga en función de la cuantía del refuerzo principal a tracción (ρ_w) y de la relación entre la fuerza cortante y el momento flector expresado en $\frac{V_u d}{M_u}$. En función del valor de x , los valores obtenidos se muestran en la tabla 5,1. Los valores de x se seleccionan donde se producen cambios de dichos parámetros, sobre todo en los cortes de barras, cambios del sentido del momento flector o la fuerza cortante.

TABLA 5,1: Cálculo de V_{ci} para grietas de flexión cortante.

	x (m)	A_{real} (cm^2)	$\rho_w = A/bd$	V_u (kN)	M_u (kN.m)	$V_u \cdot d / M_u$	V_{ci} (kN)	V_u / M_u	V_{cr} (kN)
MOMENTO NEGATIVO. TRAMO OB	-1	10,2	0,01380	P	0	1	70,23		
	-0,75	10,2	0,01380	P	0,25P	1	70,23	4	210,52
	-0,5	10,2	0,01380	P	0,5P	0,986	69,98	2	105,26
	-0,25	10,2	0,01380	P	0,75P	0,657	64,29	1,333	70,17
	0	10,2	0,01380	2P	P	0,493	61,44	1	52,63
	0	10,2	0,01380	2P	P	0,986	69,98	2	105,26
	0,25	10,2	0,01380	2P	0,5P	1	70,23	4	210,52
	0,5	10,2	0,01380	2P	0	1	70,23		
MOMENTO POSITIVO. TRAMO BC	0,5	27,09	0,03825	2P	0	1	96,73		
	0,75	27,09	0,03825	2P	0,5P	1	96,73	4	210,52
	1	27,09	0,03825	2P	1 P	0,944	94,17	2	105,26
	1,5	27,09	0,03825	2P	2P	0,472	72,43	1	52,63
	2	27,09	0,03825	2P	3P	0,315	65,18	0,667	35,09

De estos resultados pueden hacerse los siguientes comentarios:

- La selección del área de refuerzo a considerar en la expresión de V_{ci} depende del corte de barras. En este ejercicio donde el corte de barras es muy sencillo se divide en dos: el 1ero cuando está traccionada la fibra superior y $A_s = 10,2\text{cm}^2$ y la 2da cuando está traccionada la fibra inferior y $A_s = 27,09\text{cm}^2$.
- En la determinación de la relación $\frac{V_u d}{M_u}$ debe tomarse en cuenta que esta no debe ser mayor que 1. En la tabla 5,1 se destaca que se coloca 1 cuando esto ocurre.
- Si el aporte del hormigón se obtiene por la expresión simplificada:

$$V_c = 170\sqrt{f'_c} b_w d$$

$$V_c = 170\sqrt{20} \cdot 0,15 \cdot 0,49 = 56,2\text{kN}$$

Valor inferior al calculado por la expresión más detallada en cualquier punto de la viga. Esta comparación refuerza la recomendación de emplear, siempre que sea oportuno, la expresión que considera los elementos resistentes de manera mas completa.

3. Determinación de la fuerza cortante para las *grietas de flexión*.

En la determinación de la fuerza cortante para este caso V_{cr} se plantea la siguiente relación

$$\frac{M_{cr}}{V_{cr}} = \frac{M_u}{V_u}$$

Por lo que el cortante de fisuración a flexión se determinará por $V_{cr} = M_{cr} \frac{V_u}{M_u}$

Entonces la clave del problema está en obtener el momento de fisuración de la sección, M_{cr} . En el capítulo 7 se profundizará sobre este particular, buscando una solución simple para este ejercicio se considerará solo el aporte de la sección bruta de hormigón. De forma tal que:

$$M_{cr} = f_r \frac{I}{y_t}$$

Donde:

$$f_r = 0,62\sqrt{f'_c} = 0,62\sqrt{20} = 2,77\text{MPa}$$

$$I = 522031,24\text{cm}^4$$

$$y_t = \frac{h}{2} = 27,5\text{cm}$$

Finalmente:

$$M_{cr} = 0,277 \frac{522031,25}{27,5} = 5263 = 52,63\text{kN.m}$$

El cortante de fisuración para la viga se muestra en la tabla 5,1 en función de la relación $\frac{V_u}{M_u}$

En la figura 5,18 se vuelcan los valores de las fuerzas cortantes que provocan los tres tipos de fisuras a lo largo de la viga. De un análisis comparativo pueden extraerse las siguientes conclusiones:

- Las *fisuras por flexión* anteceden a las demás en importantes tramos de la viga, como se ilustra en la figura 5,18, coincidiendo con los puntos de mayor momento flector y cuando este excede el momento de fisuración. Solo en la zona interior de los apoyos donde coincide con el momento máximo un gran valor de fuerza cortante aparecen primero grietas de flexión cortante.

- Las **fisuras de flexión cortante** predominan en las zonas del extremo del voladizo y en el interior de los apoyos. En este proceso se destacan los siguientes aspectos:
 - El papel del refuerzo traccionado o efecto dovela, que provoca un incremento del aporte del hormigón a cortante a partir de comenzar a traccionarse la fibra inferior ($x = 0,5m$). el salto en V_{ci} se aprecia claramente en la figura 5,18.
 - La influencia de la relación $\frac{V_u d}{M_u}$ que provoca los valores menores cuando coinciden los máximos valores de momento flector y fuerza cortante: sobre los apoyos y en el centro de la luz. Es importante señalar como la restricción de que $\frac{V_u d}{M_u}$ no puede sobrepasar el valor de l , provocando valores límites de V_{ci} en las zonas con pequeños momentos flectores.
- Entre $x = 0,5m$ y aproximadamente $1m$ predominan las **grietas por cortante**, debido a una reducción de V_{cw} por la disminución del peralte efectivo. Esta es una zona con gran fuerza cortante y momento flector prácticamente cero

Para los estribos colocados en la viga se calcula su aporte empleando la expresión general:

Conociendo que se emplean estribos N° 10 el valor de A_v correspondiente a 2 patas será de $1,42cm^2$. Entonces para cada tramo:

Para un espaciamiento de los estribos de 20cm y un peralte efectivo de $49,29\text{cm}$:

$$V_s = \frac{1,42 \cdot 30 \cdot 49,28}{20} = 104,97kN$$

b. *Zona entre apoyos*

Para un espaciamiento de los estribos de $15cm$ y un peralte efectivo de $47,22cm$ cuando la fibra traccionada es la inferior y de $49,29cm$ cuando es la superior:

$$V_s = \frac{1,42 \cdot 30 \cdot 49,28}{15} = 139,96kN \quad \text{para tramo AB, fibra superior traccionada}$$

$$V_s = \frac{1,42 \cdot 30 \cdot 47,22}{15} = 134,1kN \quad \text{para tramo BC, fibra inferior traccionada}$$

5. Determinación del cortante resistente de la viga.

Finalmente el cortante que resiste la viga será:

$$V_u \leq \phi V_n = \phi (V_c + V_s)$$

Entonces para cada tramo debe determinarse que valor de V_c es el que predomina:

Para los **voladizos** el valor menor de V_c será el correspondiente al apoyo:

$$V_c = 61,44kN \quad V_u = 0,75(61,44 + 104,97) = 124,81kN$$

Conociendo que para el cortante $\phi = 0,75$

Para la **zona entre apoyos** el valor menor de V_c será el correspondiente al centro de la luz donde la fibra traccionada es la inferior, entonces:

$$V_c = 65,18kN \quad V_u = 0,75(65,18 + 134,1) = 149,46kN$$

Y como el problema planteado es la obtención del valor máximo de P que puede resistir la viga, se hace evidente que la **zona más crítica es la situada entre apoyos** donde:

$$V_u = 2P \quad \text{y entonces} \quad P = 74,73kN$$

5,7 RECOMENDACIONES DE DISEÑO Y CONSTRUCCIÓN

El reglamento ACI 318-02 establece tres condiciones para poder calcular el máximo esfuerzo mayorado de cortante, V_u :

- La reacción en el apoyo, en la dirección de la fuerza cortante aplicada, introduce compresión en las regiones de los extremos del elemento.
- Las cargas se aplican en la parte superior del elemento o cerca de la parte superior del elemento.
- No hay cargas concentradas entre el borde del apoyo y la ubicación de la sección crítica, la cual está a una distancia d , medida a partir del borde del apoyo.

Estas restricciones se representan en la figura 5,19

1. Cortante en el apoyo

Se considera que a una distancia d del apoyo el cortante se trasmite directamente a él, por lo que no actúa directamente sobre la viga, para distintos tipos de apoyo y formas de la carga se muestran en la figura 5,17.

El valor de cortante V_u a considerar en los cálculos es el que actúa a una distancia:

$$\begin{array}{ll} d & \text{para HA} \\ \frac{h}{2} & \text{para HP} \end{array}$$

Debe garantizarse que el refuerzo calculado para este valor de cortante se extienda hasta el extremo de la viga.

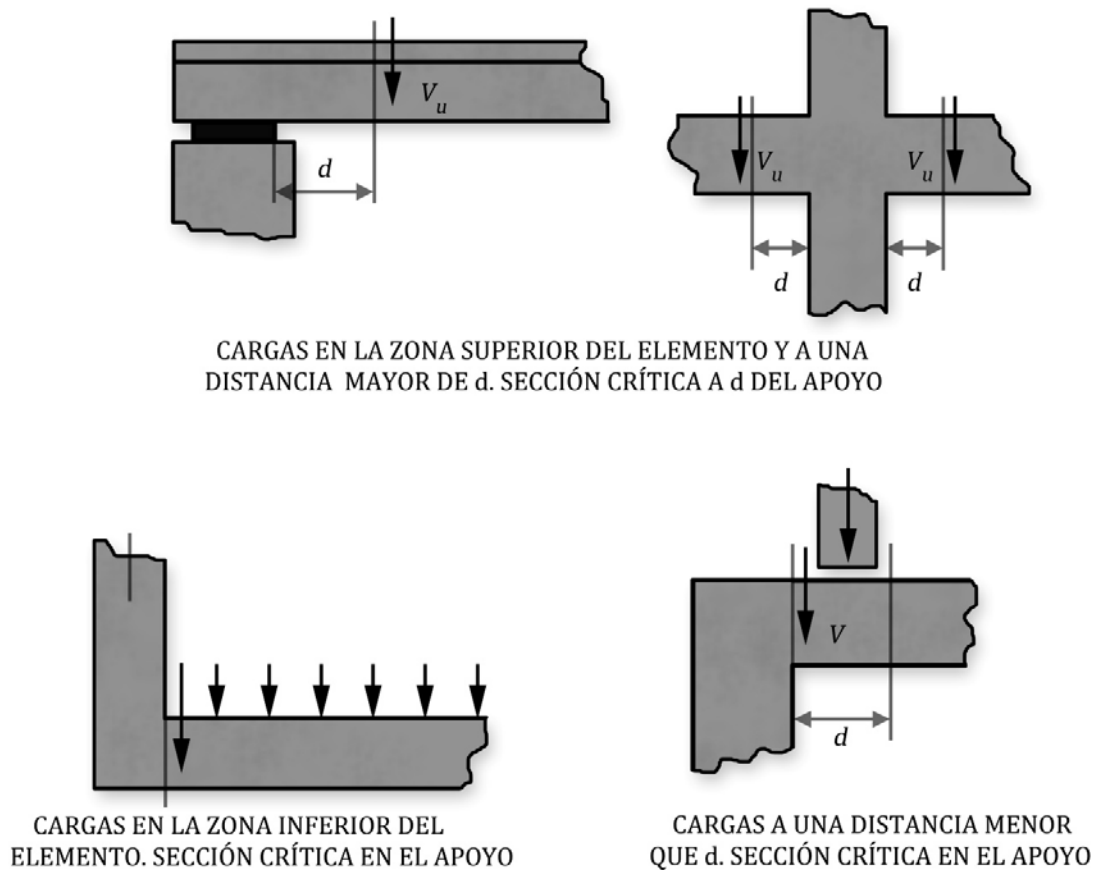


Figura 5,19: Recomendaciones de diseño. Cortante en el apoyo. Sección crítica

2. Cortante máximo

Para evitar el fallo de las bielas a compresión, como se explicó anteriormente, deben cumplirse las siguientes condiciones:

$$V_s \leq 660\sqrt{f'_c}b_wd$$

$$\text{ó} \quad V_s < 4V_c$$

Lo que puede expresarse como:

$$V_u < 5\phi V_c$$

3. Disposiciones respecto al refuerzo longitudinal

- El refuerzo A_s se trasladará $\frac{3}{4}d$ en la dirección más desfavorable para asegurar que responda a la traslación de los esfuerzos provocados por las grietas de cortante, lo que puede apreciarse en el gráfico 5,20.
- La armadura A_s que llegue a los apoyos deberá cumplir:
 - $A_s = \frac{0,75R}{f_y}$, donde R es la reacción de apoyo
 - Un tercio del A_s para el momento máximo, en apoyos extremos
 - Un cuarto del A_s para el momento máximo, en apoyos intermedios
 - La mitad del A_s para el momento máximo, en losas

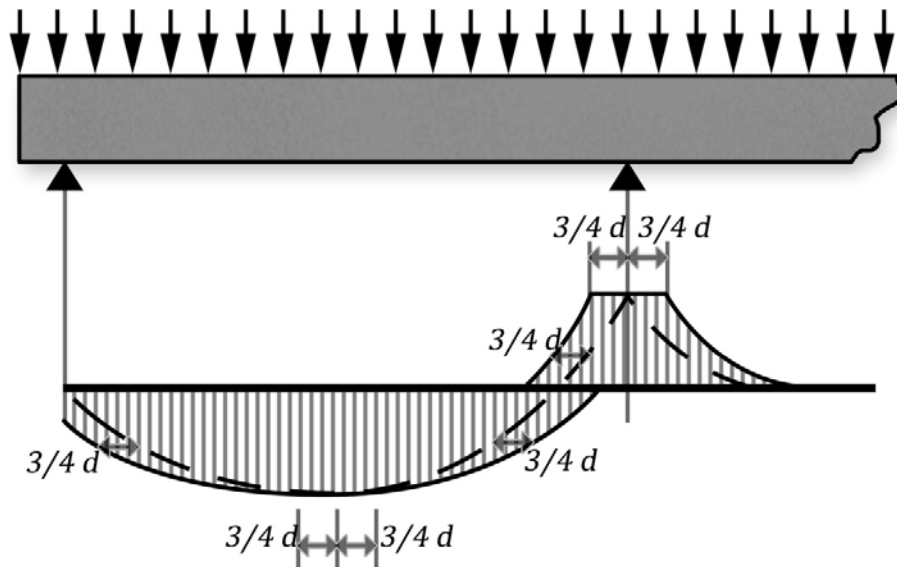


Figura 5,20: Regla de traslación

4. Disposiciones sobre el refuerzo transversal

- El espaciamiento máximo a colocar en la viga será:

- $s_{max} \leq \frac{d}{2}$

- $s_{max} \leq 60cm$

si $V_s > 2 V_c$ el espaciamiento anterior se reducirá a la mitad

- Cuando se requiere refuerzo por cálculo ($V_u > \phi V_c$) debe garantizarse que:

$$A_{v,min} = 0,062 \frac{\sqrt{f'_c} b_w s}{f_{yt}} \quad \text{siempre menor que} \quad 0,35 \frac{b_w s}{f_{yt}}$$

La que en plano práctico resulta como:

$$A_{v,min} = 0,35 \frac{b_w s}{f_{yt}} \quad \text{para} \quad f'_c \leq 30MPa$$

$$A_{v,min} = 0,062 \frac{\sqrt{f'_c} b_w s}{f_{yt}} \quad \text{para} \quad f'_c > 30MPa$$

Expresada como espaciamiento máximo:

$$s_{max} = \frac{A_v f_{yt}}{0,35 b_w} \quad \text{para} \quad f'_c \leq 30MPa$$

$$s_{max} = \frac{A_v f_{yt}}{0,062 \sqrt{f'_c} b_w} \quad \text{para} \quad f'_c > 30MPa$$

- Ante un cambio brusco de cortante la colocación de los estribos se prolongará un valor de $\frac{h}{2}$ con el valor del espaciamiento de esa zona.
- Si $h > 1m$ se colocarán barras longitudinales en los laterales de la sección separadas como máximo $50 cm$.
- El diámetro de los estribos no será menor de $3mm$ ó $\frac{1}{4}$ del diámetro de la barra principal
 - No se admitirán diseños con solo barras dobladas. Los estribos deben tomar al menos el 50% de V_s

- Si $V_u < 0,5\phi V_c$ no será necesario colocar refuerzo por cortante.
- Se admite no colocar refuerzo transversal por cortante, obviando las recomendaciones anteriores, en los siguientes elementos:
 - Losas, cimientos, paredes de depósitos y muros
 - Vigas en que:
 - $h < 25\text{cm}$ en secciones rectangulares
 - $h < 2,5h_f$ en secciones T
 - $h < 0,5b_w$

5,8 ÁREA TOTAL DE REFUERZO. DISTRIBUCIÓN.

Si se toma en cuenta que los valores de V_u y V_c son variables a lo largo de la viga, también lo será V_s y naturalmente el espaciamiento s de los estribos no será uniforme. Esta situación puede apreciarse en la figura 5,21, donde se representan las longitudes l_r , y el área del gráfico a reforzar, Ω , y se destacan:

- cortante resistente considerando la expresión más detallada, V_{ci}
- cortante resistente considerando la expresión simplificada, V_c
- distancia a reforzar, l_{r1} , para la zona en que se requiere acero transversal por cálculo
- distancia a partir de la cual no se requiere colocar refuerzo transversal, l_{r2}

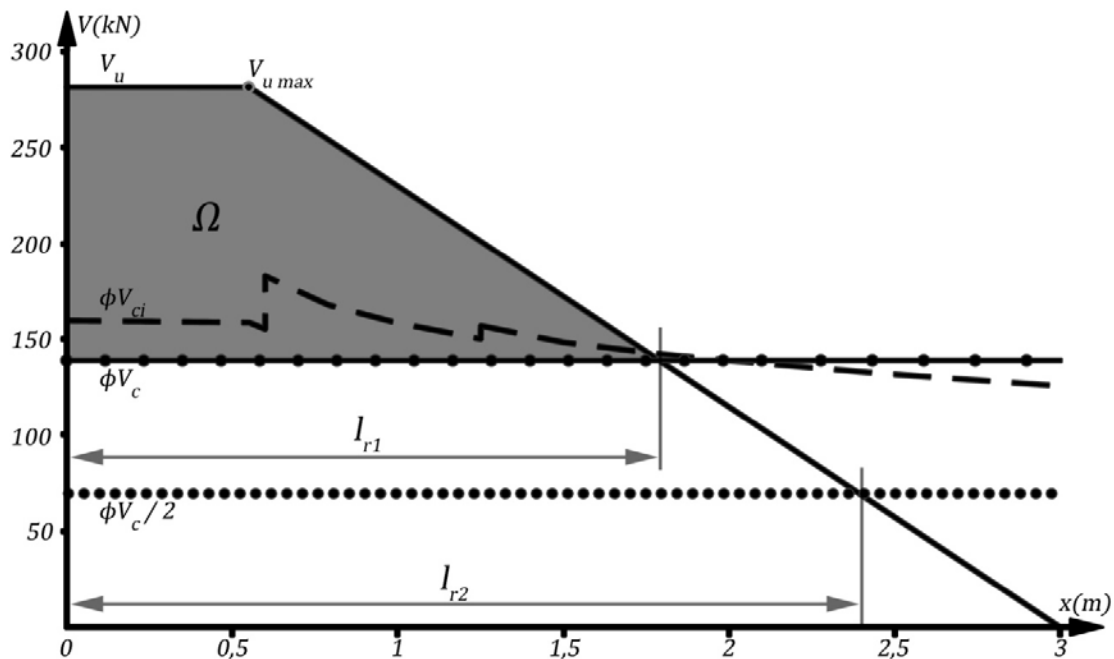


Figura 5,21: Distancia y área a reforzar

El cálculo de esta área resulta práctico cuando se emplea la expresión simplificada, ya que permitirá conformar figuras geométricas conocidas y simples, que faciliten obtener estos valores de forma directa. En la figura 5,22 se muestran las formas mas comunes que pueden adoptar estas áreas a reforzar.

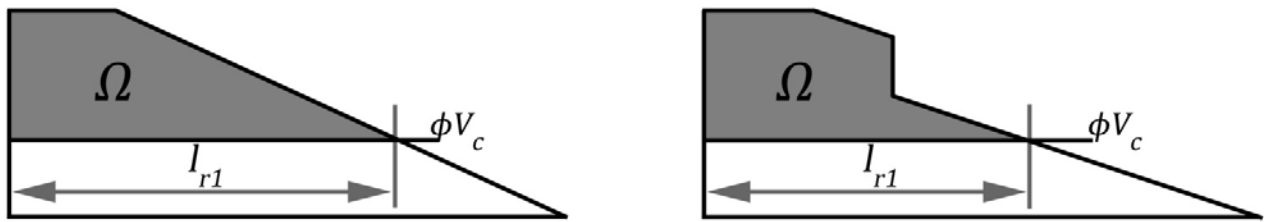


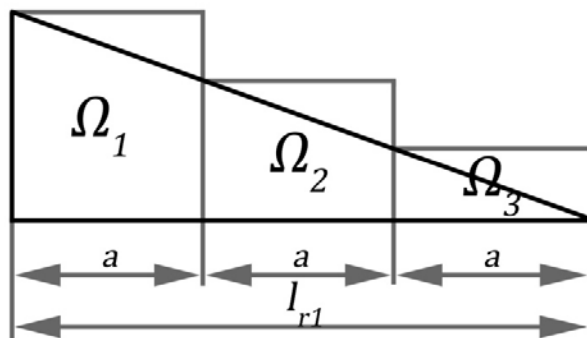
Figura 5,22: Distintas formas del área a reforzar

El valor de l_r es prácticamente el mismo obtenido considerando V_{ci} o V_c por lo que puede calcularse por la expresión más simple. El problema entonces se reduce al cálculo del área a reforzar Ω y finalmente el área de refuerzo necesario en toda esta zona será:

$$A_v = \frac{\Omega}{\phi f_{yt} d}$$

Finalmente se calculará el número de estribos equivalente a esta área de acero y se distribuirán de acuerdo a la forma que tenga el área Ω .

La distribución de los estribos en esta área responderá a su forma y por tanto es como regla variable. Es obvio que el espaciamiento de todos los estribos no puede ser diferente por lo que, se buscan soluciones que respondan mejor a las exigencias del constructor, en esta dirección es que se agrupan varios estribos con el mismo espaciamiento garantizando que siempre sea segura la solución. Este procedimiento, que se esquematiza en la figura 5,23, conduce a dividir la zona a reforzar en partes iguales y en cada una de ellas calcular el número de estribos y el espaciamiento requerido y parte de determinar el número de zonas en que debe dividirse el área en lo que la experiencia del proyectista es decisiva



$$A_{v1} = \frac{\Omega_1}{f_{yt} d}$$

$$N^{\circ} \text{ estribos} = \frac{A_{v1}}{2A_b}$$

$$s_1 = \frac{a}{N^{\circ} \text{ estribos}}$$

Figura 5,23: Distribución de los estribos.

Entre los procedimientos mas empleados pueden señalarse los siguientes:

a) Método de los números impares

Como una ayuda a la distribución de los estribos se ha empleado en Cuba, ver lo recomendado por Medina y Ruiz, el llamado “método de los números impares”, que consiste en tomar los números impares; 1, 3, 5, 7, etc, hasta llegar al número total de estribos requeridos. Entonces el total indica la cantidad de partes en que debe dividirse el área. Cada parte tendría una cantidad de cercos

diferentes en correspondencia a la división efectuada. Por ejemplo si se requieren 16 cercos, se suman $1+3+5+7=16$, por lo que emplearán 4 números impares y estas serán las zonas en que se subdividirá el área a reforzar. Finalmente se colocarán:

- 7 estribos en la primera porción
- 5 estribos en la segunda
- 3 estribos en la tercera
- 1 estribos en la cuarta porción

Babé considera que el procedimiento resulta solo válido en la medida que la cantidad de estribos se acerque a cualquiera de la suma de los números impares ya que en otros casos puede provocar soluciones sobreamadas. Como solución alternativa recomienda el siguiente enfoque:

b) *Método del Cortante Límite*

- Calcular el espaciamiento requerido para el cortante máximo $V_{u\max}$

$$s_x = \frac{\phi A_v f_{yt} d}{V_{u\max} - \phi V_c}$$

- Calcular la distancia, l_{rx} , en que el espaciamiento es el máximo exigido para la zona en que es necesario refuerzo por cálculo. Entonces:

$$V_{ux} = \frac{\phi A_v f_{yt} d}{s_{\max}} + \phi V_c$$

Y el valor de l_{rx} se obtiene por relaciones geométricas como se representa en la figura 5,24,

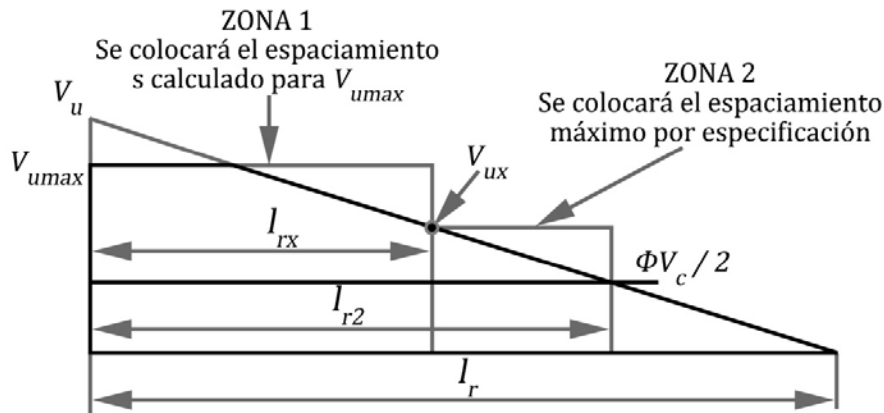


Figura 5,24: Distribución de los estribos. Método del Cortante Límite

Donde

V_u valor de cortante en el apoyo

l_r distancia del apoyo al punto de momento cero

Entonces:

$$l_{rx} = l_r \left(1 - \frac{V_{ux}}{V_u} \right)$$

Para vigas grandes o con elevada cantidad de estribos, puede evaluarse subdividir la primera zona una o dos veces buscando una solución mas cercana a los verdaderos requerimientos de refuerzo transversal.

Este procedimiento se hace más efectivo con la ayuda de tablas, como recomienda el PCA, que ofrecen los valores de cortante que aporta el refuerzo transversal, ϕV_s , para distintos espaciamientos, resistencia del acero y diámetros de las barras. Los valores para los estribos mas empleados en Cuba se exponen en la tabla 5,2.

c) *Método gráfico del espaciamiento requerido.*

Otra vía de lograr la distribución de los estribos es plotear una función s vs x que permita establecer con mayor claridad las necesidades de colocación de los estribos en cada zona de la viga. Esta alternativa resulta la más conveniente cuando se emplea la expresión detallada.

Partiendo de la expresión general:

$$V_s = \frac{\phi A_v f_{yt} d}{s}$$

$$V_s = V_u - \phi V_c$$

TABLA 5,2: Valores ϕV_s en función del diámetro del estribo, la resistencia del acero y el espaciamiento.

	$f_y = 300 \text{ MPa}$			$f_y = 420 \text{ MPa}$		
ESTRIBOS N^a	10	13	16	10	13	16
$d/2$	63,9	116,1	179,1	89,46	162,54	250,74
$d/3$	95,85	174,15	268,65	134,19	243,81	376,11
$d/4$	127,8	232,2	358,2	178,92	325,08	501,48

Y entonces para diferentes valores de x a lo largo de la viga podría calcularse el espaciamiento necesario por:

$$s_i = \frac{\phi A_v f_{yt} d}{V_{ui} - \phi V_{ci}}$$

Donde:

- A_v área del estribo, en función del número de patas que cortan la grieta
- V_{ui} y V_{ci} valores de cortante actuante y resistente del hormigón a una distancia x
- s_i espaciamiento de los estribos necesario en x

En la figura 5,25 se representa gráficamente el espaciamiento requerido s en función de x y en líneas punteadas la solución real adoptada para satisfacer la anterior.

5,9 DISEÑO POR CORTANTE

El diseño de las vigas a cortante es un proceso al que se llega cuando se han cumplido otras fases de los cálculos estructurales del elemento, es decir se ha obtenido el refuerzo principal a flexión, se han chequeado los Estados Límites de Utilización: fisuración y deformación, y revisado todos las disposiciones constructivas reglamentadas. Por tanto se manejan los siguientes datos:

- Solicitaciones externas: M_u y V_u

- Dimensiones de la sección transversal y longitudinal
- Resistencia de los materiales: f'_c y f_y
- El acero longitudinal y su distribución: en la secciones transversal y longitudinal

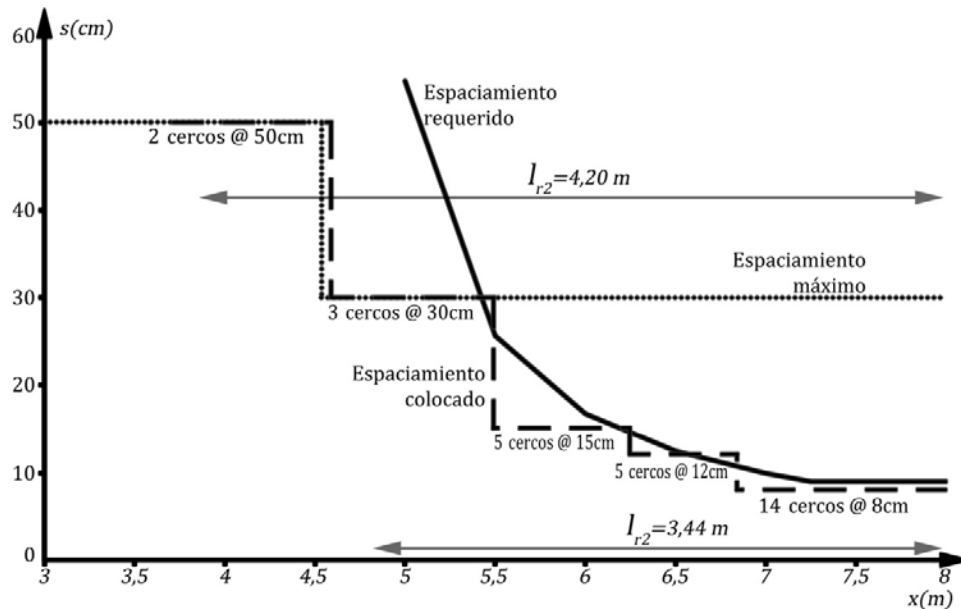


Figura 5,25: Distribución de los estribos. Método gráfico.

El proceso de diseño a cortante puede organizarse planteando los siguientes pasos:

1. Cálculo del gráfico de V_u y de la sección crítica
2. Cálculo del cortante resistente del hormigón: V_c
3. Cálculo de los espaciamientos máximos y las longitudes a reforzar
4. Cálculo del área de refuerzo y su distribución.

En la tabla 5,3 se brinda un resumen sobre los procedimientos de diseño de una sección a cortante. Aunque responde principalmente al método del “Cortante Límite” tiene valor metodológico para cualquier caso. Se diferencian los casos en que, para $V_u \geq \phi V_c$, el espaciamiento se calcula por las expresiones de refuerzo mínimo, lo que en la tabla se la llama “espaciamiento requerido”. Sin embargo lo mas común en vigas de edificios es que este espaciamiento sea menor que la mitad del peralte efectivo, por lo que predominará la condición de “espaciamiento máximo” y entonces la solución se simplifica a un solo espaciamiento en toda la viga ($\frac{d}{2}$) cuando $\phi V_c < V_u < V_{ux}$ y a dos ($s_x, \frac{d}{2}$) cuando $V_u > V_{ux}$.

TABLA 5.3: Espaciamientos de los estribos y longitudes a reforzar para diferentes casos de diseño.

CASOS	ESPACIAMIENTO DE LOS ESTRIBOS	LONGITUD A REFORZAR
$V_u \leq \phi \frac{V_c}{2}$	NO REQUIERE REFUERZO TRANSVERSAL	
$\phi \frac{V_c}{2} < V_u \leq \phi V_c$	ESPACIAMIENTO MÁXIMO $s_{max} \leq 0,5.d$ $s_{max} \leq 60 \text{ cm}$	$l_{r2} = l_r \left(1 - \frac{\phi V_c}{V_u} \right)$
$\phi V_c < V_u \leq V_{ux}$	ESPACIAMIENTO REQUERIDO $s_{max} = \frac{A_v f_{yt}}{0,35 b_w} \quad (f'_c \leq 30 \text{ MPa})$ $s_{max} = \frac{A_v f_{yt}}{0,062 \sqrt{f'_c} b_w} \quad (f'_c > 30 \text{ MPa})$ $\leq 0,5.d \leq 60 \text{ cm}$	$l_{r1} = l_r \left(1 - \frac{\phi V_c}{V_u} \right)$
	ESPACIAMIENTO MÁXIMO $s_{max} \leq 0,5.d$ $s_{max} \leq 60 \text{ cm}$	$l_{rx2} = l_{r1} - l_{r2}$
$V_{ux} < V_u \leq 5\phi V_c$	$s_{max} = \frac{\phi A_v f_{yt}}{V_{umax} - \phi V_c}$	$l_{rx} = l_r \left(1 - \frac{V_{ux}}{V_u} \right)$
	ESPACIAMIENTO REQUERIDO	$l_{rx1} = l_{rx} - l_{r1}$
	ESPACIAMIENTO MÁXIMO	$l_{rx2} = l_{r1} - l_{r2}$
$V_u > 5\phi V_c$	LA SECCIÓN DE HORMIGÓN ES INSUFICIENTE, DEBE INCREMENTARSE	

A continuación algunos ejercicios para demostrar esta metodología.

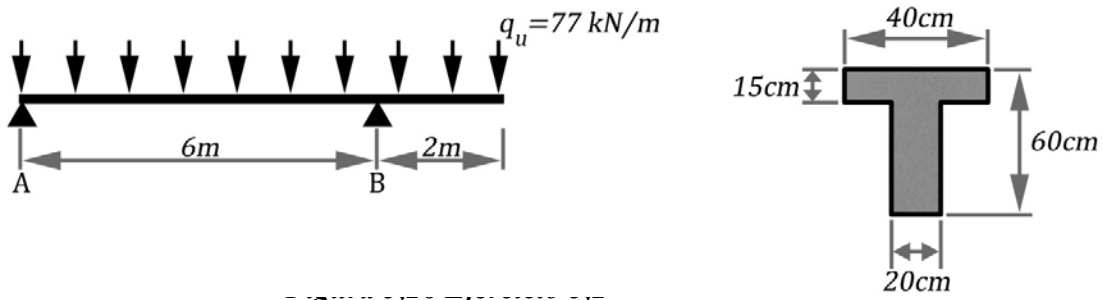
Ejercicio 5.2

Diseño a cortante la viga que se muestra en la figura 5,26

$$f'_c = 25 \text{ MPa}$$

$$f_y = 300 \text{ MPa}$$

- 1) Calcule el gráfico de V_u para el valor de q_u , considerando que este contiene el peso propio de la viga y que apoya en columnas de sección de $30 \times 30 \text{ cm}$
- 2) Desarrollando “métodos analíticos”
 - a. Calcule V_c , por la expresión simplificada
 - b. Las distancias a reforzar y el espaciamiento máximo.
 - c. La distribución del refuerzo empleando los métodos del “cortante límite” y de los “números impares”
- 3) Empleando el “método gráfico”, a partir de considerar la expresión detallada para el cálculo de la resistencia del hormigón: V_c
- 4) Haga un análisis de las ventajas y ahorros que provocará esta solución



Cálculos y discusión

1) Cálculo de las solicitaciones

Para el cálculo de las solicitaciones de momento y fuerza cortante para la acción de q_u se procede al desarrollo de las ecuaciones correspondientes. Las reacciones de apoyo:

$$R_B = \frac{(8 \cdot q_u)4}{6} = 410,67 \text{ kN}$$

$$R_A = 8q_u - R_B = 205,33 \text{ kN}$$

Las ecuaciones de momento y cortante para cada tramo:

- *Viga principal*

$$M_u = R_A x - \frac{q_u x^2}{2}$$

$$V_u = R_A - q_u x$$

- *Voladizo*

$$M_u = \frac{q_u (8 - x)^2}{2}$$

$$V_u = q_u (8 - x)$$

Estos resultados se muestran en la figura 5,27 y en la tabla 5,4 para diferentes valores de x a lo largo de la viga.

TABLA 5,4: Momento flector y fuerza cortante en la viga del ejercicio 5,2

$x(m)$	0	1	2	2.67	3	4	5	5.33	6	6	7	7.5	8
$M_u \text{ (kN.m)}$	0.00	166.83	256.67	273.78	269.50	205.33	64.17	0	-154.0	-154.	-38.5	-9.63	0.00
$V_u \text{ (kN)}$	205.33	128.33	51.33	0	-25.67	-102.7	-179.7	-205.1	-256.7	154.0	77.00	38.50	0.00

Además como importante información para los análisis de resistencia del elemento a cortante está la disposición del refuerzo longitudinal en la viga. Después de desarrollado el corte de barras el acero principal está dispuesto como se muestra en la figura 5,28.

Se destaca como para lograr armar correctamente las alas de la viga se requiere colocar al menos 4 barras en esta zona, de forma tal que pueda arriostrarse debidamente los estribos que se situarán en ella.

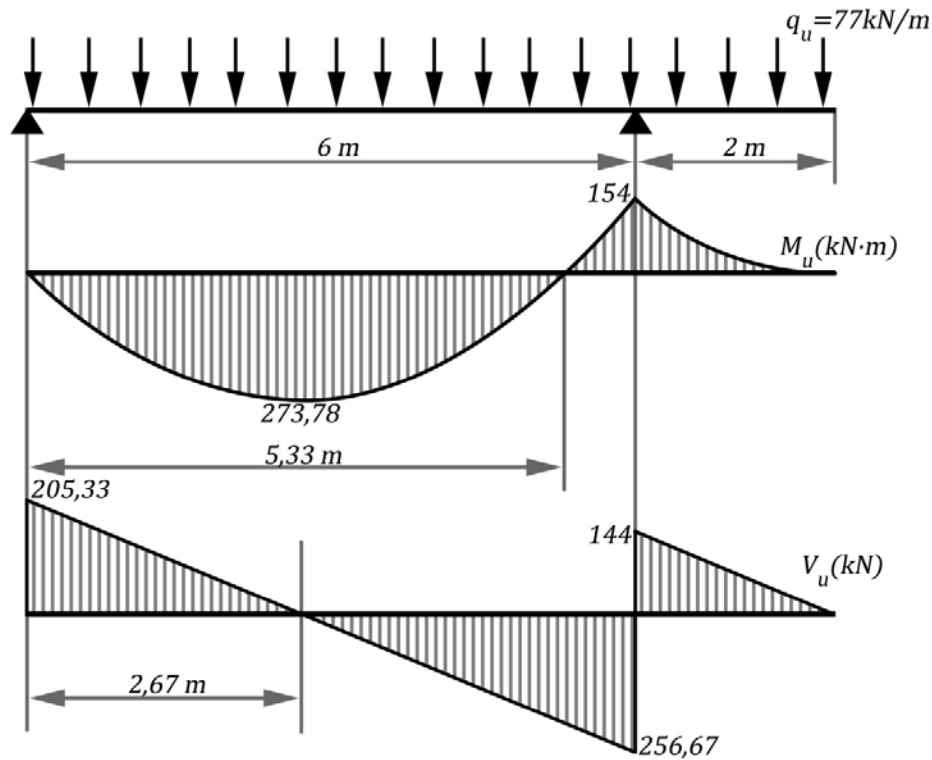


Figura 5,27: Gráfico de cargas y solicitaciones. Ejercicio 5,2

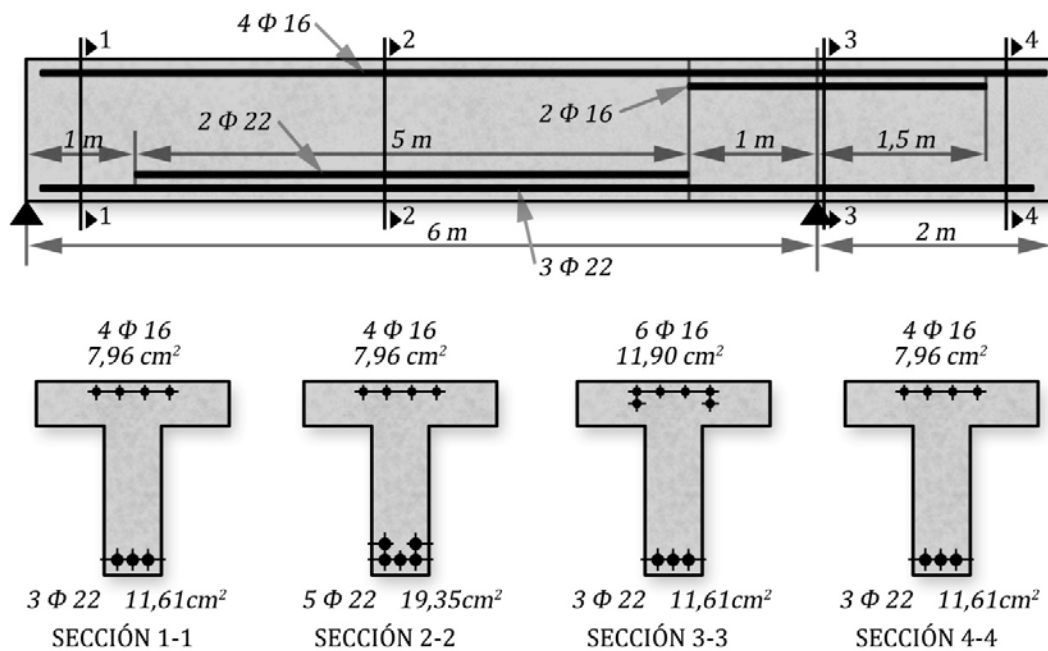


Figura 5,28: Distribución del refuerzo principal. Ejercicio 5,2.

Es importante destacar como alrededor de los apoyos la sección crítica se toman a una distancia d de la cara de estos, lo que implica una reducción significativa de las fuerzas cortantes máximas. Para el ejemplo en desarrollo el peralte efectivo es variable presentándose los siguientes casos:

$d = h - d_s$ Para el cálculo de d_s se puede determinar los recubrimientos en función de los diámetros de las barras y conociendo que el recubrimiento mínimo es de 40 mm . Con el auxilio de la Tabla A-8 de los anexos se determina:

$d_s = 5,7\text{cm}$ $d = 54,3\text{cm}$ para las barras N° 16 situadas en 1 camada (SECCIÓN 4-4)

$d_s = 7,5\text{cm}$ $d = 52,5\text{cm}$ para las barras N°16 situadas en 2 camadas (SECCIÓN 3-3)

$d_s = 6,1\text{cm}$ $d = 53,9\text{cm}$ para las barras N° 22 situadas en 1 camada (SECCIÓN 1-1)

$d_s = 8,3\text{cm}$ $d = 51,7\text{cm}$ para las barras N°22 situadas en 2 camadas (SECCIÓN 2-2)

Se puede determinar con facilidad, con el auxilio de la figura 5,27, que la zona donde los esfuerzos cortantes son más desfavorables corresponde al interior del apoyo derecho, ya que la sección es constante y es la zona con mayor fuerza cortante externa. Para esta sección es que se desarrollan los cálculos del ejercicio y el cortante en la sección crítica a $d = 52,5\text{cm}$ de la cara del apoyo y como la columna tiene 30cm de peralte la sección crítica se encuentra a $d_o = d + 15\text{cm} = 67,5\text{cm}$ del eje como se aprecia en la figura 5,29

$$V_{u\max} = V_u \frac{l_r - d_o}{l_r}$$

Donde l_r es la longitud del gráfico de cortante, en este caso $6 - 2,67 = 3,33\text{m}$, como puede apreciarse en la figura 5,27

$$V_{u\max} = 256,67 \frac{3,33 - 0,675}{3,33} = 204,64\text{kN}$$

Lo que se ilustra en la figura 5,29.

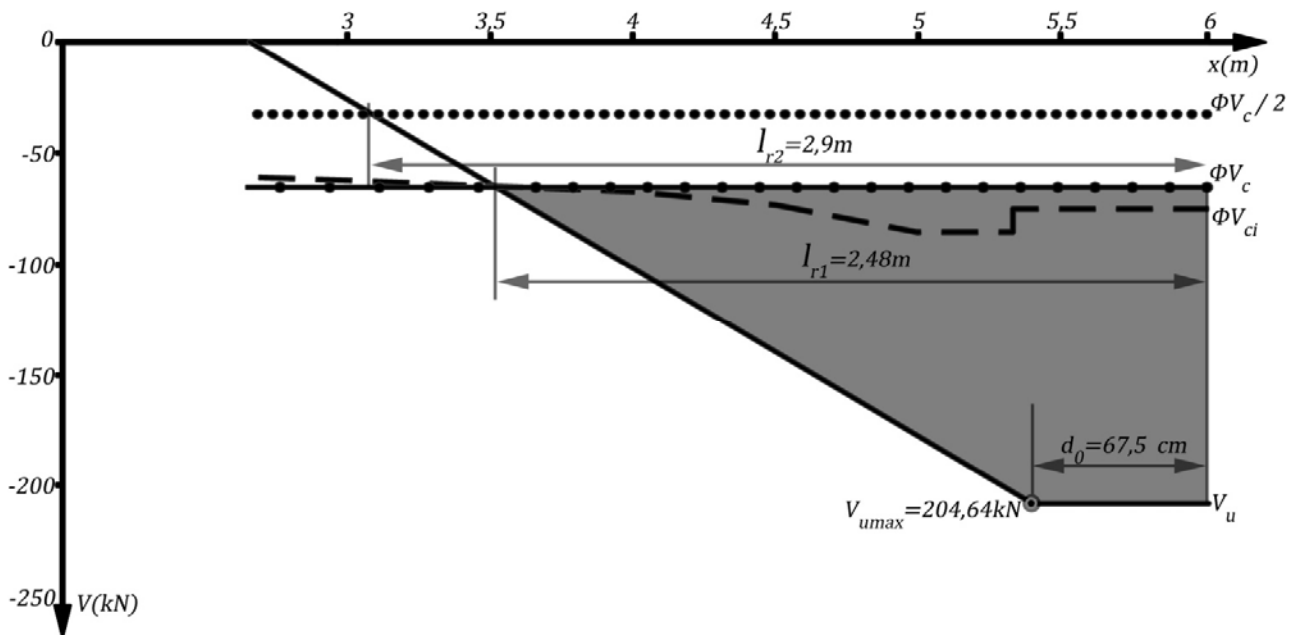


Figura 5,29: Distancias l_{r1} y l_{r2} , para el cortante en el apoyo B

2) Cálculo del aporte del hormigón por la expresión simplificada, V_c

Esta expresión no considera la influencia de importantes factores en la resistencia del hormigón a cortante como el aporte del refuerzo longitudinal y la relación momento – cortante. Sin embargo su

simplicidad facilita notablemente los cálculos y la hace la base de los procedimientos más empleados en la práctica.

$$V_c = 170\sqrt{f'_c}b_wd$$

Donde:

$b_w = 0,2m$ para la sección T, a lo largo de toda la viga

$d = h - d_s$: para las secciones que atraviesan la zona derecha de la viga

$d_s = 7,5cm$ $d = 52,53cm$ para las barras N° 16 situadas en 2 camadas

$d_s = 8,3cm$ $d = 51,7cm$ para las barras N° 22 situadas en 2 camadas

Considerando el valor más desfavorable en la SECCIÓN 1-1:

$$V_c = 170\sqrt{25} \cdot 0,2 \cdot 0,517$$

$$V_c = 87,93kN$$

$$\phi V_c = 0,75 \cdot 87,93 = 65,92kN$$

$$\frac{\phi V_c}{2} = \frac{0,75 \cdot 87,93}{2} = 32,96kN$$

Valores que se representan en la figura 5,29

Como primer paso debe comprobarse que la sección es apropiada, a través de asegurar que:

$$V_u < 5\phi V_c = 329,6kN$$

Condición que al cumplirse permite concluir que la sección está correctamente dimensionada para soportar, en conjunto con el refuerzo, la fuerza cortante actuante.

3) Cálculo de las distancias l_{r1} y l_{r2} (para la zona más desfavorable) y los espaciamientos máximos.

En la figura 5,29, por relaciones geométricas se obtienen: l_{r1} (para el valor de ϕV_c) y l_{r2} (para $\frac{\phi V_c}{2}$)

Entonces

$$l_{r1} = 3,33 \left(1 - \frac{65,92}{256,67} \right)$$

$l_{r1} = 2,48m$, zona en la que se requiere refuerzo por cálculo

$$l_{r2} = 3,33 \left(1 - \frac{32,96}{256,67} \right)$$

$l_{r2} = 2,9m$ distancia a partir de la cual no es necesario colocar ningún tipo de refuerzo transversal.

En la determinación de los espaciamientos máximos se deben diferenciar dos casos:

Para donde $V_u > \phi V_c$,

$$s_{max} = \frac{A_v f_{yt}}{0,35b_w} \quad \text{para } f'_c \leq 30MPa$$

Si se utilizan estribos N° 10, siendo $A_v = 1,42cm^2$ para 2 barras # 10

$$s_{max} = \frac{1,42 \cdot 30}{0,35 \cdot 20} = 60,86cm \quad \text{mayor que } \frac{d}{2} = 26,25cm \text{ por lo que se adopta este último espaciamiento}$$

Para donde $\frac{\phi V_c}{2} < V_u < \phi V_c$:

$$s_{max} = \frac{d}{2} = 26,25 < 60cm$$

Como era de esperar, para las características de esta viga, predomina la condición límite de $\frac{d}{2}$, por lo que se colocará este en toda la zona que se requiera, se redondeará este valor a 26 cm

4) Cálculo del área de refuerzo y su distribución.

a. Utilizando el *método del “Cortante Límite”*

El enfoque de este procedimiento se basa en obtener el valor de fuerza cortante (V_{ux}) para la que se requiere exactamente el espaciamiento máximo. Como el espaciamiento máximo es 26 cm , se obtiene el cortante actuante en este punto:

$$V_{ux} = \frac{\phi A_v f_{yt} d}{s_{max}} + \phi V_c$$

$$V_{ux} = \frac{0,75 \cdot 1,42 \cdot 30 \cdot 51,7}{26} + 65,92 = 128,84\text{ kN}$$

Entonces calculando la distancia l_{rx} a partir de la cual comienza a requerirse el espaciamiento de 26 cm , se establece por relaciones de triángulos:

$$l_{rx} = 3,33 \left(1 - \frac{128,84}{256,67} \right) = 1,66\text{ m}$$

El espaciamiento a colocar en esta zona se obtiene entonces:

$$s_x = \frac{\phi A_v f_y d}{V_{u\max} - \phi V_c}$$

$$s_x = \frac{0,75 \cdot 1,42 \cdot 30 \cdot 51,7}{204,64 - 65,92} = 11,91\text{ cm}$$

Con estos valores se distribuirán los estribos de la siguiente forma:

1er tramo se colocarán 16 estribos espaciados a 11 cm (del apoyo a $1,65\text{ m}$)
 2do tramo se colocarán 5 estribos espaciados a 26 cm (de $1,65$ a $2,95\text{ m}$)

Utilizando la Tabla 5,2 para facilitar los cálculos se obtiene para $f_y = 300\text{ MPa}$, estribos $N^\circ 10$ y $d/2$, $\phi V_c = 63,9\text{ kN}$

Entonces:

$$V_{ux} = \phi V_c + \phi V_s$$

$$V_{ux} = 65,92 + 63,9 = 129,82\text{ kN}$$

Valor ligeramente superior que el calculado anteriormente, ya que en el primer caso se utilizó un valor redondeado, algo menor que $\frac{d}{2}$, demostrándose la validez de este procedimiento.

Buscando una solución lo más cercana posible al espaciamiento requerido, se decide dividir la 1era zona en 2, con un espaciamiento intermedio de 17 cm . Repitiendo el procedimiento anterior se obtiene:

$$s_{x1} = 17\text{ cm} \quad V_{ux1} = 160,93\text{ kN} \quad l_{rx1} = 1,24\text{ m}$$

Con estos valores se distribuirán los estribos de la siguiente forma:

1er tramo se colocarán 13 estribos espaciados a 11 cm (del apoyo a $1,32\text{ m}$)
 2do tramo se colocarán 2 estribos espaciados a 17 cm (de $1,32$ a $1,66\text{ m}$)
 3er tramo se colocarán 5 estribos espaciados a 26 cm (de $1,66$ a $2,96\text{ m}$)

Esta variante representa, respecto a la solución anterior, menos trabajada, solo un estribo menos lo que no justifica la necesidad de crear un cambio de espaciamiento adicional.

b. Utilizando el *método de “Los números impares”*

El cálculo de V_c por la expresión simplificada permite calcular el refuerzo transversal y su distribución de una forma más sencilla, obteniendo el área total de acero a colocar en las diferentes zonas a reforzar. Para el ejercicio en desarrollo y con el apoyo de la figura 5,30, puede calcularse:

$$A_t = \frac{\Omega}{\phi f_{yt} d}$$

Donde:

Ω Área del gráfico de fuerzas cortantes a reforzar
 A_t cantidad de refuerzo total necesaria para esta área.

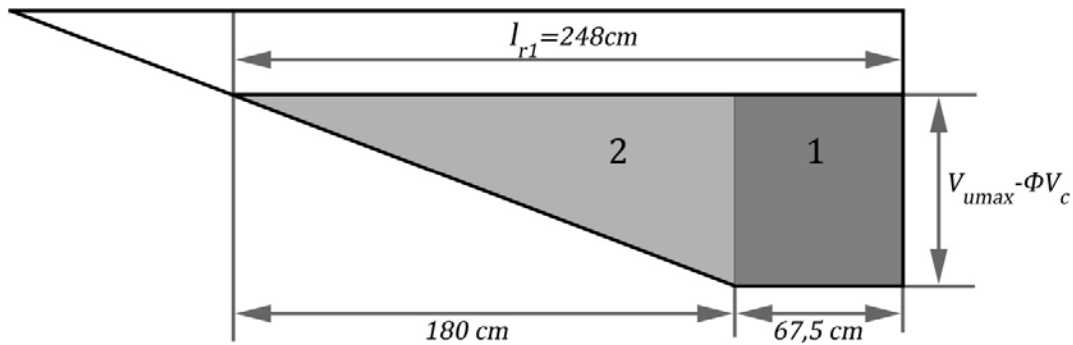


Figura 5,30: Área de refuerzo total

Entonces para el **Área Rectangular**:

$$\Omega_1 = (V_{umax} - \phi V_c) 67,5$$

$$\Omega_1 = (204,64 - 65,92) 67,5 = 9364 kN \cdot cm$$

$$A_{t1} = \frac{9364}{0,75 \cdot 30 \cdot 51,7} = 8,05 cm^2$$

y como se decidió emplear estribos N° 10, el número de estribos para esta zona se calcula por:

$$n_1 = \frac{A_{t1}}{1,42}$$

$$n_1 = \frac{8,05}{1,42} = 5,67$$

los que estarán espaciados a:

$$s_1 = \frac{67,5}{5,67} = 11,91 cm$$

Para el **Área Triangular**:

$$\Omega_2 = \frac{1}{2} (V_{umax} - \phi V_c) 180$$

$$\Omega_2 = \frac{1}{2} (204,64 - 65,92) 180 = 12483,8 kN \cdot cm$$

$$A_{t2} = \frac{12483,8}{0,75 \cdot 30 \cdot 51,7} = 10,73 cm^2$$

y el número de estribos será:

$$n_2 = \frac{A_{t2}}{1,42}$$

$$n_1 = \frac{10,73}{1,42} = 7,44$$

Considerando 8 y tomando en cuenta que la distribución no será uniforme, se acude al “método de los números impares”, por lo que se colocarán en dos tramos 5+3 como se indica en el esquema de la figura 5,31

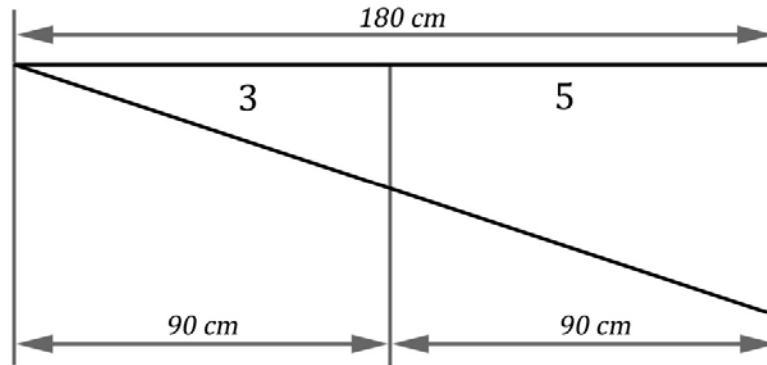


Figura 5,31: Método de los números impares

Entonces para:

1era zona se colocarán	5 estribos espaciados a 18cm
2da zona se colocarán	3 estribos espaciados a 30cm

En este último caso mayor que el espaciamiento máximo requerido para esta zona.

La distribución final sería:

1er tramo se colocarán	8 estribos espaciados a 11cm	(del apoyo a 0,77m)
2do tramo se colocarán	5 estribos espaciados a 18cm	(de 0,77 a 1,67m)
3er tramo se colocarán	5 estribos espaciados a 26cm	(de 1,67 a 2,97m)

Es importante destacar como estos cálculos brindan una solución con 3 estribos menos que la obtenida anteriormente, a costa de una distribución más complicada y un procedimiento más trabajoso. En la figura 5,32 se compara esta solución con la obtenida por el método anterior y con la curva de espaciamiento requerida. Nótese como hay una amplia zona donde la solución es insegura.

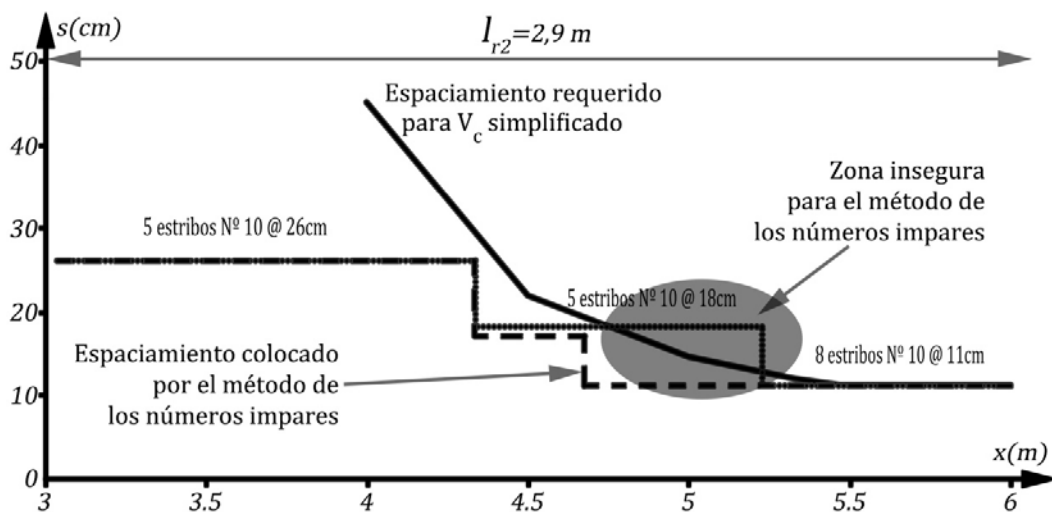


Figura 5,32: Distribución de los estribos, para las expresiones simplificada de V_c

La comparación de los procedimientos empleados permite recomendar que siempre se decida emplear la expresión simplificada y en cálculos manuales utilizar el método del “Cortante Límite”.

Cálculo del aporte del hormigón por la expresión detallada, V_{ci}

c. Cálculo de V_{ci}

$$V_{ci} = \left(160\sqrt{f_c'} + 17000\rho_w \frac{V_u d}{M_u} \right) b_w d$$

Como se aprecia el valor de V_{ci} es variable a lo largo de la viga en función de la variación de los términos ρ_w y $\frac{V_u d}{M_u}$, lo que se muestra en la tabla 5,5. Por tanto resulta clave la selección de los valores de x donde se producen cambios de dichos parámetros, sobre todo en los cortes de barras, cambios del sentido del momento flector o la fuerza cortante.

Apreciándose un incremento de la resistencia del hormigón respecto a la expresión simplificada, y por tanto se producirán ahorros en la cantidad de cercos a colocar, lo que se aprecia con claridad en la figura 5,29 además se hacen evidentes los saltos en los valores de V_{ci} por el aporte del refuerzo longitudinal.

En función de los valores de V_{ci} se calcula una curva de espaciamiento requerido a lo largo de la sección estudiada. Este espaciamiento se obtiene por:

$$s_i = \frac{\phi A_v f_{yt} d}{V_{si}} = \frac{\phi A_v f_{yt} d}{V_{ui} - \phi V_{ci}}$$

TABLA 5,5: Cálculo de V_c por la expresión detallada para la derecha del apoyo interior

	$x (m)$	$A_{real} (cm^2)$	$\rho_w = \frac{A}{bd}$	$V_{ui} (kN)$	$M_u (kN.m)$	$\frac{V_u d}{M_u}$	ϕV_{ci}
MOMENTO POSITIVO	2.67	19.35	0,01871	0	273.78	0,00	-62,04
	3	19.35	0,01871	-25.667	269.50	0,05	-63,25
	4	19.35	0,01871	-102.67	205.33	0,26	-68,42
	4.5	19.35	0,01871	-141.17	144.38	0,51	-74,51
	5	19.61	0,01871	-179.67	64.17	1,00	-86,71
	5	11,61	0,01123	-179,67	64,17	1,00	-76,84
	5.33	11,61	0,01123	-205.33	0.00	1,00	-76,84
MOMENTO NEGATIVO	5.33	11.9	0,01151	-205,33	0,00	1,00	-78,41
	5.475	11.9	0,01151	-216,24	-13,86	1,00	-78,41
	6	11.9	0,01151	-216,24	-154,00	0,71	-78,41

En la figura 5,33 puede compararse la influencia del análisis del aporte del hormigón entre las expresiones simplificada y detallada por medio de las curvas de espaciamientos requeridos.

En la tabla 5,6 se detallan los resultados obtenidos para el espaciamiento necesario y el colocado realmente.

La distribución en este caso se esquematiza en la figura 5,34, demostrándose un ahorro de 2 estribos, por el solo hecho de adoptar la expresión mas completa para calcular el aporte de hormigón.

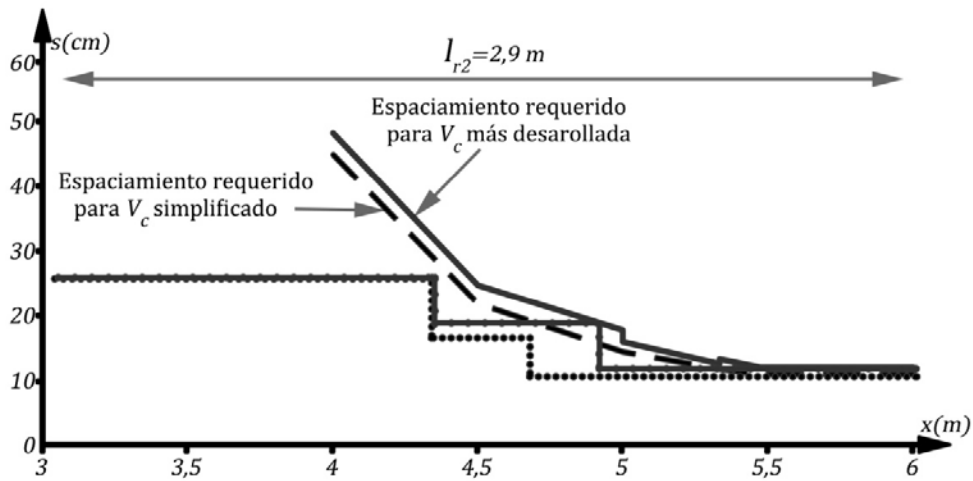


Figura 5,33: Distribución de los estribos, para las expresiones simplificada y detallada de V_c

TABLA 5,6: Espaciamientos requeridos y colocados para la expresión detallada

Espaciamiento requerido		Espaciamiento colocado		
$x \text{ (m)}$	$s \text{ (cm)}$	$x \text{ (m)}$	$s \text{ (cm)}$	$n^\circ \text{ estribos}$
6	12,06	6	12	9
5,475	12,06	4,92	12	
5,33	13,09	4,92	19	3
5,33	12,86	4,35	19	
5	16,06	4,35	26	5
5	17,77	3,05	26	
4,5	24,78			
4	48,23			
TOTAL ESTRIBOS				18

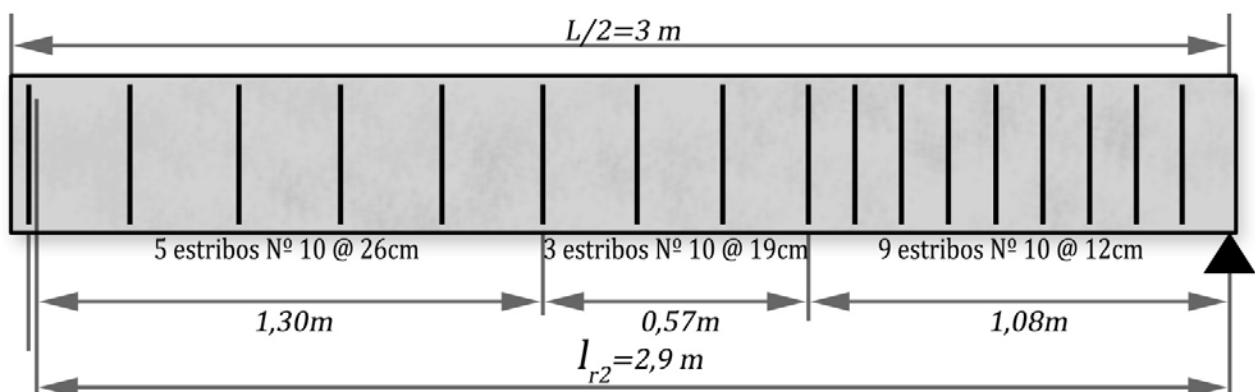


Figura 5,34: Distribución del refuerzo transversal en los apoyos centrales, parte izquierda

La comparación de los resultados obtenidos con el empleo de las expresiones detalladas y simplificadas permite concluir lo siguiente:

- La expresión simplificada resulta válida para secciones donde no se requiera gran cantidad de refuerzo transversal, recomendándose en este caso utilizar el método del Cortante Límite.
- En vigas grandes, donde son altos los requerimientos de refuerzo transversal, o en elementos numerosos y repetidos en la estructura, se recomienda el uso de la expresión detallada y la construcción de las curvas de espaciamiento requerido y real, como se explicó anteriormente, solución que conduce variantes más económicas.

5,10 VIGAS DE PERALTO VARIABLE.

Las vigas de sección variable son empleadas frecuentemente, sobre todo en edificios industriales y puentes para acercar la de la viga al gráfico de momento flector y fuerzas cortantes y alcanzar elementos mucho más racionales y eficientes. En la figura 5,35 se ilustran varios ejemplos de estas vigas.

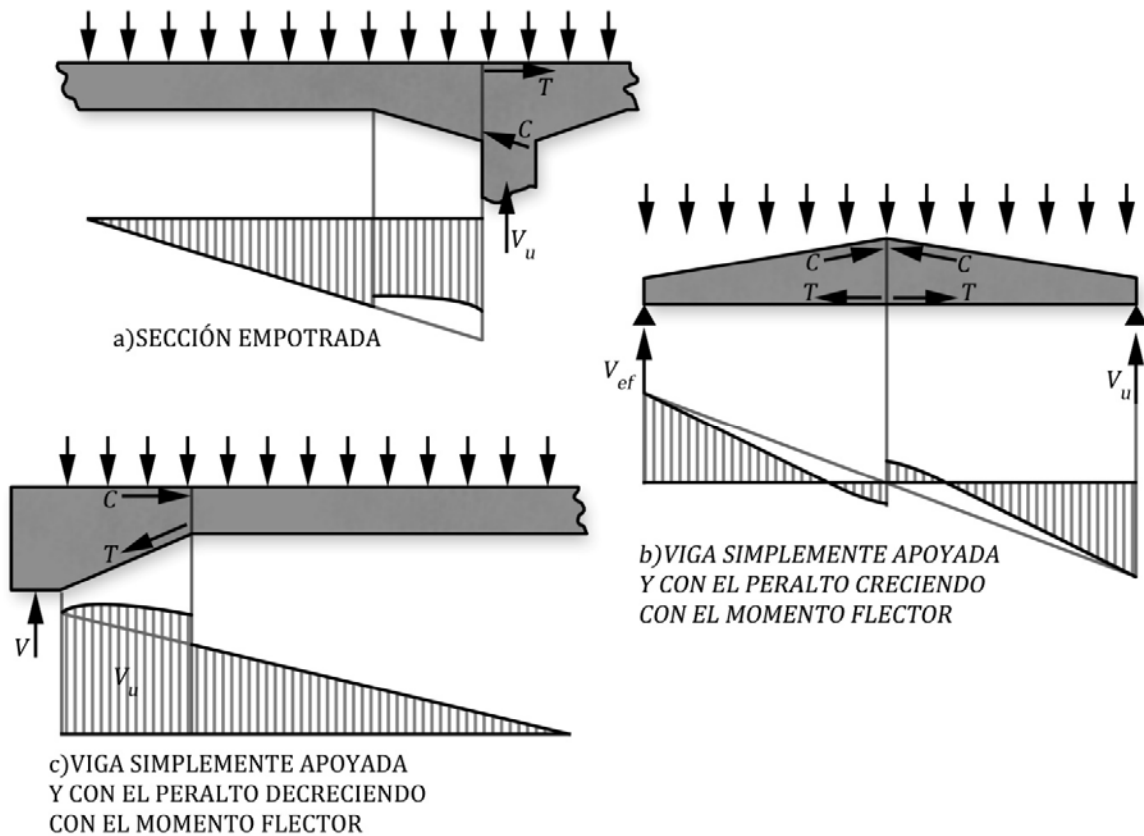


Figura 5,35: Vigas con peralte variable

Desde el punto de vista de la resistencia a cortante de estos elementos se plantean dos aspectos de interés:

- La inclinación de las fuerzas internas resistentes al momento flector (C y T) pueden reducir o incrementar la fuerza cortante actuante V_u .

- La variación de la fuerza cortante resistente del hormigón, V_c , a lo largo de la viga, debido a los cambios del ancho y sobre todo del peralte de la sección.

En el 1er caso este efecto será diferente en función del tipo y la forma de la viga, como se ilustra en la figura 5,35. Entre las vigas de peralto variable mas comunes están las de naves industriales y simplemente apoyadas, como la mostrada en la figura 5,35b. Analizando la sección crítica a cortante, a d del apoyo, se comprueba que se producirá una reducción del cortante actuante en una magnitud de $C \sin \theta$, como se ilustra en la figura 5,36.

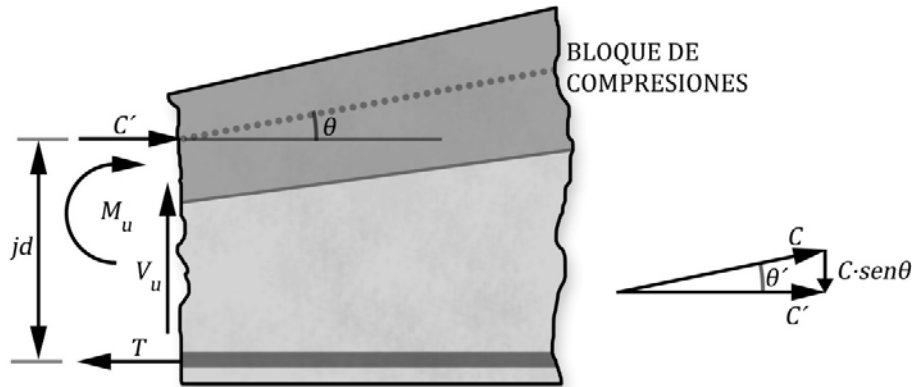


Figura 5,36: Fuerzas internas y externas en sección con peralto variable

Entonces como:

$$M_u = C'jd = T \cdot jd$$

$$T = C' = \frac{M_u}{jd}$$

$$V_{red} = V_u - C \sin \theta = V_u - C' \tan \theta$$

Para este caso y para la sección crítica el momento flector es relativamente pequeño, no resulta significativa la reducción, la que se irá incrementando en la medida que la sección avance hacia el centro, como se muestra en la figura 5,35b. Más notable son los casos donde el incremento o la reducción potencial de la fuerza cortante actuante coinciden en zonas donde el momento flectores grande, como los casos de los esquemas 5,35a y c.

En cuanto a la variación de la resistencia a cortante del hormigón se impone la necesidad de precisar algunas de las definiciones adoptadas para el caso, sobre todo lo correspondiente a la determinación de la sección crítica y del espaciamiento máximo.

Conociendo que la sección crítica a fuerzas cortantes se sitúa a una distancia igual al peralto efectivo del apoyo surge la pregunta: ¿Qué valor de d considerar? Para resolver esta problemática se recomienda adoptar para estos cálculos el valor de peralto efectivo con que se diseñó la sección a flexión. En una viga de peralto variable determinar cual es esta sección no es un proceso obvio, pues esta no coincide con el punto de momento máximo, que como regla se corresponde el mayor peralto. Esta realidad obliga a calcular varias secciones a lo largo de la viga.

Por ejemplo para una viga simplemente apoyada y donde el peralto crece con el momento flector, figura 5,35b, la sección crítica para el cálculo del refuerzo principal, ver figura 5,37, se obtiene por:

$$x_{crit} = \frac{-h_1 + \sqrt{h_1^2 + PEND \cdot L \cdot h_1}}{PEND}$$

Donde:

$$PEND = \frac{h_2 - h_1}{\frac{L}{2}}$$

Y entonces:

$$d_{crit} = h_1 + PEND \cdot x_{crit} - d_s$$

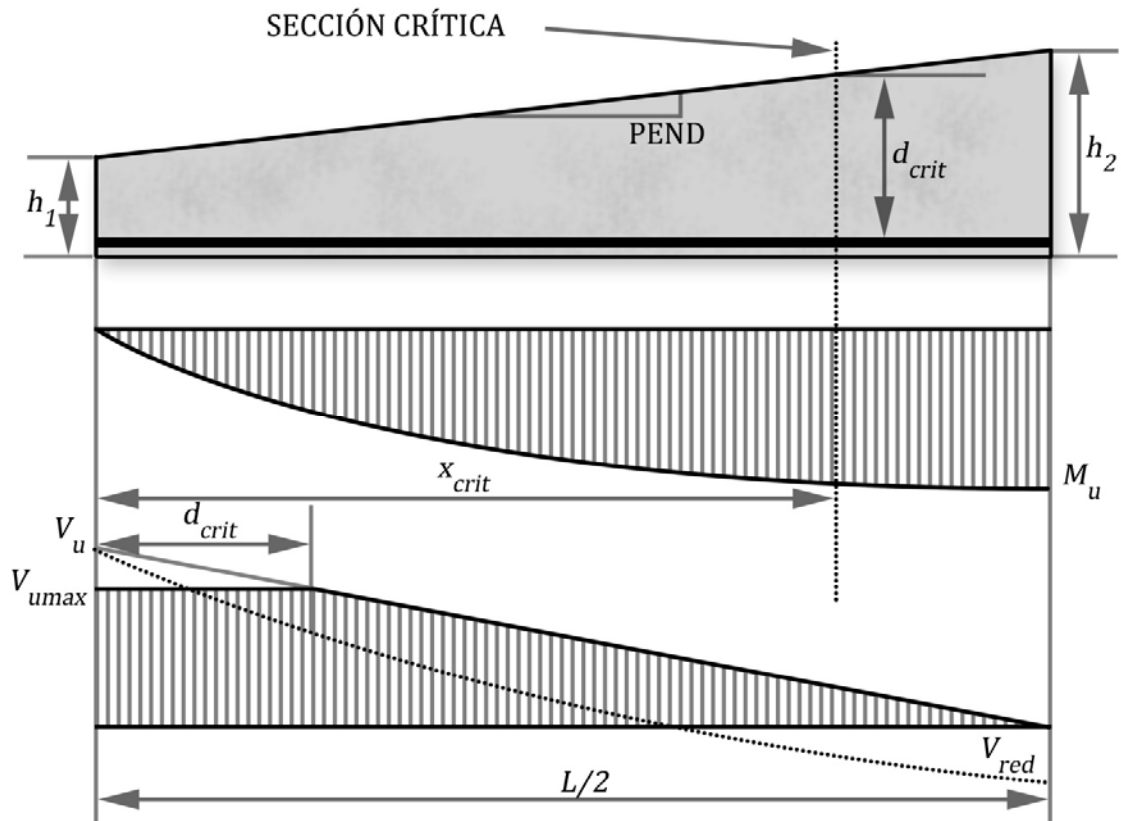


Figura 5,37: Sección crítica a momento flector y cortante en vigas de sección variable

El espaciamiento máximo que predomina, en la mayor parte de los casos, es $\frac{d}{2}$. En vigas de sección variable se calcula entonces por:

$$s_{max} = \frac{d_{crit}}{2}$$

El empleo de cualquiera de los métodos analíticos resulta muy complejo, por ser variables el cortante reducido V_{red} y también el resistente del hormigón V_c a causa de la variación del peralte. Usar simplificaciones estaría en contra del propio sentido del fenómeno explicado. Por tanto se recomienda utilizar el “método gráfico” para aprovechar a plenitud los efectos de las características de estas secciones.

A continuación se desarrolla un ejercicio demostrativo:

Ejercicio 5.3

Diseño a esfuerzos cortantes cortante la viga de sección variable que se muestra en la figura 5,38.

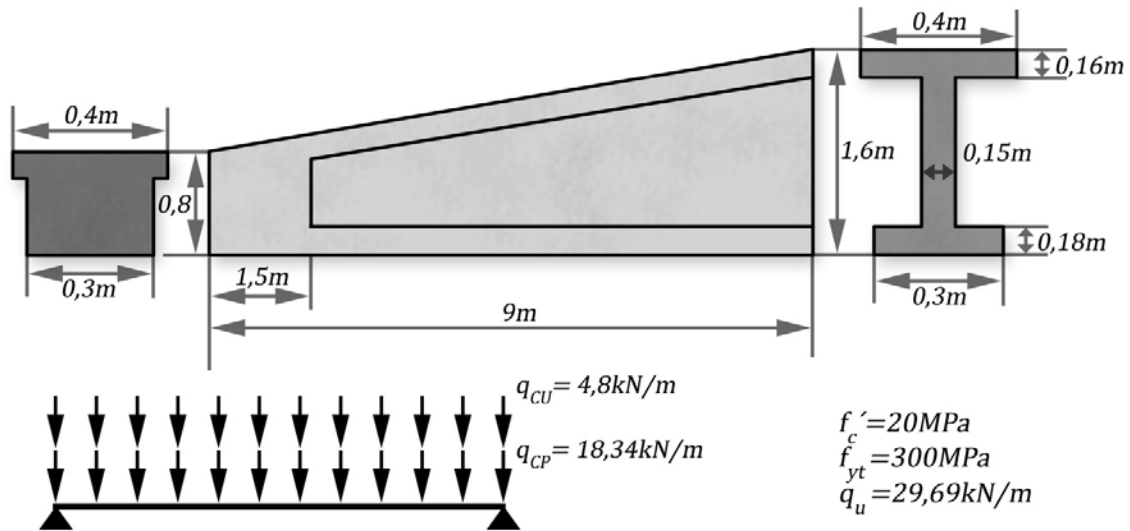


Figura 5,38: Ejercicio 5,3

Las cargas permanentes se deben al peso de la viga, la cubierta formada por losas cajón y una solución impermeabilizante. Las cargas de uso, para este tipo de cubierta, es de $0,8 \text{ kN/m}^2$. El intercolumnio es de 6 m .

Cálculos y discusión

1) Cálculo de las solicitaciones

En la tabla 5,7 se muestran los resultados del cálculo bajo momento flector en toda la longitud de la viga. Se destaca la variación de las dimensiones, el área de refuerzo principal y la profundidad del bloque comprimido.

La sección crítica se encuentra a:

$$x_{crit} = \frac{-h_1 + \sqrt{h_1^2 + PEND \cdot L \cdot h_1}}{PEND}$$

$$PEND = \frac{h_2 - h_1}{\frac{L}{2}} = \frac{1,6 - 0,8}{9} = 0,0889$$

$$x_{crit} = \frac{-0,8 + \sqrt{0,8^2 + 0,0889 \cdot 9 \cdot 0,8}}{0,0889}$$

Y para esta sección:

$$d_{crit} = h_1 + PEND \cdot x_{crit} - d_s$$

Y como $d_s = 6,22 \text{ cm}$

$$d_{crit} = 0,8 + 0,0889 \cdot 6,59 - 6,22 = 1,24 \text{ m}$$

Es importante resaltar, de la tabla 5,7, los valores de:

$$C' = \frac{M_{ui}}{jd_i} = \frac{M_{ui}}{d_i - \frac{a_i}{2}}$$

$$V_{red} = V_i + C' \tan \theta$$

Donde $\tan \theta = PEND = 0,0889$

TABLA 5.7: Momento flector, fuerzas cortantes y dimensiones de la viga de sección variable

$x(m)$	$b(m)$	$h(m)$	$d(m)$	$V_u(kN)$	$M_u(kN.m)$	$A_s(cm^2)$ cálculo	$a(cm)$	$jd(m)$	$C'(kN)$	$V_{red}(kN)$	$\phi V_c(kN)$
0	0,3	0,800	0,738	228,61	0	0	0	0,74	0	193,73	126,24
1,3	0,3	0,916	0,854	228,61	322,28	14,54	6,41	0,82	392,40	193,73	146,01
1,5	0,3	0,933	0,871	222,68	367,41	16,30	7,19	0,84	439,91	183,57	149,05
1,5	0,15	0,933	0,871	222,68	367,41	16,30	7,19	0,84	439,91	183,57	74,53
2	0,15	0,978	0,916	207,83	475,04	20,20	8,91	0,87	545,37	159,35	78,33
2,566	0,15	1,028	0,966	191,03	584,86	23,75	10,48	0,91	641,22	134,50	82,63
2,75	0,15	1,044	0,982	185,56	622,56	24,87	10,97	0,93	671,28	125,89	84,03
3	0,15	1,067	1,005	178,14	668,03	26,14	11,53	0,95	705,52	115,42	85,93
3,5	0,15	1,111	1,049	163,30	753,38	28,29	12,48	0,99	763,66	95,41	89,73
3,653	0,15	1,125	1,063	158,75	767,64	28,62	12,63	0,99	772,55	92,00	90,90
4	0,15	1,156	1,066	148,45	831,32	30,54	13,48	1,01	824,54	75,15	91,14
5	0,15	1,245	1,155	118,76	964,93	32,72	14,44	1,09	883,38	40,23	98,74
6	0,15	1,333	1,243	89,07	1068,8	33,57	14,81	1,18	906,30	8,50	106,35
6,588	0,15	1,386	1,296	71,61	1116,2	33,57	14,81	1,23	906,17	-9,01	110,82
7	0,15	1,422	1,332	59,38	1143,1	33,38	14,72	1,27	900,99	-20,72	113,95
8	0,15	1,511	1,421	29,69	1187,6	32,35	14,27	1,36	873,34	-47,95	121,55
9	0,15	1,600	1,510	0,00	1202,5	30,67	13,53	1,45	827,87	-73,60	129,16

En la figura 5,39 se muestran los gráficos de fuerza cortante externa (V_u) y de cortante reducido (V_{red}), un análisis de estos permite extraer las siguientes conclusiones sobre las características de la reducción del cortante actuante:

- Las principales reducciones no se producen en la zona de cortante máximo, debido a que coinciden con los menores momentos flectores y por tanto los menores valores de C' (ver la figura 5,39 y la tabla 5,7)
- En el centro de la luz predomina el efecto $C' \tan \theta$ y genera valores de fuerza cortante que pueden llegar a ser significativos.
- Por tanto el punto de cortante cero se desplaza del centro de la luz, provocando una reducción sustancial de los requerimientos de refuerzo transversal.
- Esta situación plantea una cuidadosa revisión de la recomendación de no usar refuerzo si $V_u \leq 0,5 \phi V_c$. Si se evalúa la tabla 5,7 se determina que desde una distancia de 4m del apoyo se cumple este requisito lo que conduciría a que mas de la mitad de la viga no requerirá estribos, solución poco viable constructivamente.

2) Cálculo del aporte del hormigón por la expresión simplificada, V_c

En la tabla 5,7 se muestran los cálculos de ϕV_c por la expresión simplificada.

$$\phi V_c = \phi 170 \sqrt{f'_c} b_w d$$

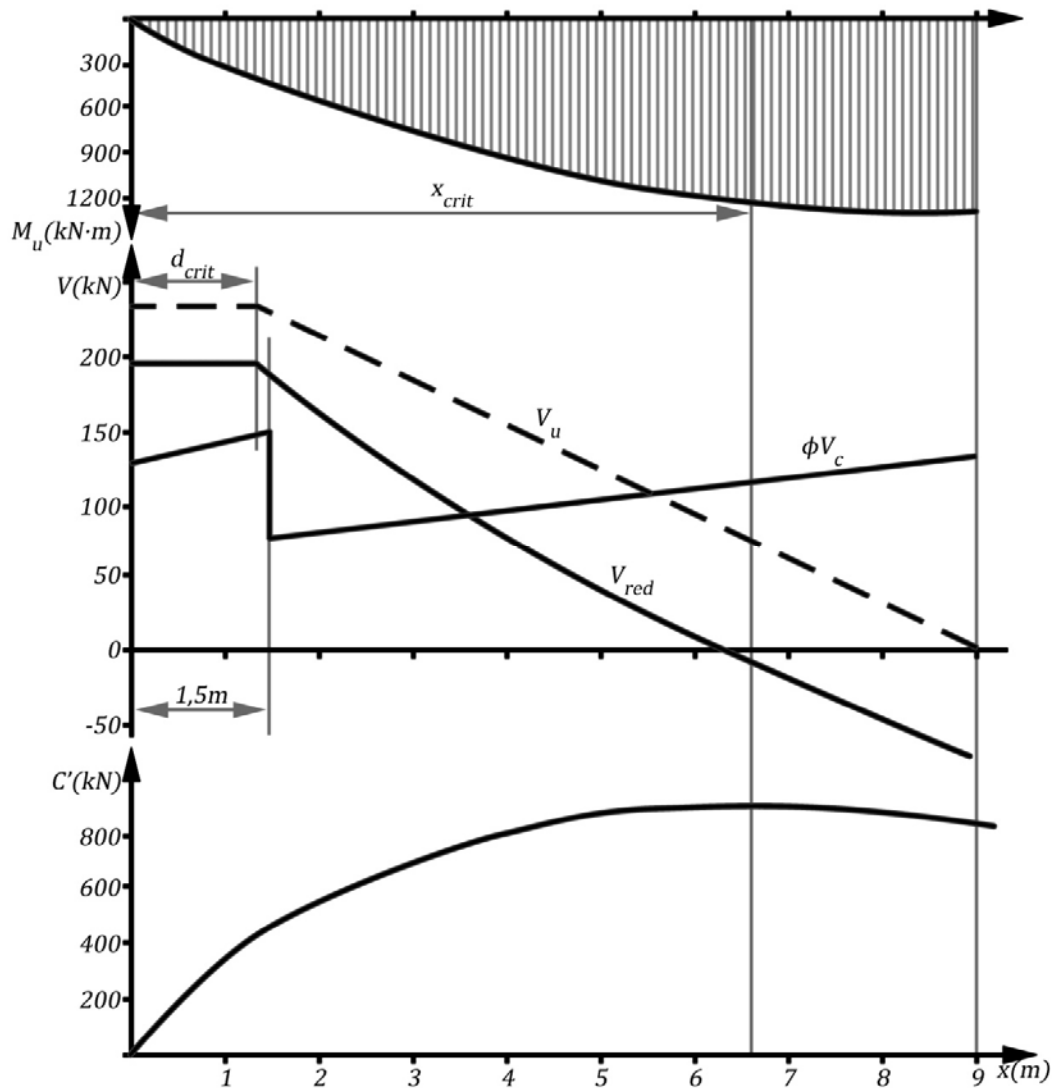


Figura 5,39: Cortante reducido y cortante resistente del hormigón

Que es variable en función del incremento del peralte y del cambio del ancho de la sección. Nótese que se produce una caída significativa de ϕV_c cuando termina el engrosamiento de la sección, a $1,5m$ del apoyo. Como la sección crítica, a d_{crit} del apoyo, cae dentro de la zona engrosada, no resulta la más desfavorable, sino que se desplaza hasta el punto en que este desaparece, a $1,5m$ del apoyo, como se aprecia en la figura 5,39. Y es este punto en el que se produce el espaciamiento menor.

3) Cálculo de los espaciamientos máximos.

En la determinación de los espaciamientos máximos se comprueba:

$$s_{max} = \frac{A_v f_{yt}}{0,35 b_w} \quad \text{para } f'_c \leq 30 \text{ MPa}$$

Si se utilizan estribos N° 10, siendo $A_v = 1,42 \text{ cm}^2$ para 2 barras # 10

$$s_{max} = \frac{1,42 \cdot 30}{0,35 \cdot 15} = 81,14 \text{ cm}$$

$$s_{max} = \frac{d_{crit}}{2} = 62 \text{ cm}$$

En ambos casos superior a 60cm , por lo que se adopta este como espaciamiento máximo.

Las distancias a reforzar se determinan con el apoyo del gráfico de espaciamiento requerido que se muestra en la figura 5,40 y en la tabla 5,8. Buscando una solución consecuente con la práctica constructiva se decide dividir a la viga en dos zonas, la segunda con $s_{\max} = 60\text{cm}$.

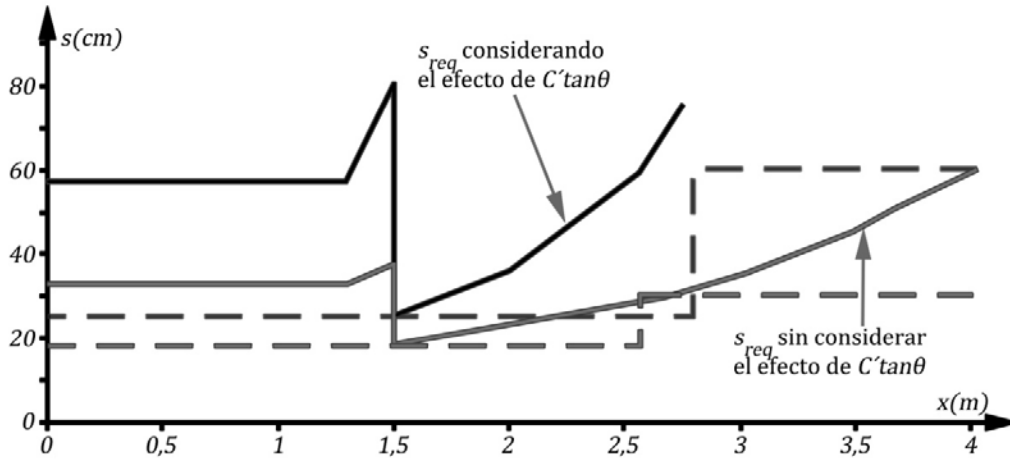


Figura 5,40: Distribución de los estribos.

4) Cálculo del área de refuerzo y su distribución.

Empleando el método gráfico se calcula el espaciamiento requerido por la expresión:

$$s_i = \frac{\phi A_v f_{yt} d}{V_{si}} = \frac{\phi A_v f_{yt} d}{V_{ui} - \phi V_{ci}}$$

Valores que se exponen en la tabla 5,8 y se grafican en la figura 5,40.

TABLA 5,8: Distribución de los estribos.

CONSIDERANDO EFECTO $C'tan\theta$					SIN CONSIDERAR EFECTO $C'tan\theta$				
Espaciamiento requerido		Espaciamiento colocado			Espaciamiento requerido		Espaciamiento colocado		
$x (m)$	$s (cm)$	$x (m)$	$s (cm)$	n° estribos	$x (m)$	$s (cm)$	$x (m)$	$s (cm)$	n° estribos
0	57,15	0,00	25,00	12	0	33,02	0,00	18,00	15
1,3	57,15	2,80	25,00		1,3	33,02	2,57	18,00	
1,5	80,66	2,80	60,00	10	1,5	37,81	2,57	30,00	5
1,5	25,53	8,80	60,00		1,5	18,79	4,07	30,00	
2	36,12				2	22,59	4,07	60,00	8
2,566	59,52				2,566	28,48	8,97	60,00	
					2,75	30,92			
					3	34,81			
					3,5	45,57			
					3,653	50,04			
					4	59,41			
TOTAL DE ESTRIBOS				22	TOTAL DE ESTRIBOS				28

Buscando una solución práctica se decide una distribución de 11 estribos $N^{\circ} 10$, espaciados a $25cm$ en los primeros $2,6m$ y 10 espaciados a $60cm$ en el resto de la viga.

5) Solución analítica

La solución analítica es complicada pues las principales variables son dependientes del peralte de la sección que cambia a lo largo de la viga. Sobre todo es engorroso la determinación del valor de l_{rx} , distancia a partir de la que se colocaría el espaciamiento máximo, $s_{max} = 60cm$.

Para el ejercicio en desarrollo el cálculo de l_{rx} se realiza simultaneando las siguientes ecuaciones:

$$\begin{aligned} V_{red} &= V_{ui} + C'tan\theta \\ V_{red} &= \frac{qL}{2} - ql_{rx} - \frac{M}{jd}tan\theta \\ V_{red} &= \frac{qL}{2} - ql_{rx} - \frac{\frac{qL}{2}l_{rx} - \frac{ql_{rx}^2}{2}}{jd}tan\theta \\ V_{ux} &= \phi(V_c + V_s) \\ V_{ux} &= \phi\left(170\sqrt{f'_c}b_w d_x + \frac{A_v f_{yt} d_x}{s_{max}}\right) \\ V_{ux} &= \phi\left(170\sqrt{f'_c}b_w + \frac{A_v f_{yt}}{s_{max}}\right) d_x \end{aligned}$$

Siendo:

$$d_x = h_1 + PEND \cdot l_{rx} - d_s$$

Y considerando a $jd = 0,95d_x$ como una solución aproximada puede finalmente calcularse l_{rx} igualando $V_{red} = V_{ux}$ y la ecuación quedaría:

$$\frac{qL}{2} - ql_{rx} - \frac{V_u l_{rx} - \frac{ql_{rx}^2}{2}}{0,95(h_1 - d_s + PEND l_{rx})}tan\theta - \phi\left(170\sqrt{f'_c}b_w + \frac{A_v f_{yt}}{s_{max}}\right)(h_1 - d_s + PEND l_{rx}) = 0$$

De donde se obtiene el valor de $l_{rx} = 2,57m$

Para la sección crítica, situada a $1,5m$, se calcula el espaciamiento necesario en esta zona por:

$$\begin{aligned} d_x &= h_1 + PEND \cdot l_{rx} - d_s \\ d_x &= 0,8 + 0,0889 \cdot 1,5 - 0,622 \end{aligned}$$

$$V_{red} = \frac{qL}{2} - qx - \frac{\frac{qL}{2}x - \frac{qx^2}{2}}{jd}tan\theta$$

$$V_{red} = 29,62(9 - 1,5) - \frac{267,21 \cdot 1,5 - \frac{29,62 \cdot 1,5^2}{2}}{0,95 \cdot 0,871} 0,0889 = 183,57kN$$

$$\phi V_{cx} = \phi(170\sqrt{f'_c}b_w d_x)$$

$$\phi V_{cx} = \phi(170\sqrt{20} \cdot 0,15 \cdot 0,871) = 74,51kN$$

$$s_x = \frac{\phi A_v f_{yt} d_x}{V_{red} - \phi V_{cx}}$$

$$s_x = \frac{0,75 \cdot 1,42 \cdot 30 \cdot 87,11}{183,57 - 74,51} = 25,6cm$$

Este procedimiento analítico se justifica para instrumentarlo en hojas de cálculo, pues no aventaja al gráfico en simplicidad.

Como comentario final debe resaltarse el peso que tiene en la cantidad de refuerzo el considerar la reducción que produce en el cortante externo la inclinación de la componente del bloque de compresiones del ala superior. Los resultados comparativos se muestran en la tabla 5,8 y en la figura 5,40, nótese que se produce un ahorro de 6 estribos en la mitad de la viga, 12 en total, lo que justifica plenamente el procedimiento propuesto.

5,11 CORTANTE POR FRICCIÓN

En lo estudiado hasta ahora las fuerzas cortantes provocan fisuras inclinadas a través de una pieza maciza de hormigón. Sin embargo resulta frecuente que en la fabricación de los elementos de hormigón estructural se creen juntas que conduzcan a un plano de fallo a cortante a lo largo de ellas. En este caso la resistencia de la sección se generará por la combinación del efecto dovela y de la trabazón de los agregados como se explicó en 5,32, por la fricción entre el hormigón a lo largo de la junta y por la resistencia a cortante de las barras que atraviesan esta.

El cortante por fricción se presenta cuando hay una transmisión de cortante directo a través de un plano dado. Entre las situaciones mas comunes están las uniones o juntas entre piezas prefabricadas, secciones T, en secciones creadas con hormigón de diferentes edades o resistencias y en superficies de contacto entre el hormigón y el acero. En la figura 5,41, tomada del ACI 318-2005, se ejemplifican varios casos de cortante por fricción, zonas donde se produce transferencia de cortante directo y fisuras potenciales sobre todo en uniones de elementos prefabricados.

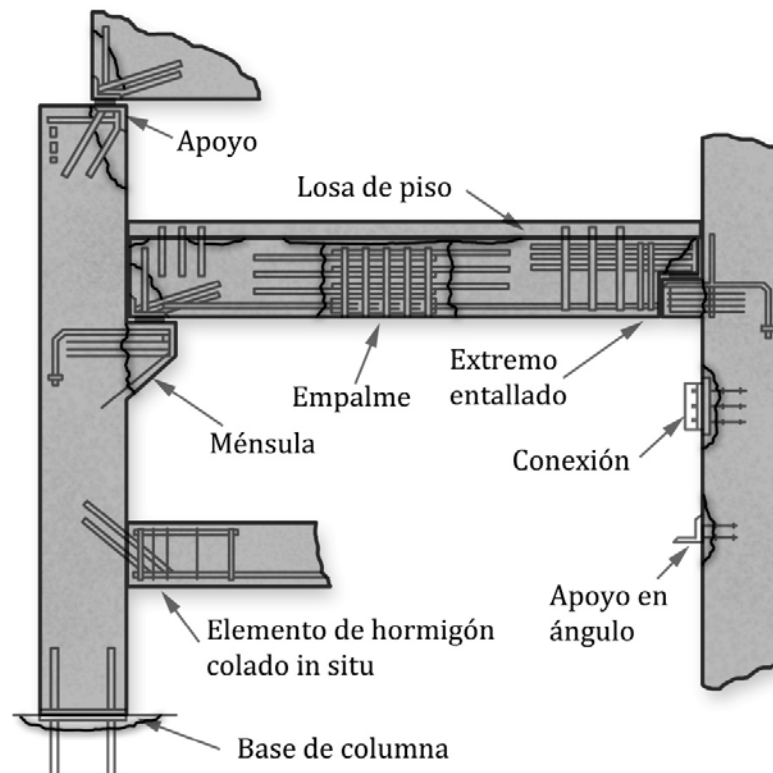


Figura 5,41: Cortante por fricción. Fisuras potenciales.

Según los análisis del PCA el éxito de la aplicación del concepto depende de la adecuada elección de la ubicación del deslizamiento o fisura supuesta. En las aplicaciones típicas la fisura tiende a producirse formando un ángulo de aproximadamente 20° respecto de la vertical.

El mecanismo resistente puede describirse de forma muy sencilla con el apoyo de la figura 5,42; donde el cortante actuante sobre el plano de falla V_n debe ser resistido por barras de acero colocadas perpendicularmente a este.

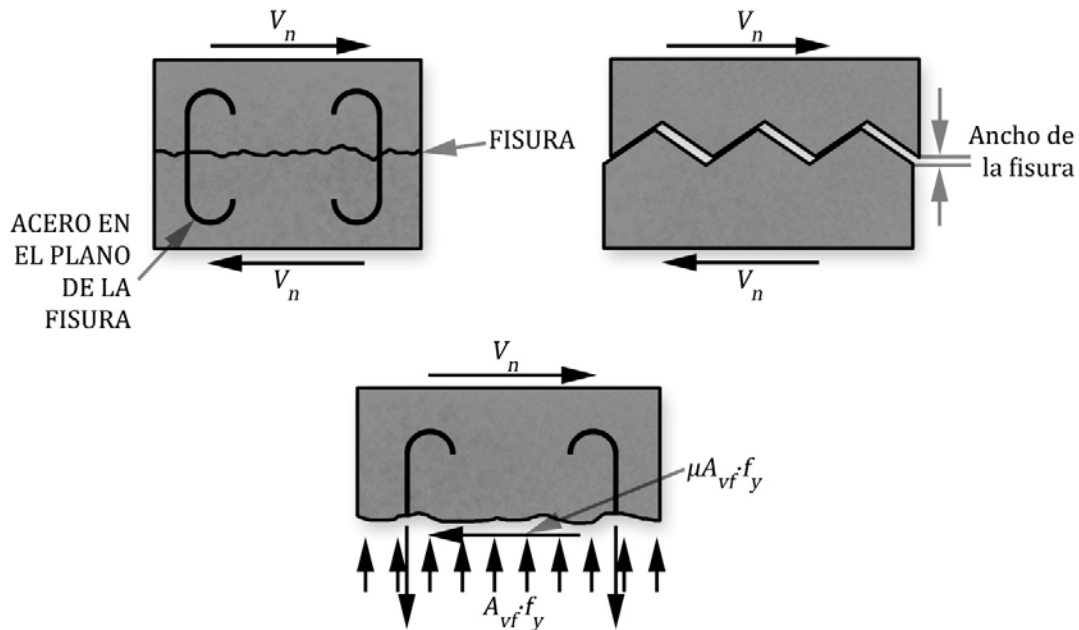


Figura 5,42: Mecanismo resistente ante el cortante a fricción.

Se le llama A_{vf} al área total de refuerzo colocado en la grieta y que se ha demostrado que alcanza su tensión de fluencia f_y . Entonces puede plantearse que el cortante externo será resistido por el componente horizontal de las fuerzas normales ($A_{vf}f_y$) que surge debido a la fricción:

$$V_n = \mu A_{vf} f_y$$

Donde μ es el coeficiente de fricción y que responde a los siguientes valores:

$\mu = 1,4$	Hormigonado monolítico del elemento.
$\mu = 1,0$	Hormigón fresco colocado contra hormigón endurecido cuya superficie se ha dejado intencionalmente rugosa.
$\mu = 0,7$	Hormigón fresco colocado sobre acero laminado estructural mediante conectores o barras de refuerzo soldadas al mismo.
$\mu = 0,6$	Hormigón fresco colocado contra hormigón endurecido no intencionalmente rugoso.

Cuando se presupone que la superficie está intencionalmente rugosa, para asumir $\mu = 1,0$, las protuberancias deben tener en el plano del cortante una profundidad entre 6 y 10 mm.

La superficie de cortante deberá estar limpia y libre de lechada (no descascarable) en el momento de colocación del hormigón fresco.

El valor de $\mu = 0,7$ se tomará en aquellos casos en que el esfuerzo se transmite por intermedio de una lámina de acero como en el caso de insertos embebidos en el hormigón endurecido o un perfil metálico con conectores. Es conveniente comentar que la expresión es penalizada con este coeficiente, relativamente bajo debido a que en este caso al existir una superficie lisa en contacto con el hormigón, no se originaría una llave de cortante tan marcada como en los otros casos, lo cual provoca que el refuerzo sea menos solicitado a tracción y más a cortante puro, siendo consecuentes con el mecanismo resistente de la figura 5,42. De acuerdo con el criterio de falla de Von Mises formulado en 1913, la resistencia al cortante puro de una barra de acero o perno, es aproximadamente el 60 % de la capacidad resistente última a tracción ($0,6F_u$). Ello quiere decir que al emplear la tensión de fluencia que es aproximadamente el 80 % de la resistencia última y penalizarla con un 70 %, se alcanzaría aproximadamente el 60 % de F_u , o sea, $0,7 (0,8F_u)$, sería un valor en el entorno del 56 % de F_u , estando de acuerdo con lo permisible.

La superficie metálica en contacto con el hormigón deberá estar limpia de polvo, herrumbre, grasa, pintura, etc.

Cuando el refuerzo se coloca con una inclinación α_f , como se muestra en la figura 5,43, la fuerza $A_{vf}f_y$ se descompone en una horizontal asociada a la fricción $\mu A_{vf}f_y \text{sen} \alpha_f$ y otra derivada de la proyección de esta $A_{vf}f_y \text{cos} \alpha_f$.

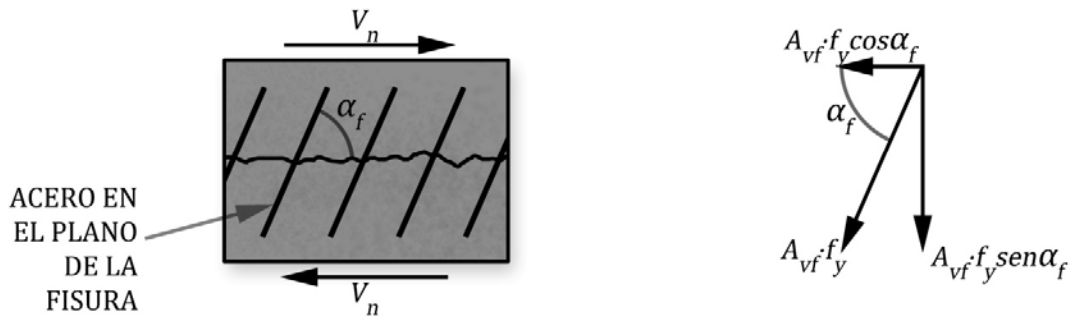


Figura 5,43: Cortante a fricción con refuerzo inclinado.

Entonces el mecanismo resistente puede plantearse como:

$$V_n = A_{vf}f_y \text{cos} \alpha_f + \mu A_{vf}f_y \text{sen} \alpha_f$$

$$V_n = A_{vf}f_y (\text{cos} \alpha_f + \mu \text{sen} \alpha_f)$$

Finalmente debe cumplirse que

$$V_u \leq \phi V_n$$

Donde $\phi = 0,75$ al igual que para todas las secciones sometidas a cortante y torsión. Las expresiones se plantean entonces como:

$$V_u = \phi A_{vf}f_y \mu$$

para barras perpendiculares,

$$V_u = \phi A_{vf}f_y (\text{cos} \alpha_f + \mu \text{sen} \alpha_f)$$

para barras inclinadas,

En un plano de diseño, para calcular el acero necesario a colocar en el plano de fricción, serán:

$$A_x = \frac{V_u}{\phi f_{yt} \mu}$$

barras perpendiculares,

$$A_x = \frac{V_u}{\phi f_{yt} (\text{cos} \alpha_f + \text{sen} \alpha_f \cdot \mu)}$$

barras inclinadas,

La normativa del ACI establece límites al valor de V_n , a partir de resultados experimentales. El cortante V_n , no puede superar los valores de $0,2f_c'A_c$ o superar en esta superficie un esfuerzo de $5,5MPa$. En estas expresiones A_c es el área de la sección de hormigón que resiste la transferencia de cortante.

Ejercicio 5.4

La viga que se muestra en la figura 5,44 apoya en una pilastra contigua a un muro de mampostería. Diseñe el refuerzo necesario para soportar el cortante a fricción que provocan las reacciones de apoyo de magnitudes: $R_y = 350kN$ y $R_x = 140kN$

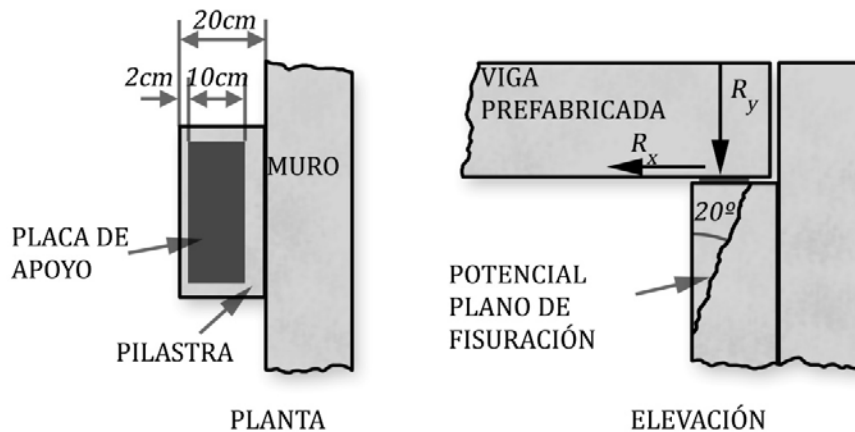


Figura 5,44: Ejercicio 5,4.

Cálculos y discusión

1. Determinación de las fuerzas actuantes a lo largo del plano de cortante.

En la figura 5,45 se ilustra como las fuerzas que soporta la pilastra se transmiten en el plano de corte que se ha admitido ocurre a valores de 20° aproximadamente.

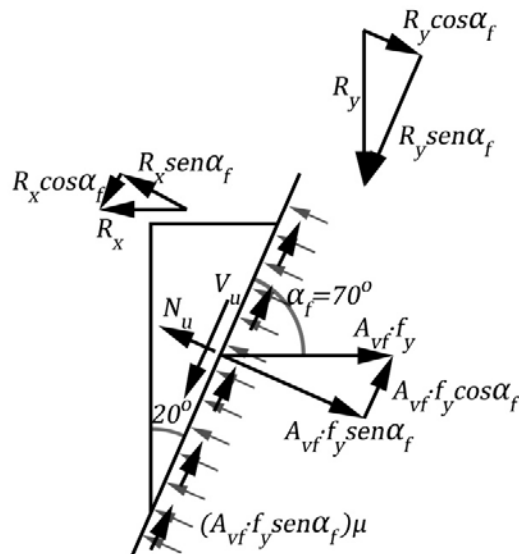


Figura 5,45: Fuerzas en el plano de cortante.

Fuerza cortante a lo largo de la fisura en el plano de corte

$$V_u = R_y \operatorname{sen} \alpha_f + R_x \cos \alpha_f$$

$$V_u = 350 \operatorname{sen} 70^\circ + 140 \cos 70^\circ = 376,78 \text{ kN}$$

Fuerza axial a tracción en el plano de corte:

$$N_u = R_x \operatorname{sen} \alpha_f - R_y \cos \alpha_f$$

$$N_u = 140 \operatorname{sen} 70^\circ - 350 \cos 70^\circ = 11,85 \text{ kN}$$

2. Determinación del refuerzo para tomar el cortante en la grieta.

Considerando la pieza como monolítica: $\mu = 1,4$

$$A_x = \frac{V_u}{\phi f_{yt} (\cos \alpha_f + \operatorname{sen} \alpha_f \cdot \mu)}$$

$$A_x = \frac{376,78}{0,75 \cdot 30 (\cos 70^\circ + \operatorname{sen} 70^\circ \cdot 1,4)} = 13,07 \text{ cm}^2$$

3. Determinación del refuerzo para tomar la fuerza a tracción.

$$A_n = \frac{N_u}{\phi f_{yt} (\operatorname{sen} \alpha_f)}$$

$$A_n = \frac{11,85}{0,75 \cdot 30 (\operatorname{sen} 70^\circ)} = 0,56 \text{ cm}^2$$

4. Cálculo de la armadura total y su distribución.

El área de acero a colocar a lo largo de la fisura es:

$$A_s = A_{vf} + A_n$$

$$A_s = 13,07 + 0,56 = 13,64 \text{ cm}^2$$

La longitud en que debe colocarse este refuerzo será:

$$l_s = \frac{2 + 10}{\tan 20^\circ} = 32,97 = 33 \text{ cm}$$

y colocando estribos N° 16 con 2 patas, siendo $A_v = 3,98 \text{ cm}^2$, pueden calcularse el espaciamiento a que deben situarse estos en la longitud de 33 cm antes obtenida

$$s_f = \frac{A_v}{A_s} l_s$$

$$s_f = \frac{3,98}{13,64} 33 = 9,63 \text{ cm}$$

Colocándose definitivamente 4 estribos N° 16 espaciados a 9 cm.

5,12 RESISTENCIA AL CORTANTE EN ELEMENTOS COMPUESTOS.

En la construcción moderna son muy utilizadas secciones fabricadas por etapas. De esta forma se aprovechan las ventajas del prefabricado y la capacidad resistente de secciones como la T. Por ejemplo es muy común construir secciones T a partir de una viga prefabricada que proporcione el nervio y una vez colocada esta se fabrique la losa, que se constituirá en el ala superior de la sección T, así la viga es más fácil de fabricar y colocar y se aprovecha la gran capacidad portante de la sección compuesta. En la figura 5,46 se muestran varias soluciones de este tipo.

La sección compuesta, construida por etapas, soporta los esfuerzos cortantes verticales como una sola, por lo que el peralte total y el efectivo se consideran, a los efectos de estos cálculos para la sección total, como se ilustra en la figura 5,46.

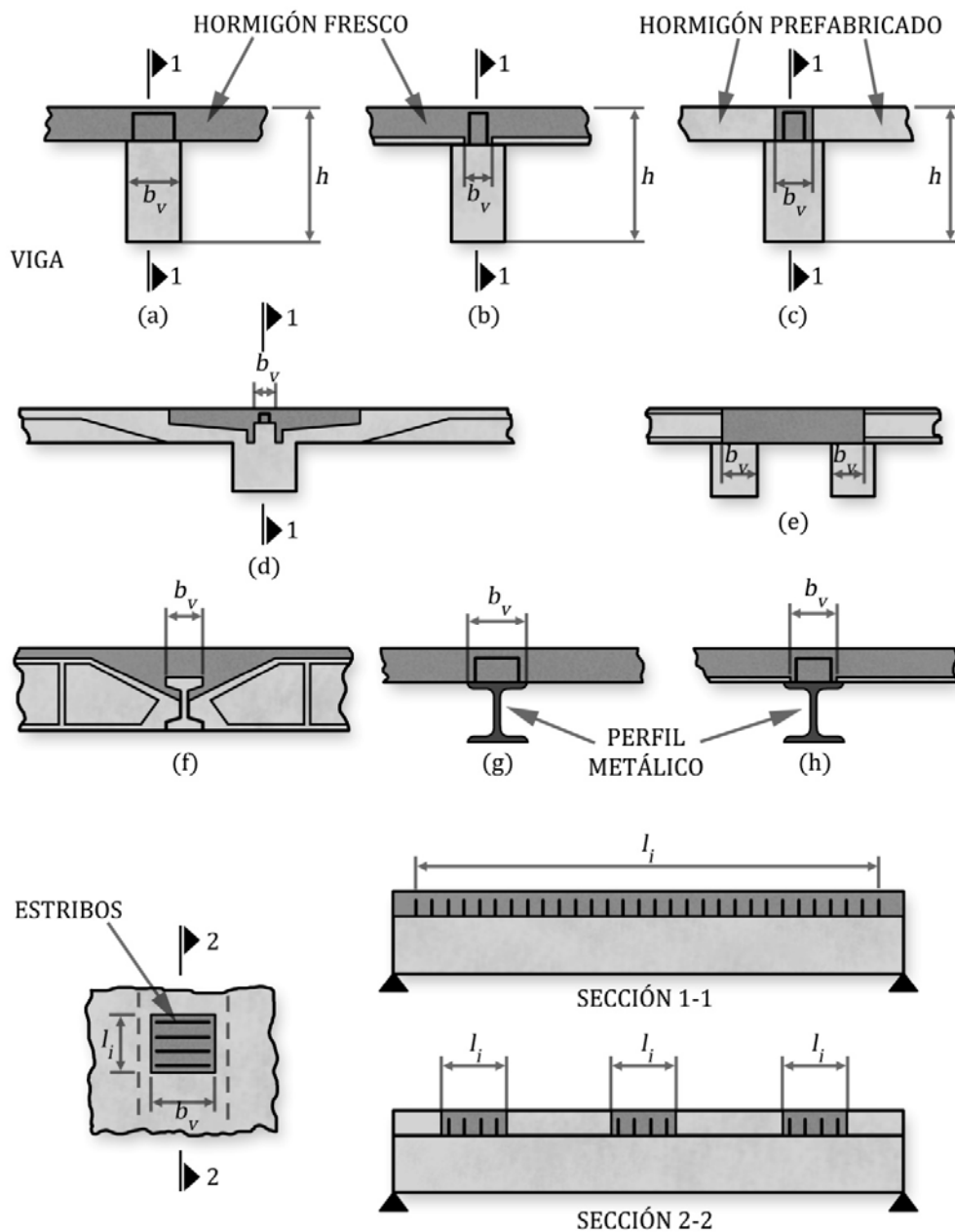


Figura 5,46: Secciones compuestas en vigas.

Sin embargo se crea una junta en la unión de ambas partes, zona en la que debe chequearse la resistencia al cortante horizontal. En elementos compuestos este chequeo transita por tres situaciones diferentes:

- 1^{er} caso:** cuando el cortante horizontal es resistido por la fricción en la superficie de contacto, para lo que esta debe tener una adecuada rugosidad; o si hay refuerzo mínimo pero la superficie es lisa y no brinda resistencia al cortante.
- 2^{do} caso:** al combinarse resistencia a fricción en la superficie de contacto con refuerzo transversal.

3^{er} caso: cuando el cortante horizontal es muy elevado y se requiere de un tratamiento específico para evaluar la resistencia al cortante por fricción de la junta.

La condición que garantiza que la sección compuesta está en el **1^{er} caso** es cuando se asegura que la tensión en la superficie de contacto no supera los $0,6\text{MPa}$. Condición que puede plantearse como:

$$V_u \leq \phi V_{nh} = \phi \cdot 0,6 \cdot b_v d$$

Donde:

V_{nh} resistencia al cortante horizontal.

b_v ancho de la superficie de contacto, como se aprecia en la figura 5,46.

Entonces el comportamiento conjunto de la sección compuesta se garantiza si:

- Las superficies de contacto están limpias y libres de lechada de cemento. Las superficies se pueden hacer **intencionalmente rugosas** estriando las superficies con un rastrillo de alambres rígidos. Ranurar intensamente las superficies puede ser suficiente para lograr la "amplitud total de las protuberancias" de aproximadamente 6mm , requisito para que la superficie sea rugosa.
- La superficie no cumple con la condición anterior, por lo que se considera lisa y que no aporta resistencia al deslizamiento, hay que colocar refuerzo mínimo cuyo espaciamiento debe cumplir lo estipulado para soportar el cortante vertical, cuando se requiere refuerzo por cálculo o la menor de las siguientes condiciones:
 - 4 veces la menor dimensión de la sección soportada.
 - 60cm .

Cuando $V_u > \phi \cdot 0,6 \cdot b_v d$ se presenta el **2do caso** y debe combinarse una superficie intencionalmente rugosa con la colocación de refuerzo transversal y la resistencia al cortante horizontal se expresa como:

$$V_u \leq \phi V_{nh} = \phi(1800 + 0,6\rho_v f_y)b_v d \leq \phi 3,5b_v d$$

Donde se expresan los esfuerzos en MPa , las dimensiones de la sección en metros y se obtiene en kN la fuerza cortante. Además $\rho = \frac{A_v}{b_v s}$ para el área y el espaciamiento de los estribos utilizados.

Sin embargo los esfuerzos que surgen en la superficie de contacto no deben sobrepasar los $3,5\text{MPa}$, por lo que si:

$$V_u > \phi V_{nh} = \phi 3,5b_v d$$

Entonces se presenta el **3er caso** y es obligatoria una comprobación utilizando el método de cortante por fricción, según lo dispuesto en el epígrafe 5,11.

Los estribos que se coloquen para resistir el cortante horizontal deben cumplir lo establecido en cuanto a su anclaje tanto en la viga prefabricada como lo construido en una segunda etapa. En la figura 5,47 se ilustran algunas formas de garantizar lo anterior. Es permitido prolongar el refuerzo transversal destinado a resistir el cortante vertical y que se coloca en la viga prefabricada, también resulta práctico el uso de estribos embebidos tipo "horquilla," como el ilustrado en la Figura 5,47 b, los que se embeben en el hormigón fluido asegurando el anclaje requerido.

En los siguientes problemas se ejemplifica esta metodología.

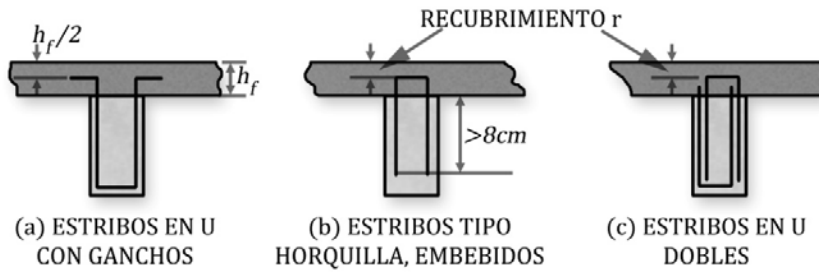


Figura 5,47: Estribos para resistir el cortante horizontal.

Ejercicio 5.5

Se ha construido la sección compuesta de viga y losa que se muestra en la figura 5,48. Compruebe la resistencia al cortante horizontal de la junta si $q_{CP} = 9\text{kN/m}$ y $q_{CU} = 1,8\text{kN/m}$

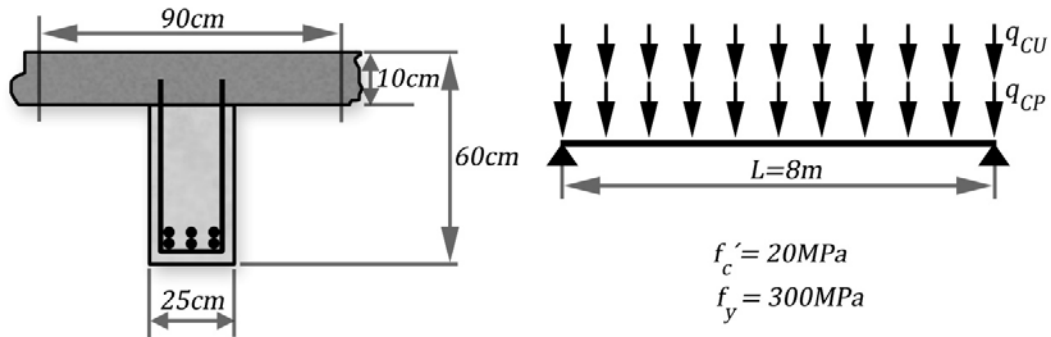


Figura 5,48: Ejercicio 5,5.

Cálculos y discusión

- Determinación de la fuerza cortante actuante.

$$q_u = 1,2q_{CP} + 1,6q_{CU} = 1,2 \cdot 9 + 1,6 \cdot 1,8 = 13,8\text{kN/m}$$

$$V_u = 0,5q_uL = 0,5 \cdot 13,8 \cdot 8 = 54,72\text{kN}$$

Y considerando la sección crítica a d del apoyo, donde $d = 60 - 8,25 = 51,74\text{cm}$

$$V_{u,max} = V_u \frac{4 - 0,5174}{4} = 47,74\text{kN}$$

- Determinación de la resistencia al cortante horizontal.

$$V_{nh} = 0,6b_vd$$

Y como $b_v = 25\text{cm}$, al corresponderse con el ancho de la viga prefabricada

$$V_{nh} = 0,06 \cdot 25 \cdot 51,74 = 77,61\text{kN}$$

$$\phi V_{nh} = 0,75 \cdot 77,61 = 59,28\text{kN}$$

Demostrándose que $V_{u,max} \leq \phi V_{nh}$ por lo que la resistencia al cortante horizontal se garantiza con cualquiera de las siguientes alternativas:

- Crear intencionalmente rugosidad en la superficie de contacto de la viga.
- Colocar refuerzo mínimo ante una superficie lisa. Este refuerzo mínimo debe cumplir.

$$\bullet \quad S_{max} = \frac{A_v f_{yt}}{0,35b_w} \quad \text{para} \quad f'_c \leq 30\text{MPa}.$$

$$s_{max} = \frac{1,42 \cdot 300}{0,35 \cdot 25} = 48,68 \text{ cm} \quad \text{utilizando estribos N° 10.}$$

- $4h_f = 40 \text{ cm}$.
- El refuerzo colocado para tomar el cortante vertical tiene un espaciamiento mínimo de $\frac{d}{2} = 25 \text{ cm}$.

Por lo que puede decidirse prolongar el refuerzo de la viga prefabricada con un espaciamiento menor o colocar refuerzo especialmente anclado a 40 cm .

Ejercicio 5.6

Compruebe la resistencia al cortante horizontal de la junta si $q_{CP} = 9 \text{ kN/m}$ y $q_{CU} = 12 \text{ kN/m}$

Cálculos y discusión

1. Determinación de la fuerza cortante actuante.

$$q_u = 1,2q_{CP} + 1,6q_{CU} = 1,2 \cdot 9 + 1,6 \cdot 12 = 30 \text{ kN/m}$$

$$V_u = 0,5q_u L = 0,5 \cdot 30 \cdot 8 = 120 \text{ k}$$

Y considerando la sección crítica a d del apoyo,

$$V_{u,max} = V_u \frac{4-0,5174}{4} = 104,48 \text{ kN}$$

2. Determinación de la resistencia al cortante horizontal.

Demostrándose que $V_{u,max} > \phi 0,6b_v d = 59,28 \text{ kN}$ por lo que se requerirá la colocación de refuerzo transversal en una superficie intencionalmente rugosa.

Como $V_{u,max} \leq \phi 3,5b_v d = 339,74 \text{ kN}$ la resistencia al cortante horizontal se garantiza por la siguiente expresión:

$$V_{nh} = (1800 + 0,6\rho_v f_y)b_v d$$

Considerando el refuerzo mínimo calculado en el ejemplo anterior con $s_y = 40 \text{ cm}$

$$\rho_v = \frac{A_v}{b_v s_v} = \frac{1,42}{25 \cdot 40} = 1,42 \cdot 10^{-3}$$

Entonces:

$$V_{nh} = (1800 + 0,6 \cdot 1,42 \cdot 10^{-3} \cdot 300)0,25 \cdot 51,74 = 265,89 \text{ kN}$$

$$\phi V_{nh} = 0,75 \cdot 265,89 = 199,42 \text{ kN} > V_{u,max}$$

Por lo que la solución con refuerzo mínimo y superficie rugosa satisface las exigencias del cortante horizontal. Para esta sección el cortante vertical solo requiere refuerzo mínimo.

Incluso si se decide utilizar el refuerzo transversal de la viga prefabricada extendiendo un estribo si y otro no, por lo que $s_y = 50 \text{ cm}$, el valor de V_{nh} será y también se resistirá el cortante horizontal:

$$\rho_v = \frac{A_v}{b_v s_v} = \frac{1,42}{25 \cdot 50} = 1,136 \cdot 10^{-3}$$

Entonces:

$$V_{nh} = (1800 + 0,6 \cdot 1,136 \cdot 10^{-3} \cdot 300)0,25 \cdot 51,74 = 259,28 \text{ kN}$$

$$\phi V_{nh} = 0,75 \cdot 259,28 = 194,46 \text{ kN} > V_{u,max}$$

Ejercicio 5.7

Compruebe la resistencia al cortante horizontal de la junta si $q_{CP} = 9 \text{ kN/m}$ y $q_{CU} = 55 \text{ kN/m}$

Cálculos y discusión

1. Determinación de la fuerza cortante actuante.

$$q_u = 1,2q_{CP} + 1,6q_{CP} = 1,2 \cdot 9 + 1,6 \cdot 55 = 98,8 \text{ kN/m}$$

$$V_u = 0,5q_u L = 0,5 \cdot 98,8 \cdot 8 = 395 \text{ k}$$

Y considerando la sección crítica a d del apoyo,

$$V_{u,max} = V_u \frac{4-0,5174}{4} = 344,08 \text{ kN}$$

Nótese que la magnitud de las cargas es excepcional. El diseño a cortante vertical está prácticamente en el límite permisible de resistencia de la sección de hormigón, ($V_{max} = 5\phi V_c$) y obliga a usar estribos N° 13 espaciados a 11 cm en los 2 m cercanos a los apoyos.

2. Determinación de la resistencia al cortante horizontal.

Demostrándose que $V_{u,max} > \phi 3,5b_v d = 339,74 \text{ kN}$ por lo que se requerirá aplicar el método de cortante por fricción a partir de calcular el cortante horizontal actuante. El PCA recomienda un sencillo procedimiento a partir de obtener el esfuerzo en la junta para el 1er metro desde la sección crítica. Con el auxilio de la figura 5,49 puede plantearse.

$$v_{uh} = \frac{V_{u,max}}{b_v d} = \frac{344,08}{25 \cdot 51,74} = 0,266 \text{ kN/cm}^2 = 2,66 \text{ MPa}$$

$$V_{uh} = v_{uh} b_v \cdot 100 \text{ cm} = 0,266 \cdot 25 \cdot 100 = 669,02 \text{ kN}$$

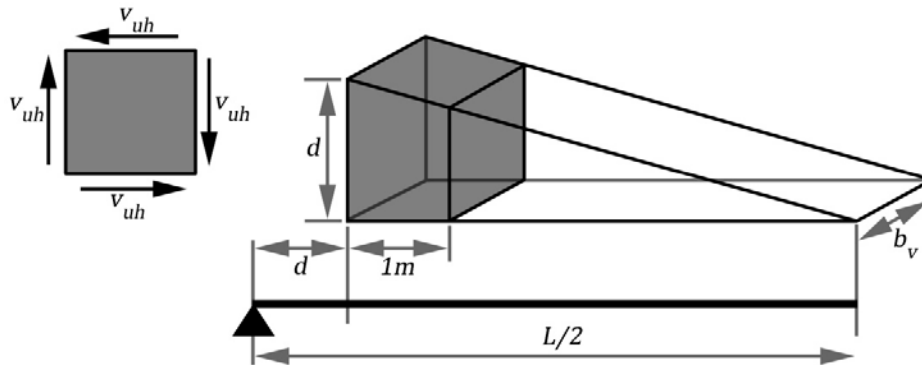


Figura 5,49: Determinación del cortante horizontal actuante.

Y debe garantizarse que:

$$V_{uh} \leq \phi A_{vf} f_y \mu$$

Por lo que:

$$A_{vf} = \frac{V_{uh}}{\phi f_y \mu}$$

Y considerando la superficie como rugosa y $\mu = 1$

$$A_{vf} = \frac{669,02}{0,75 \cdot 30 \cdot 1} = 29,56 \text{ cm}^2$$

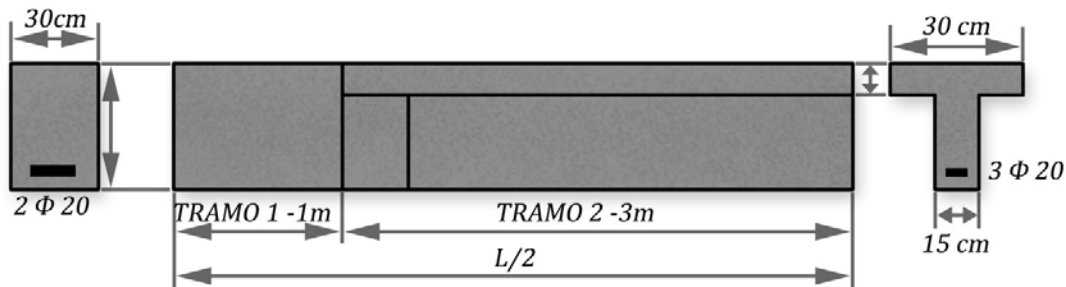
Empleando estribos N° 13, puede calcularse el espaciamiento requerido en este 1er metro de la viga:

$$s = \frac{A_v 100 \text{ cm}}{A_{vf}} = \frac{2,58 \cdot 100}{29,56} = 8,73 \text{ cm}$$

Valor más exigente que el espaciamiento para el cortante vertical.

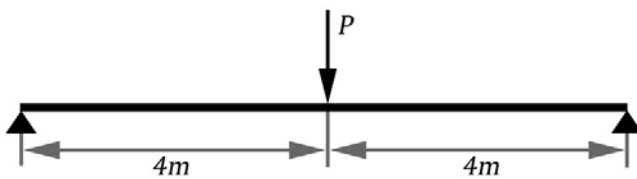
EJERCICIOS PROPUESTOS

- Se han construido viguetas de Hormigón Armado con 10 cm de ancho y 20 de peralto total para soportar una carga 5 kN/m con una luz de 3 m simplemente apoyada. Están armadas con 2 barras $N^\circ 22$ como acero principal y sin refuerzo transversal
Si $f'_c = 20\text{ MPa}$
 - ¿Resiste la sección la Fuerza Cortante externa? Utilice la expresión simplificada para el cálculo de V_c
 - ¿Cuál es el máximo valor de q_u que resistirá la viga construida? Emplee la expresión más detallada de V_c y compare los resultados con los obtenidos en *a*.
- Para soportar una carga de 10 kN/m en una viga de 4 m simplemente apoyada sobre columnas de 20 cm de ancho, se ha dispuesto la sección que se muestra en la figura 5,50

**Figura 5,50 Ejercicio propuesto 2**

Si $f'_c = 20\text{ MPa}$ y no tiene refuerzo transversal

- ¿Resiste la sección la Fuerza Cortante externa? ¿Cuál es la sección más crítica? Utilice la expresión simplificada de V_c
 - Empleando la expresión detallada para el cálculo de V_c obtenga el máximo valor de q_u que puede resistir la viga. Compare estos resultados con los obtenidos en *a*
- Calcule el valor máximo que puede alcanzar la carga P para la viga de la figura 5,51.



$$\begin{aligned}
 b &= 30\text{ cm} & f_y &= 300\text{ MPa} \\
 h &= 80\text{ cm} & f'_c &= 20\text{ MPa} \\
 A_s &= 6\ \phi\ 25 \\
 A_v &= \text{estribos} & s &= 15\text{ cm}
 \end{aligned}$$

Figura 5,51 Ejercicio propuesto 3

Considere la luz medida a cara de la columna.

- Emplee la expresión simplificada de V_c
 - Utilice la expresión detallada de V_c
- Diseñe el refuerzo transversal necesario para la siguiente viga

$L = 8\text{ m}$	$b = 30\text{ cm}$	$A_s = 8\text{ barras } N^\circ 25$
$q_u = 55\text{ kN/m}$	$h = 60\text{ cm}$	$A'_s = 2\text{ barras } N^\circ 25$
	$f'_c = 17\text{ MPa}$	$f_y = 300\text{ MPa}$

La viga está simplemente apoyada y al apoyo llegan solo $4\text{ barras } N^\circ 25$

- Utilice el método del “cortante límite”
 - Utilice la expresión detallada y el método gráfico.
 - Compare y analice estos resultados
- 5) Diseñe el refuerzo transversal necesario para la viga en las siguientes características, como se muestra en la figura 5,52

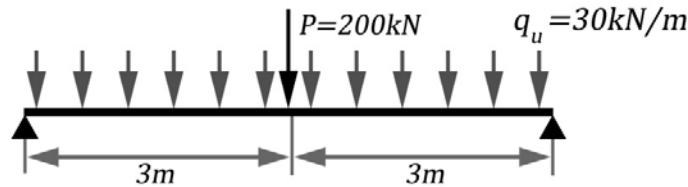


Figura 5,52 Ejercicio propuesto 5

$$b = 30\text{cm} \quad h = 70\text{cm}$$

$$f'_c = 20\text{MPa} \quad f_y = 300\text{MPa}$$

El refuerzo longitudinal es de 6 barras N° 25, del que llegan 2 barras a los apoyos

Considere la luz de la viga de cara a cara de la columna

- Si la viga anterior esta sometida a una carga axial de compresión de $N_u = 200\text{kN}$ ¿se requiere el mismo refuerzo transversal? Justifique su respuesta y recalcule los estribos
- ¿Qué ocurrirá si la carga anterior es a tracción? Calcule el refuerzo
- Diseñe el refuerzo transversal para la viga de la figura 5,53.

Considere la variación del refuerzo longitudinal para lo que debe realizar el corte de barras correspondiente al utilizar el método gráfico.

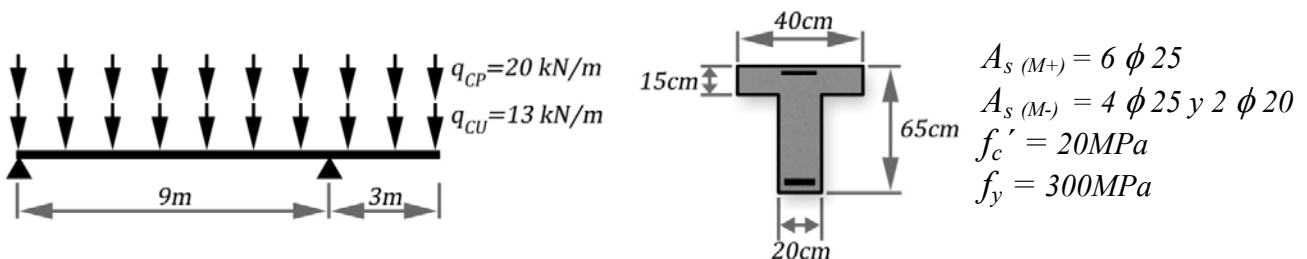


Figura 5,53 Ejercicio propuesto 8

- 9) Para la viga de la figura 5,54.

$$f'_c = 20\text{MPa} \quad f_y = 300\text{MPa}$$

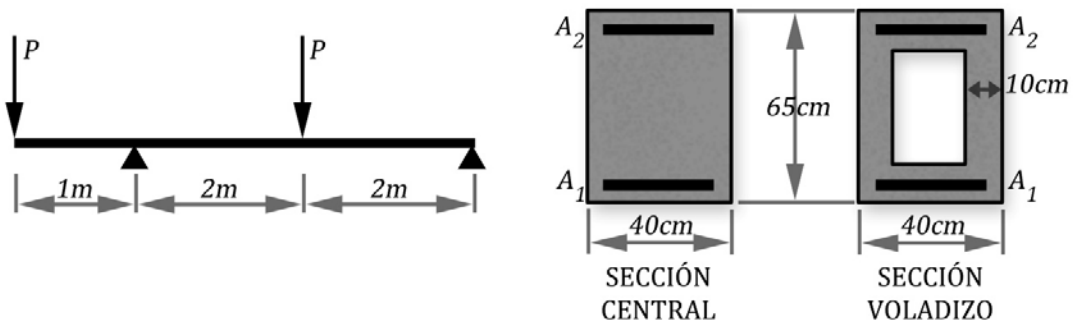


Figura 5,54 Ejercicio propuesto 9

$$A_1 = 2 \text{ barras } N^{\circ}22$$

$$A_2 = 4 \text{ barras } N^{\circ}20 (M^-)$$

$$A_1 = 4 \text{ barras } N^{\circ}22$$

$$A_2 = 2 \text{ barras } N^{\circ}20 (M^+)$$

- a) Obtenga el valor de V_c que resulte más desfavorable para la zona entre apoyos y para el voladizo

Justifique sus cálculos

- b) Si $P = 300kN$ Calcule el refuerzo transversal necesario en cada zona y su distribución

Considere que la viga apoya sobre columnas de 30 cm de ancho

- 10) Ante una viga con los características que se ilustran en la figura 5,55.

$$f'_c = 20MPa$$

$$f_y = 300MPa$$

$$A_1 = 4 \text{ barras } N^{\circ}20$$

$$A_2 = 2 \text{ barras } N^{\circ}25 (M^-)$$

$$A_1 = 2 \text{ barras } N^{\circ}20$$

$$A_2 = 6 \text{ barras } N^{\circ}25 (M^+)$$

- a) Calcule V_c para la sección más desfavorable, desde el punto de vista de la capacidad resistente del hormigón, en cada tramo (voladizo y entre apoyos)
- b) Si entre apoyos se han colocado estribos #10 espaciado a 15 cm ¿Qué valor máximo tendrá P para que no se produzca un fallo a constante?

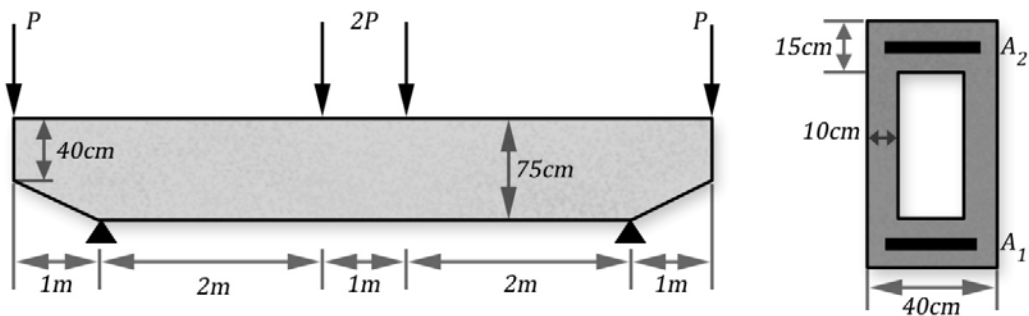


Figura 5,55 Ejercicio propuesto 10

- c) ¿Puede colocarse esta armadura en la zona del voladizo? Justifique
¿Considera correcto colocar los estribos espaciados uniformemente?
- d) Evalúe las siguientes soluciones con vista a incrementar la capacidad resistente a constante de la sección
- Incrementar el ancho b hasta $50cm$
 - Aumentar al doble el refuerzo situado en la zona comprimida (A_s')
 - Aumentar al doble el refuerzo situado en la zona traccionada (A_s)
 - Disminuir el valor de P
 - Disminuir el valor de f'_c

BIBLIOGRAFÍA CONSULTADA

1. American Concrete Institute. Building Code Requirements for Reinforced Concrete, ACI 318 – 02, Detroit, Michigan. 2005
2. ACI 318 02 Requisitos para Hormigón Estructural. PCA 2002.
3. Babe Ruano M. “Elementos de Estructura de Hormigón Armado”. Tomo I. Editorial Pueblo y Educación . la Habana. Cuba. 1978
4. Babe Ruano M. “Hormigón Armado para Arquitectos. Editorial ISPJAE 1986
5. Baykov, V. y E. Sigalov. (1986). Estructuras de Hormigón Armado. Moscú: Ed. Mir, 1986
6. CEB–FIP. Código Modelo del Comité Europeo del hormigón y la Federación Internacional del Pretensado. 1990
7. Collins, M. Comportamiento del Hormigón. Impresiones Ligeras, ISPJAE. 1978
8. Medina Torri F.; Ruiz Alejo L. “Hormigón Estructural 1” Editorial Pueblo y Educación. La Habana. Cuba. 1991
9. Nawy, E. “Concreto Reforzado. Un enfoque básico”. Ed. Prentice-Hall Inc. México. 1988
10. N.C. 053–039–1997. Obras de Hormigón Armado. Principios Generales y Métodos de Cálculo. 1997
11. Nilson, H. A. Diseño de Estructuras de Concreto Presforzado. México: Ed. Limusa, 1999
12. Park, R. y T, Paulay. Estructuras de Concreto Reforzado. México: Ed. Limusa, 1979
13. Valdés, Ernesto. Hormigón Estructural. Método Unificado, Impresiones Ligeras, UCLV. 1985

CAPÍTULO 6

El esfuerzo tangencial de torsión

6,1 COMPORTAMIENTO DE SECCIONES A TORSIÓN

La torsión no es un fenómeno tan raro y particular como se pretende. Principalmente en estructuras continuas la torsión en vigas se hace un fenómeno importante y que puede provocar el fallo si no se evalúa adecuadamente.

En el presente capítulo se analizará la torsión en secciones llevadas a tubos equivalentes de paredes delgadas, suposición que se acerca a la distribución de tensiones que ocurre en la realidad.

Se ha demostrado y constituye teoría que la capacidad a torsión de una sección está concentrada básicamente en su superficie por lo que se admite universalmente su equivalencia a una sección de paredes delgadas con espesor t

6,1,1 TUBOS DE PAREDES DELGADAS EN TORSIÓN

Si se analiza un tubo de paredes delgadas a torsión se produce un estado tensional como se muestra en la figura 6,1

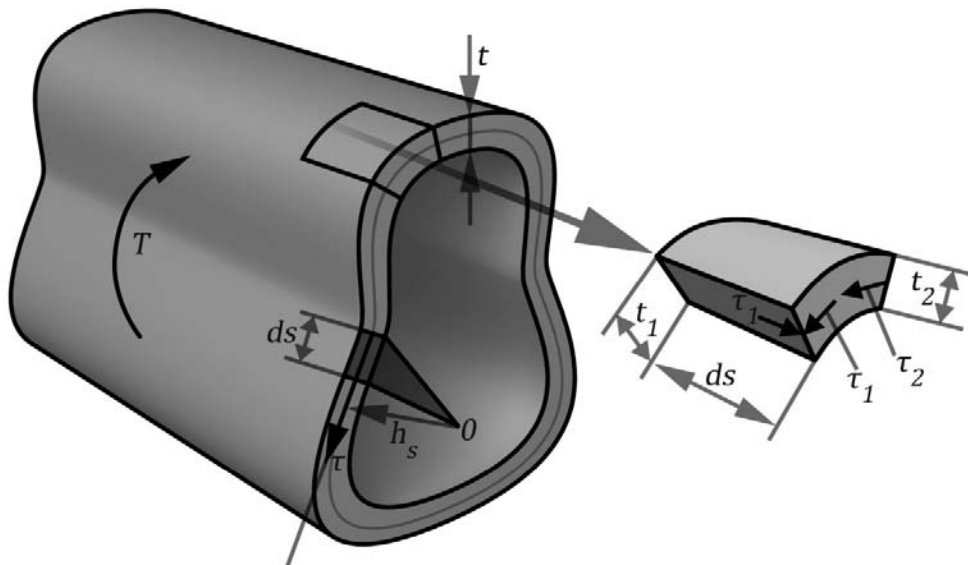


Figura 6,1: Torsión en tubos de paredes delgadas

Donde

τ_1 y τ_2

tensiones tangenciales provocadas por el momento torsor T

El equilibrio en la dirección longitudinal del segmento de tubo mostrado en la figura, será:

$$v_1 t_1 = v_2 t_2 = \text{CONSTANTE} = q = v \cdot t$$

Siendo q cortante específico por unidad de longitud

Y ante un giro θ provocado por el momento torsor, puede plantearse

$$dT = q d_s h_s$$

$$T = \oint q h_s d_s$$

Siendo:

$$\oint h_s d_s = 2A_o$$

Donde A_o es el área interior a la línea media de la pared del tubo

Entonces para un espesor t constante:

$$T = q \cdot 2A_o$$

$$q = \frac{T}{2A_o}$$

$$v = \frac{T}{2A_o t}$$

Un análisis de las deformaciones ocurridas, puede plantearse por el principio de trabajos virtuales entre las fuerzas externas y los esfuerzos internos en equilibrio (T, v) , y los desplazamientos y deformaciones (θ, γ) , entonces:

$$T \cdot \theta - \oint v \cdot \gamma d_v = 0$$

Donde

$$\gamma = \frac{v}{G} \quad \text{ángulo de distorsión}$$

$$d_v = t d_s L$$

$$G \quad \text{rigidez a cortante}$$

$$T \cdot \theta = \oint \frac{T}{2A_o t} \frac{T}{2A_o t \cdot G} t \cdot L \cdot d_v$$

$$\theta = \frac{T \cdot L}{4A_o^2 t \cdot G} \oint d_s$$

Y como

$$\oint d_s = p_o$$

Siendo p_o el perímetro de la línea media de la pared del tubo

Finalmente:

$$\theta = \frac{T \cdot L}{4A_o^2 t \cdot G} p_o$$

Si llamamos a $\psi = \frac{\theta}{L}$ curvatura unitaria y a $K = \frac{4A_o^2 t}{p_o}$ inercia torsional

Entonces:

$$\psi = \frac{T}{K \cdot G}$$

Expresión semejante en significación a la conocida para la flexión que caracteriza la curvatura como

$$\varphi = \frac{M}{E \cdot I}$$

6.1.2 COMPORTAMIENTO ANTES DE LA FISURACIÓN. TORSIÓN EN RÉGIMEN ELÁSTICO

Conocida la expresión para obtener las tensiones tangenciales a torsión para tubos de paredes delgadas $v = \frac{T}{2A_o t}$, puede generalizarse a otro tipo de sección (rectangular, circular, etc.) a través de:

$$v = \frac{T}{W_{tor}}$$

Donde W_{tor} es el Modulo de la sección a torsión

Por ejemplo en *secciones rectangulares*

$$W_{tor} = \alpha b^2 h$$

Donde el valor de α varía en función de la rectangularidad de la sección y de si se considera esta con comportamiento elástico o plástico.

Para *secciones circulares*

$$W_{tor} = \alpha D^2 \quad \alpha = 2$$

Considerando lo planteado anteriormente se acepta convertir una sección maciza en una virtual con paredes delgadas y espesor t_d que se calcula aproximadamente por la expresión:

$$t_d = \frac{3}{4} \frac{A_{cp}}{p_{cp}}$$

Donde

A_{cp} área encerrada por el perímetro exterior de la sección transversal

p_{cp} perímetro exterior de la sección transversal

Otro de los problemas a resolver es la selección de la máxima tensión a tracción que provocan los esfuerzos a torsión. Un análisis elástico clásico de la actuación de las tensiones tangenciales por torsión, si la tensión normal es cero, indica que el fallo se produce por grietas a 45° y con una tensión diagonal $\sigma_t = v$ como se aprecia en la figura 6.2

Si se presenta una tensión a compresión, por ejemplo por el pretensado, se puede plantear la conocida expresión:

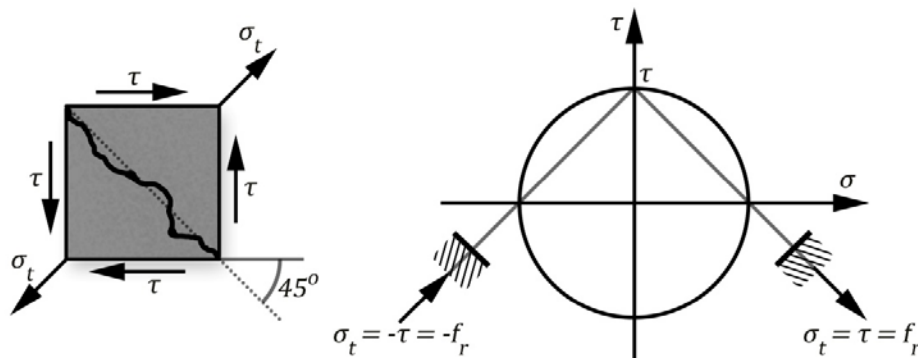


Figura 6.2: Tensiones principales debido al Momento Torsión. Esfuerzos normales cero.

$$v = \sqrt{1 + \frac{\sigma}{f_r} f_r}$$

Donde f_r es el máximo esfuerzo resistente a tracción del hormigón

Estimar el valor de f_r resulta un tópico de gran importancia y al que se la han dedicado muchos estudios. Es conocido que la resistencia del hormigón a tracción no depende solo de la calidad de este, sino también de la forma en que se aplican las cargas. A continuación, en la figura 6,3, se ilustran las reflexiones de Collins sobre el asunto, con propuestas de valores para distintos tipos de solicitaciones.

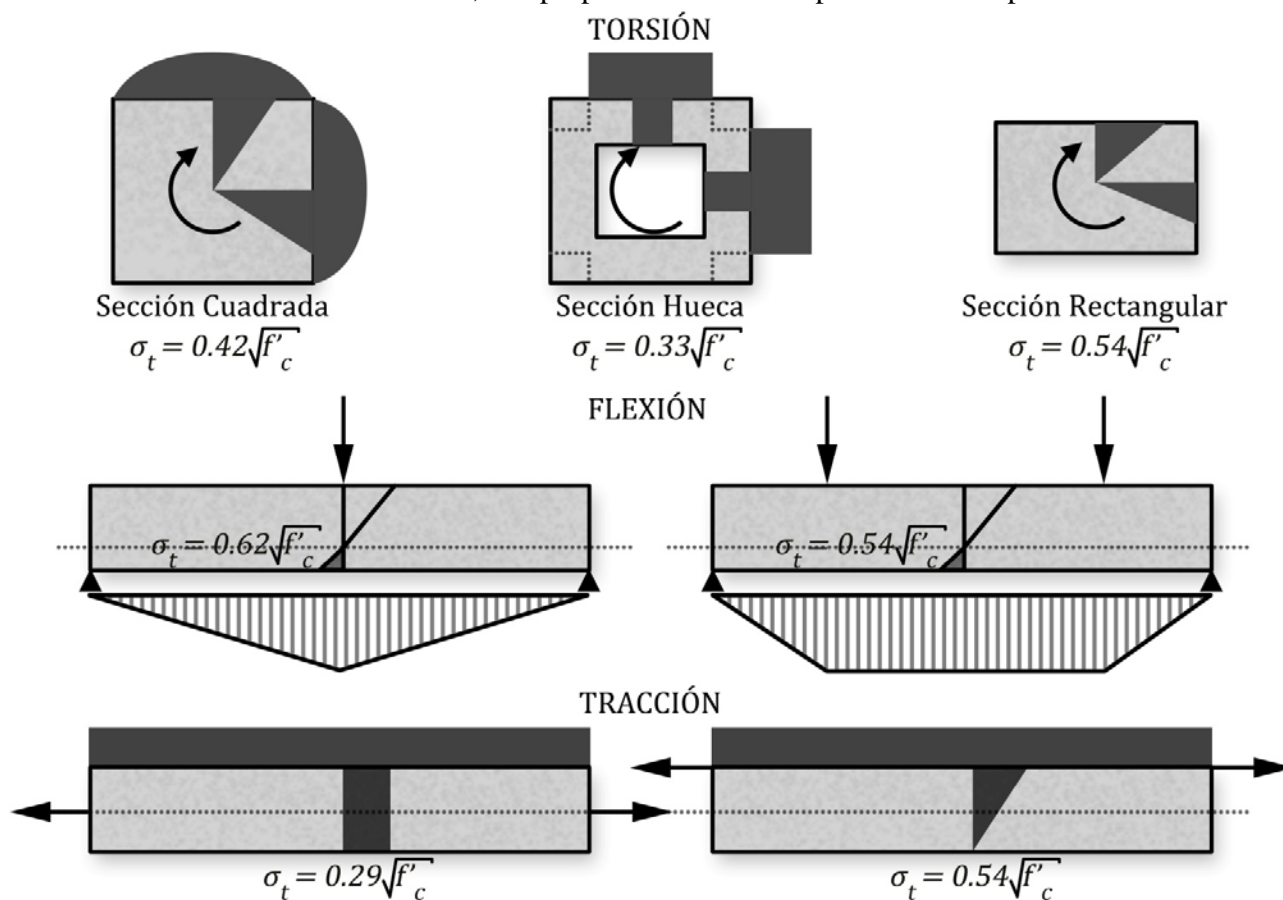


Figura 6,3 Valores de la tensión principal de tracción en la fisuración

Collins recomienda considerar el valor de $f_r = 0.33\sqrt{f'_c}$ como tensión máxima a tracción para secciones sometidas a torsión, que resulta conservador y válido para la utilización del procedimiento del tubo equivalente. Este es el mismo valor utilizado en cortante (fisuras por tracción diagonal en las grietas a cortante) y cercano al $f_r = 0.29\sqrt{f'_c}$ que se emplea conservadoramente.

La rigidez ante la torsión puede obtenerse por medio de:

$$G = \frac{E}{2(1 + \mu)}$$

Donde μ es el coeficiente de Possión

No obstante puede aceptarse como una buena aproximación que $G = 0.5E$

Finalmente la rigidez a la torsión será GK y como se sabe

$$K = \frac{4A_o^2 t}{p_o} \quad \text{para el tubo equivalente}$$

$$K = \alpha b^3 h \quad \text{para secciones rectangulares con comportamiento elástico}$$

Entonces podría calcularse el momento torsor máximo resistente a la fisuración T_{cr} :

$$T_{cr} = W_{tor} f_r$$

Para una sección general y para el tubo equivalente:

$$T_{cr} = 2A_o q$$

Donde:

$$q = f_r \cdot t \quad f_r = 0,33\sqrt{f_c'}$$

6.1.3 COMPORTAMIENTO DESPUÉS DE LA FISURACIÓN

Cuando

$$T > T_{cr} = 2A_o q = W_{tor} f_r = W_{tor} \cdot 330\sqrt{f_c'}$$

La sección de hormigón se fisurará y fallaría de no disponer de acero de refuerzo, por tanto después de la fisuración se hace necesario la utilización de una armadura de acero conformada por refuerzo longitudinal y transversal

Evaluando la figura 6,4 puede plantearse que el T es resistido por tres elementos

- Acero longitudinal: para resistir las tensiones longitudinales a lo largo de la grieta
- Acero transversal para resistir las tensiones verticales a lo largo de la grieta
- Diagonales a compresión del hormigón: para resistir las tensiones máximas a compresión entre grietas

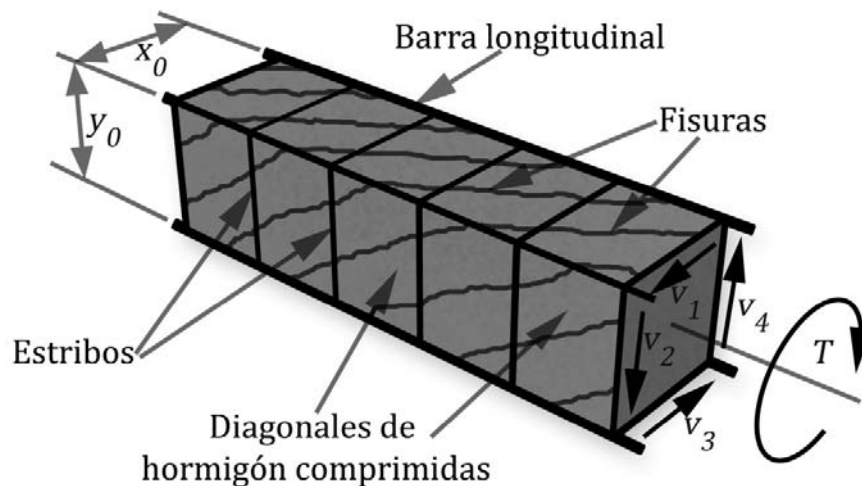


Figura 6,4: Torsión en tubos de paredes delgadas de Hormigón Armado

Analizando por separado cada efecto:

Diagonales a compresión del hormigón

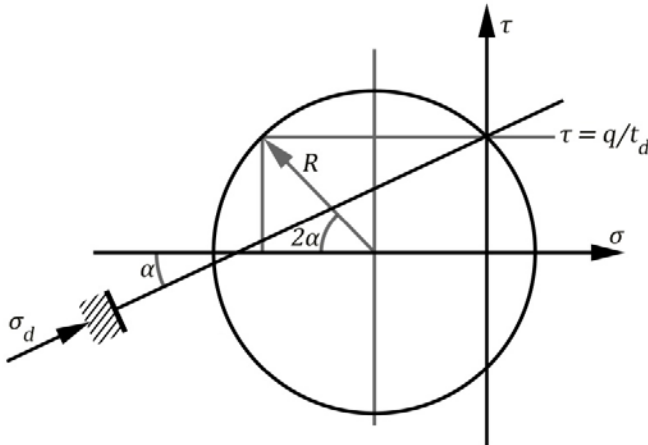
En las grietas inclinadas con un ángulo α , se crean tensiones máximas a compresión σ_d , que se presentan bajo la acción de los esfuerzos producidos por el momento torsor, que se manifiestan en la tensión tangencial y el cortante específico q . Si:

$$q = \frac{T}{2A_o}$$

Para el espesor del tubo equivalente t_d entonces:

$$v = \frac{q}{t_d}$$

Y como no hay esfuerzos normales ya que la sección se fisuró, con el apoyo del círculo de Morh mostrado en la figura 6,5 puede obtenerse σ_d para estas condiciones



$$R = \frac{v}{\text{sen}2\alpha} = \frac{q}{t_d \text{sen}2\alpha}$$

Figura 6,5: Círculo de Morh para las tensiones en las bielas a compresión

$$\sigma_d = 2R$$

$$\sigma_d = 2 \frac{q}{t_d \text{sen}2\alpha}$$

$$\sigma_d t_d = 2 \frac{q}{\text{sen}2\alpha}$$

Acero longitudinal

Analizando el equilibrio en la sección bajo la acción del Momento Torsor este produce esfuerzos tangenciales, q , que se representan en la figura 6,6:

Donde

$$N_{dy} = q \cdot p_o$$

$$N_{dx} = \frac{N_{dy}}{\tan\alpha} = \frac{q \cdot p_o}{\tan\alpha}$$

Si la fuerza horizontal debe ser resistida por el refuerzo longitudinal, puede plantearse que:

$$N_{dx} = \sigma_l A_l$$

Siendo A_l el área de acero longitudinal requerida, pero si se hace la conversión de este refuerzo a un tubo equivalente distribuido en todo el perímetro de la sección y con espesor t_l , donde:

$$t_l = \frac{A_l}{p_o}$$

Finalmente

$$N_{dx} = \sigma_l A_l = \frac{q \cdot p_o}{\tan\alpha}$$

$$\sigma_t t_l = \frac{q}{\tan \alpha}$$

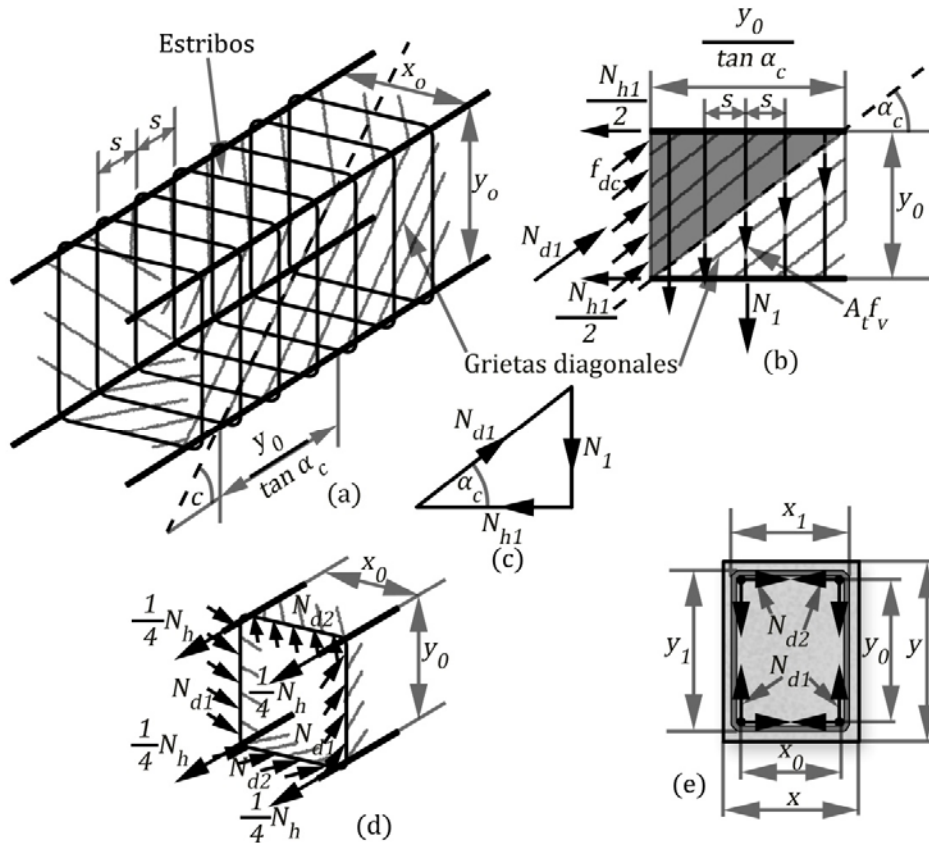


Figura 6,6: Aporte de las armaduras a Torsión

Acero transversal

La colocación de los estribos tiene como función resistir las tensiones que provocan las diagonales de hormigón y que tratan de destruir las esquinas de la sección

En la figura 6,6 se aprecia claramente en cada esquina la acción de las fuerzas N_{d1} y N_{d2} . Se conoce que en el perímetro p_o se origina una fuerza $N_{dy} = q \cdot p_o$, por lo que si se quiere obtener la cantidad de refuerzo para estribos espaciados una distancia s , se plantea el equilibrio de fuerzas de forma tal que:

$$N_{dy} = 2N_{d1} + 2N_{d2} = q \cdot p_o$$

Donde:

$$N_{d1} = n_1 A_t \sigma_t$$

$$N_{d2} = n_2 A_t \sigma_t$$

Siendo:

A_t el área transversal de los estribos

n_1 número de estribos en la proyección de la grieta en el eje y (y_o)

$$n_1 = \frac{y_o}{s \cdot \tan \alpha}$$

n_2 número de estribos en la proyección de la grieta en el eje x (x_o)

$$n_2 = \frac{x_o}{s \cdot \tan \alpha}$$

Finalmente:

$$2A_t \sigma_t \frac{y_o}{s \cdot \tan \alpha} + 2A_t \sigma_t \frac{x_o}{s \cdot \tan \alpha} = q \cdot p_o$$

$$q \cdot p_o = 2A_t \sigma_t \frac{y_o + x_o}{s \cdot \tan \alpha}$$

Como $p_o = 2(y_o + x_o)$

Y si se obtiene un espesor virtual t_t de un estribo laminar:

$$t_t = \frac{A_t}{s}$$

Se obtiene finalmente:

$$\sigma_t t_t = q \cdot \tan \alpha$$

Como resumen puede reiterarse que el momento torsor será resistido por

- Diagonales de hormigón que permiten la aparición del cortante específico q , cuya expresión resistente es $\sigma_d t_d = 2 \frac{q}{\sin 2\alpha}$
- Acero longitudinal que transmiten las tensiones longitudinalmente y que su régimen tensional viene dado por $\sigma_l t_l = \frac{q}{\tan \alpha}$
- Acero transversal que impiden la destrucción de las esquinas y que se refleja en la expresión $\sigma_t t_t = q \cdot \tan \alpha$

6.1.4 ECUACIONES DE COMPATIBILIDAD

Una vez calculadas las tensiones en el refuerzo y en las diagonales de hormigón, se comprueba que faltaría una cuarta ecuación para resolver el problema de análisis del comportamiento de la sección a torsión. Esta cuarta ecuación la suministra el análisis de compatibilidad de deformaciones de la torsión, al relacionar las deformaciones de las bielas del hormigón (ε_d), el acero longitudinal (ε_l) y el transversal (ε_t) con el ángulo de distorsión resultante (γ).

Si se aplica el principio de los trabajos virtuales, el Momento Torsor unitario y las tensiones del refuerzo y el hormigón serán el sistema de fuerzas, mientras que las deformaciones y la distorsión serán el sistema de desplazamientos. Finalmente se obtiene la siguiente ecuación:

$$1 \cdot \theta - \sigma_l t_l p_o (\varepsilon_l L) - \sigma_t t_t p_h (\varepsilon_t L) - \sigma_d t_d p_o (\varepsilon_d L) = 0$$

Donde p_h es el perímetro del estribo

Se conoce que la deformación unitaria es $\psi = \frac{\theta}{L}$ y si se sustituye en la ecuación anterior los valores de $\sigma_l t_l$, $\sigma_d t_d$ y $\sigma_t t_t$ se obtiene la ecuación de compatibilidad

$$\psi = \frac{p_o}{2A_o} \left(\frac{\varepsilon_l}{\tan \alpha} + \varepsilon_t \frac{p_h}{p_o} \tan \alpha + \frac{2\varepsilon_d}{\sin 2\alpha} \right)$$

Se ha demostrado que la inclinación de la grieta α se regula en el sistema cuando la energía de deformación en este sea mínima y esta lo es cuando el trabajo externo es también mínimo. Esto significa que:

$$\frac{d\psi}{d\alpha} = 0$$

Y el α que cumple esta condición, calculado a partir de lo anterior, es:

$$\tan^2 \alpha = \frac{\varepsilon_d + \varepsilon_l}{\varepsilon_d + \varepsilon_t \frac{p_h}{p_o}}$$

Ecuación que completa el juego de ecuaciones para la solución del problema.

Al relacionar la distorsión ψ provocada por la torsión con la curvatura por flexión φ se aprecia en la figura 6,7 que el elemento a torsión se distorsiona en forma de paraboloide hiperbólico y se demuestra que:

$$\varphi = \psi \operatorname{sen} 2\alpha$$

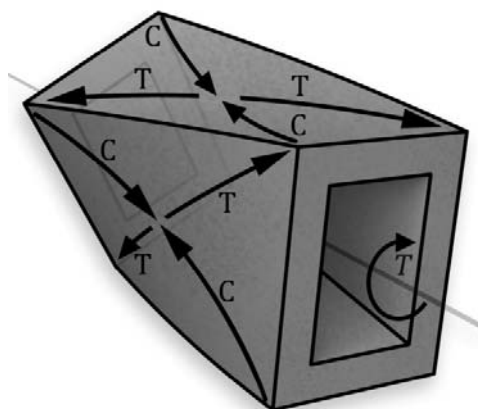


Figura 6,7: Deformaciones en tubos de paredes delgadas a Torsión

De forma tal que si se quiere obtener la deformación máxima del hormigón ε_{cs} en la superficie del tubo equivalente, conociendo la deformación media ε_d en las bielas a compresión, obtenida por el proceso anterior, puede plantearse que:

$$\varepsilon_{cs} = \varepsilon_d + \frac{t_d}{2} \psi \operatorname{sen} 2\alpha$$

Como se ha explicado t_d es el espesor del tubo equivalente y por tanto un valor virtual, función del régimen de trabajo de la sección, ya que representa la zona de la sección maciza verdaderamente comprimida. A partir de t_d se obtiene A_o como el área encerrada por su línea media. Analizando mecánicamente la resistencia a torsión, el valor de t_d espesor comprimido de la sección, es equivalente a c profundidad de la zona comprimida a flexión y A_o tiene el mismo significado que el valor del brazo jd .

Se ha demostrado experimentalmente como el hormigón por fuera del estribo se fisura bajo la torsión, por las tensiones transmitidas por los estribos y por tanto no aporta resistencia. A partir de esta conclusión se propone que A_o se calcule como el área delimitada por la línea que une los centroides del acero longitudinal y entonces:

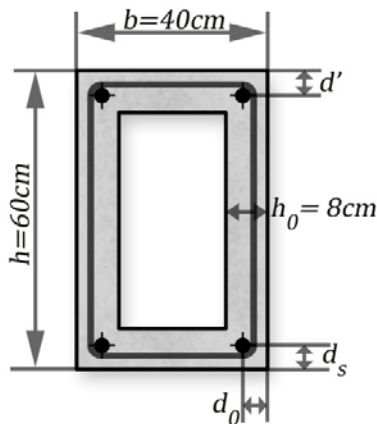
$$t_d = \frac{3}{4} \frac{A_o}{p_o}$$

Experimentalmente también se ha demostrado que el aporte del hormigón se manifiesta muy cercano al símil del tubo equivalente y por otra parte el comportamiento del hormigón comprimido es prácticamente lineal.

Ejercicio 6.1

Para la sección mostrada en la figura 6,8 calcule la curva de comportamiento T vs ψ .

Dicha sección esta armada con 4 barras N°25 situadas en las esquinas como refuerzo longitudinal, los estribos son N°10 y están espaciados 10cm. El recubrimiento es de 30mm.



$$A_l = 20,4 \text{ cm}^2$$

$$A_t = 0,71 \text{ cm}^2$$

$$s = 10 \text{ cm}$$

$$r = 3 \text{ cm}$$

$$d_d = 2,54 \text{ cm}$$

$$d_{de} = 0,95 \text{ cm}$$

$$f_y = 300 \text{ MPa}$$

$$f_c' = 30 \text{ MPa}$$

Figura 6,8: Sección transversal ejercicio 6,1

Cálculos y discusión

1. Cálculo de características geométricas de la sección.

$$d_s = r + d_{be} + \frac{d_b}{2} = 5,22 \text{ cm} \quad d_o = d_s$$

La línea media de la sección tubular equivalente se traza uniendo los centros de las barras longitudinales, por tanto:

$$p_o = 2(h + b - 4d_s)$$

$$p_o = 2(60 + 40 - 4 \cdot 5,22) = 158,24 \text{ cm}$$

$$A_o = (h - 2d_s)(b - 2d_o)$$

$$A_o = (60 - 2 \cdot 5)(40 - 2 \cdot 5) = 1464,99 \text{ cm}^2$$

$$t_d = \frac{3}{4} \frac{A_o}{p_o}$$

$$t_d = \frac{3}{4} \frac{1464,99}{158,24} = 6,94 \text{ cm} < h_o = 8 \text{ cm}$$

Por lo que se adopta el menor, 6,94cm

Y los espesores virtuales del refuerzo longitudinal y transversal:

$$t_l = \frac{A_l}{p_o}$$

$$t_l = \frac{20,4}{158,24} = 0,129cm$$

$$t_t = \frac{A_t}{s}$$

$$t_l = \frac{0,71}{10} = 0,071cm$$

El perímetro del estribo se obtiene al calcular la distancia de su eje a los bordes, que es de 3,5cm

$$p_h = 2(h + b - 4 \cdot 3,5)$$

$$p_h = 2(60 + 40 - 4 \cdot 3,5) = 172cm$$

2. Momento de Fisuración

Antes de la fisuración se realizará un análisis elástico, considerando solo el aporte de la sección de hormigón

$$q = f_r t_c$$

Donde:

t_c Espesor virtual para la sección de hormigón no fisurada

$$t_c = \frac{3}{4} \frac{A_{cp}}{p_{cp}}$$

$$t_c = \frac{3}{4} \frac{40 \cdot 60}{200} = 9cm > h_o$$

$$f_r = 0,33\sqrt{f_c'}$$

$$f_r = 0,33\sqrt{30} = 1,81MPa$$

$$q = 0,181 \cdot 8 = 1,446kN/m$$

$$T_{cr} = 2A_o q$$

Donde A_o y p_o se determinan, para la sección no fisurada, por la línea media del tubo equivalente de espesor $t_c = 8cm$.

$$A_o = (60 - 2 \cdot 4)(40 - 2 \cdot 4) = 1664cm^2$$

$$p_o = (60 + 40 - 2 \cdot 8) = 168cm$$

$$T_{cr} = 2 \cdot 1664 \cdot 1,446 = 4812 = 48,12kN \cdot m$$

$$\psi_{cr} = \frac{T_{cr}}{K \cdot G}$$

donde:

$$K = \frac{4A_o^2 t_c}{p_o}$$

$$K = \frac{4 \cdot 1664^2 \cdot 8}{168} = 527408,76cm^3$$

$$G = 0,5E_c$$

$$G = 0,5 \cdot 4700\sqrt{30} = 12871,5MPa$$

$$\psi_{cr} = \frac{4812}{12871,3 \cdot 527408,76} = 0,0709 \cdot 10^{-4}rad/cm$$

3. Calculo para la zona fisurada

a) Después de la fisuración

Manteniendo T_{cr} y q , calcular la deformación de cada acero, de la biela de hormigón y la distorsión ψ una vez que la sección se ha fisurado. Se realiza un proceso de tanteos, fijando el valor de α

- Asumiendo un valor inicial de $\alpha = \frac{\pi}{4} = 0,785 \text{ rad}$

$$\sigma_l = \frac{q}{t_l \tan \alpha}$$

$$\sigma_l = \frac{1,446}{0,129 \tan(0,785)} = 11,225 = 112,25 \text{ MPa}$$

$$\varepsilon_l = \frac{\sigma_l}{E_s} = 0,00056$$

$$\sigma_t = \frac{q \cdot \tan \alpha}{t_t}$$

$$\sigma_t = \frac{1,446 \cdot \tan(0,785)}{0,071} = 20,35 = 203,5 \text{ MPa}$$

$$\varepsilon_t = \frac{\sigma_t}{E_s} = 0,00102$$

$$\sigma_d = 2 \frac{q}{t_d \sin 2\alpha}$$

$$\sigma_d = 2 \frac{1,446}{8 \cdot \sin(2 \cdot 0,785)} = 0,417 = 4,17 \text{ MPa}$$

$$\varepsilon_d = \frac{\sigma_d}{E_c} = 0,00016$$

Comprobando la suposición inicial, se recalcula α

$$\tan^2 \alpha = \frac{\varepsilon_d + \varepsilon_l}{\varepsilon_d + \varepsilon_t \frac{p_h}{p_o}}$$

$$\alpha = \tan^{-1} \left[\sqrt{\frac{0,00016 + 0,00056}{0,00016 + 0,00102 \frac{172}{158}}} \right] = 0,647$$

Como difiere del ángulo asumido se repite el tanteo con un valor intermedio. Una vez realizado el tanteo se logra la convergencia con los siguientes valores:

$$\alpha = 0,709 \quad \varepsilon_l = 0,00065 \quad \varepsilon_t = 0,00087 \quad \varepsilon_d = 0,00016$$

Entonces calculando la distorsión:

$$\psi_{cr2} = \frac{p_o}{2A_o} \left(\frac{\varepsilon_l}{\tan \alpha} + \varepsilon_t \frac{p_h}{p_o} \tan \alpha + \frac{2\varepsilon_d}{\sin 2\alpha} \right)$$

$$\psi_{cr2} = \frac{158}{2 \cdot 1465} \left(\frac{0,00065}{\tan(0,709)} + 0,00087 \frac{172}{158} \tan(0,709) + \frac{2 \cdot 0,00016}{\sin(2 \cdot 0,709)} \right) = 1,03 \cdot 10^{-4} \text{ rad/cm}$$

$$\varepsilon_{cs} = \varepsilon_d + \frac{t_d}{2} \psi_{cr2} \sin 2\alpha$$

$$\varepsilon_{cs} = 0,00016 + \frac{6,94}{2} 1,03 \cdot 10^{-4} \sin(2 \cdot 0,709) = 0,00052$$

b) Para $\varepsilon_t \leq \varepsilon_y$

El procedimiento es ir variando ε_t y calculando para este las deformaciones y tensiones en el acero longitudinal y las bielas de hormigón. Se parte de la base que es el acero transversal el refuerzo que alcanzará primero la fluencia. Ejemplificando para $\varepsilon_t = \varepsilon_y = 0,0015$ y suponiendo una inclinación de la grieta inicial igual a la del paso anterior, por tanto de $\alpha = 0,709$

$$\sigma_t = f_y$$

$$q = \frac{\sigma_t t_t}{\tan \alpha}$$

$$q = \frac{30 \cdot 0,071}{\tan(0,706)} = 2,49 \text{ kN/cm}$$

$$\sigma_l = \frac{q}{t_l \tan \alpha}$$

$$\sigma_l = \frac{2,49}{0,129 \tan(0,709)} = 22,49 = 224,9 \text{ MPa}$$

$$\varepsilon_l = \frac{\sigma_l}{E_s} = 0,00112$$

$$\sigma_d = 2 \frac{q}{t_d \sin 2\alpha}$$

$$\sigma_d = 2 \frac{2,49}{6,94 \cdot \sin(2 \cdot 0,709)} = 0,724 = 7,24 \text{ MPa}$$

$$\varepsilon_d = \frac{\sigma_d}{E_c} = 0,00028$$

Comprobando la suposición de $\alpha = 0,709$

$$\tan^2 \alpha = \frac{\varepsilon_d + \varepsilon_l}{\varepsilon_d + \varepsilon_t} \frac{p_h}{p_o}$$

$$\alpha = \tan^{-1} \left[\sqrt{\frac{0,00028 + 0,001127}{0,00028 + 0,0015 \frac{172}{158}}} \right] = 0,709$$

Semejante al asumido por es correcto, lo que permite calcular finalmente:

$$T = 2A_o q$$

$$T = 2 \cdot 1465 \cdot 2,49 = 7281 = 72,81 \text{ kN} \cdot \text{m}$$

$$\psi = \frac{p_o}{2A_o} \left(\frac{\varepsilon_l}{\tan \alpha} + \varepsilon_t \frac{p_h}{p_o} \tan \alpha + \frac{2\varepsilon_d}{\sin 2\alpha} \right)$$

$$\psi = \frac{158}{2 \cdot 1465} \left(\frac{0,00112}{\tan(0,709)} + 0,0015 \frac{172}{158} \tan(0,709) + \frac{2 \cdot 0,00028}{\sin(2 \cdot 0,709)} \right) = 1,77 \cdot 10^{-4} \text{ rad/cm}$$

$$\varepsilon_{cs} = \varepsilon_d + \frac{t_d}{2} \psi \sin 2\alpha$$

$$\varepsilon_{cs} = 0,00028 + \frac{6,94}{2} 1,77 \cdot 10^{-4} \sin(2 \cdot 0,709) = 0,00089$$

c) Para $\varepsilon_t > \varepsilon_y$ $\varepsilon_l = \varepsilon_y$

A partir de que $\varepsilon_t > \varepsilon_y$ comienza a reducirse el valor de α pero q y T crecen ligeramente

En este punto

$$q = \sigma_l t_l \tan \alpha = \frac{\sigma_t t_t}{\tan \alpha}$$

Como:

$$\sigma_l = f_y \quad \sigma_t = f_y,$$

El valor de α puede calcularse por:

$$\tan^2 \alpha = \frac{\sigma_t t_t}{\sigma_l t_l} = \frac{t_t}{t_l}$$

$$\alpha = \tan^{-1} \left(\sqrt{\frac{0,071}{0,129}} \right) = 0,638$$

Entonces

$$q = \frac{\sigma_t t_t}{\tan \alpha}$$

$$q = \frac{30 \cdot 0,071}{\tan(0,638)} = 2,87 \text{ kN/m}$$

Valor máximo que actúa en la viga

$$\sigma_d = 2 \frac{q}{t_d \sin 2\alpha}$$

$$\sigma_d = 2 \frac{2,87}{6,94 \cdot \sin(2 \cdot 0,638)} = 0,864 = 8,64 \text{ MPa} \quad \varepsilon_d = \frac{\sigma_d}{E_c} = 0,00034$$

Y puede obtenerse ε_t por

$$\tan^2 \alpha = \frac{\varepsilon_d + \varepsilon_l}{\varepsilon_d + \varepsilon_t \frac{p_h}{p_o}}$$

$$\varepsilon_t = \left(\frac{\varepsilon_d + \varepsilon_l}{\tan^2 \alpha} - \varepsilon_d \right) \frac{p_o}{p_h}$$

$$\varepsilon_t = \left(\frac{0,00034 + 0,0015}{\tan^2(0,638)} - 0,00034 \right) \frac{158}{172} = 0,0028$$

Finalmente

$$T = 2A_o q$$

$$T = 2 \cdot 1465 \cdot 2,87 = 8410 = 84,10 \text{ kN} \cdot \text{m}$$

$$\psi = \frac{p_o}{2A_o} \left(\frac{\varepsilon_l}{\tan \alpha} + \varepsilon_t \frac{p_h}{p_o} \tan \alpha + \frac{2\varepsilon_d}{\sin 2\alpha} \right)$$

$$\psi = \frac{158}{2 \cdot 1465} \left(\frac{0,0015}{\tan(0,638)} + 0,0021 \frac{172}{158} \tan(0,638) + \frac{2 \cdot 0,00034}{\sin(2 \cdot 0,638)} \right) = 2,67 \cdot 10^{-4} \text{ rad/cm}$$

$$\varepsilon_{cs} = \varepsilon_d + \frac{t_d}{2} \psi \sin 2\alpha$$

$$\varepsilon_{cs} = 0,00034 + \frac{6,94}{2} 2,67 \cdot 10^{-4} \sin(2 \cdot 0,638) = 0,00122$$

d) Para $\varepsilon_{cs} = \varepsilon'_{c,max} = 0,002$ Rotura de la biela de hormigón

A partir del punto se mantiene $\alpha = 0,638$, $q = 2,87 \text{ kN} \cdot \text{m}$, entonces se mantiene constante la tensión σ_d y la deformación ε_d en la biela

Y se calcula ψ_r

$$\varepsilon_{cs} = \varepsilon_d + \frac{t_d}{2} \psi_r \sin 2\alpha$$

$$\psi_r = \frac{2(\varepsilon_{cs} - \varepsilon_d)}{t_d \sin 2\alpha}$$

$$\psi_r = \frac{2(0,002 - 0,00034)}{6,94 \cdot \sin(2 \cdot 0,638)} = 5,01 \cdot 10^{-4} \text{ rad/cm}$$

Finalmente para calcular ε_t y ε_l se realiza un proceso de tanteos

Fijando $\varepsilon_t = 0,00544$, se calcula ε_l de la ecuación de compatibilidad

$$\varepsilon_l = \tan \alpha \left[\frac{2\psi A_o}{p_o} - \varepsilon_t \frac{p_h}{p_o} \tan \alpha - \frac{2\varepsilon_d}{\sin 2\alpha} \right]$$

$$\varepsilon_l = \tan(0,638) \left[\frac{2 \cdot 5,01 \cdot 10^{-4} \cdot 1465}{158} - 0,00544 \frac{172}{158} \tan(0,638) - \frac{2 \cdot 0,00034}{\sin(2 \cdot 0,638)} \right] = 0,0031$$

Se comprueba finalmente a través del ángulo de la grieta:

$$\tan^2 \alpha = \frac{\varepsilon_d + \varepsilon_l}{\varepsilon_d + \varepsilon_t \frac{p_h}{p_o}}$$

$$\alpha = \tan^{-1} \left[\sqrt{\frac{0,00034 + 0,0031}{0,00034 + 0,00544 \frac{172}{158}}} \right] = 0,638$$

Valor semejante al real lo que permite terminar el proceso. Como se explicó anteriormente de no coincidir sería necesario repetir los cálculos hasta lograr una coincidencia.

En la tabla 6,1 se expone el cálculo de las curvas T vs ψ y q vs ψ , que se plotean en la figura 6,9

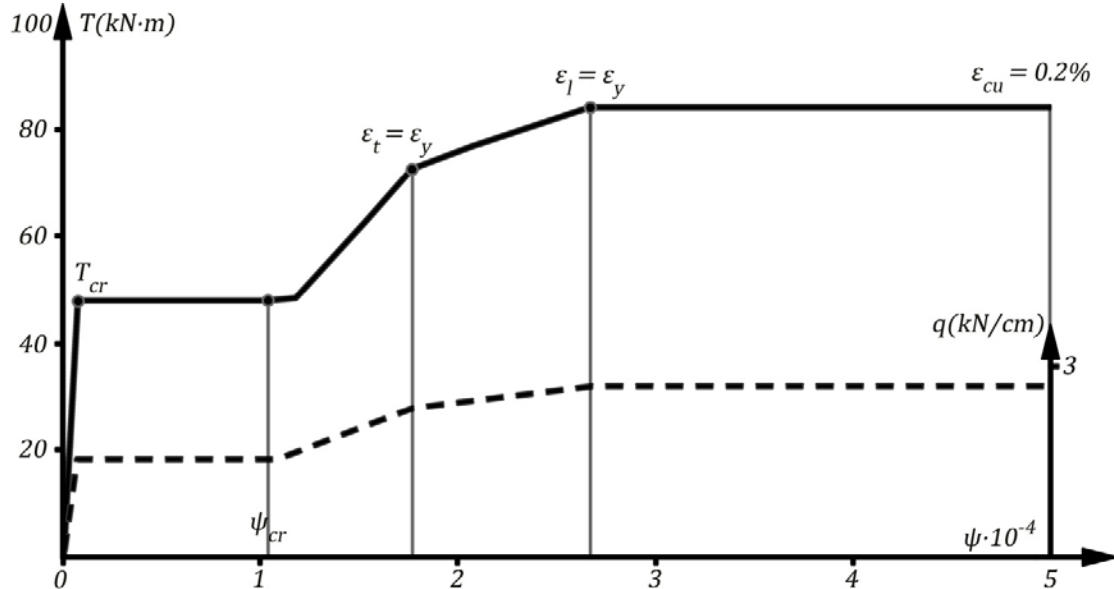


Figura 6,9: Curva de comportamiento de sección a torsión

TABLA 6,1: Puntos notables curva T vs ψ

Sección no fisurada:

$$T_{cr} = 48,12 \text{ kN} \cdot \text{m}$$

$$K = 527408,76 \text{ cm}^2$$

$$\psi_{cr} = 0,071 \cdot 10^{-4} \text{ rad/cm}$$

$$G = 12871,5 \text{ MPa}$$

Sección fisurada:

$$p_o = 158 \text{ cm} \quad A_o = 1465 \text{ cm}^2$$

$$t_d = 6,94 \text{ cm} \quad t_l = 0,129 \text{ cm} \quad t_t = 0,071 \text{ cm}$$

α (rad)	ϵ_{cs} (%)	ϵ_l (%)	ϵ_t (%)	ϵ_d (%)	q (kN/cm)	T (kN · cm)	$\psi \cdot 10^{-4}$
0,7086	0,05174	0,0654	0,0873	0,0164	1,4460	48,122	1,0309
0,7086	0,05928	0,0750	0,1000	0,0188	1,6568	48,543	1,1812
0,7086	0,07707	0,0975	0,1300	0,0244	2,1538	63,106	1,5355
0,7086	0,08892	0,1125	0,1500	0,0281	2,4851	72,814	1,7717
0,6813	0,10049	0,1257	0,1900	0,0300	2,6270	76,970	2,0741
0,638	0,12233	0,1500	0,2754	0,0336	2,8702	84,096	2,6716
0,638	0,2	0,3258	0,518	0,0336	2,8702	84,096	5,0091

6,2 DISEÑO DE SECCIONES DE HORMIGÓN ARMADO A TORSIÓN. ENFOQUE DEL ACI

6,2,1: EFECTO DE LA TORSIÓN EN ELEMENTOS DE HORMIGÓN ARMADO.

Los elementos sometidos a torsión forman parte de un entramado y reciben las solicitaciones transmitidas por otros elementos. En función de lo anterior, a los efectos de considerar el accionar del momento flector sobre vigas, debe dividirse los elementos en dos tipos.

- Cuando la viga forma parte de una estructura isostática.

- Cuando forma parte de una estructura hiperestática.

En el primer caso, ver figura 6,10a, la viga debe soportar totalmente el momento torsor transmitido por otros elementos, como garantía del equilibrio de la estructura. Como regla estos elementos están sometidos además a momento flector y cortante, por lo que la armadura total es la integración de lo calculado por cada sollicitación por separado.

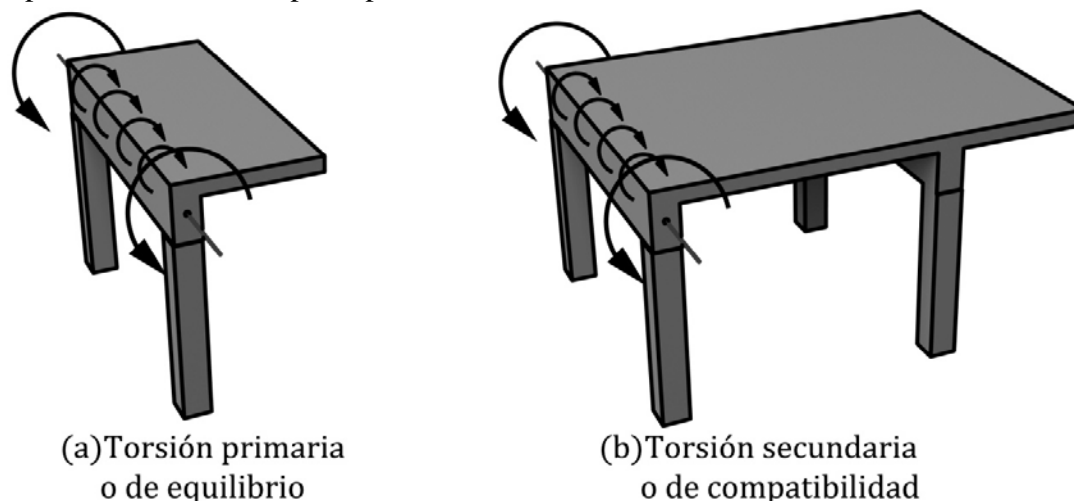


Figura 6,10: Efecto de la torsión en elementos de H. A.

En entramados de vigas hiperestáticas (ver figura 6,10b) que permiten que se produzcan redistribuciones de momentos, puede reducirse el momento torsor actuante en el elemento; hasta un valor de ϕT_{cr} , donde

ϕT_{cr} momento torsor de fisuración.

En caso de que el momento torsor de cálculo $T_u > \phi T_{cr}$ resulta obligado realizar una redistribución de este momento flector hacia los elementos transmisores, como se muestra en figura 6,11 y condicionan el proceso general de diseño a momento flector de estos.

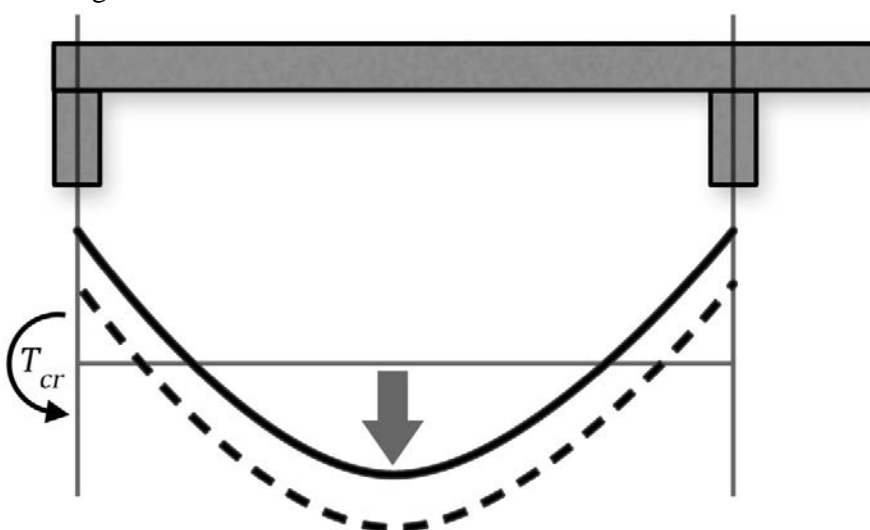


Figura 6,11: Reducción del M_t en estructuras con capacidad de redistribuir momento.

La sección crítica para el cálculo del Momento Torsor en la viga está situada a una distancia d de la cara del apoyo. La armadura obtenida para esta sección se colocará en la zona comprendida entre el apoyo y esta, y el T_u se calculará a $0,5h$ desde la cara del apoyo.

Si hay un momento torsor concentrado, provocado por ejemplo por una viga secundaria en esta zona, la sección crítica será la cara del apoyo.

6,2,2: TORSIÓN CRÍTICA. ELEMENTOS NO FISURADOS.

Como se ha definido en el epígrafe anterior, para una sección no fisurada el momento máximo de agrietamiento se calcula por

$$T_{cr} = 2qA_o$$

Donde:

$$q = f_r t = 300\sqrt{f_c'} t$$

Expresión que debe trabajarse en las siguientes unidades:

$$q \quad \text{en } kN/m$$

$$t \quad \text{en } m$$

$$f_c' \quad \text{en } MPa$$

El ACI define el espesor del tubo virtual, t , y el área encerrada por el cortante equivalente, A_o , para secciones no fisuradas, como:

$$t_c = \frac{3}{4} \frac{A_{cp}}{p_{cp}}$$

$$A_o = \frac{2}{3} A_{cp}$$

Siendo

A_{cp} área encerrada por el perímetro exterior de la sección transversal

p_{cp} perímetro exterior de la sección transversal

Finalmente

$$T_{cr} = 300\sqrt{f_c'} \frac{A_{cp}^2}{p_{cp}}$$

Y las unidades deben expresarse en:

$$T_{cr} \quad \text{en } kN.m$$

$$A_{cp} \quad \text{en } m^2$$

$$p_{cp} \quad \text{en } m$$

En la determinación de estos valores debe tomarse en cuenta

- Para secciones que forman parte de losas monolíticas, el ancho del ala se determinará en función de las recomendaciones que aparecen en la figura 6,12:
- En el caso de secciones huecas, que son consideradas como tal cuando

$$\frac{A_g}{A_{cp}} \leq 0,95$$

Siendo A_g área de la sección de hormigón, que sustituye a A_{cp} en el cálculo de T_{cr}

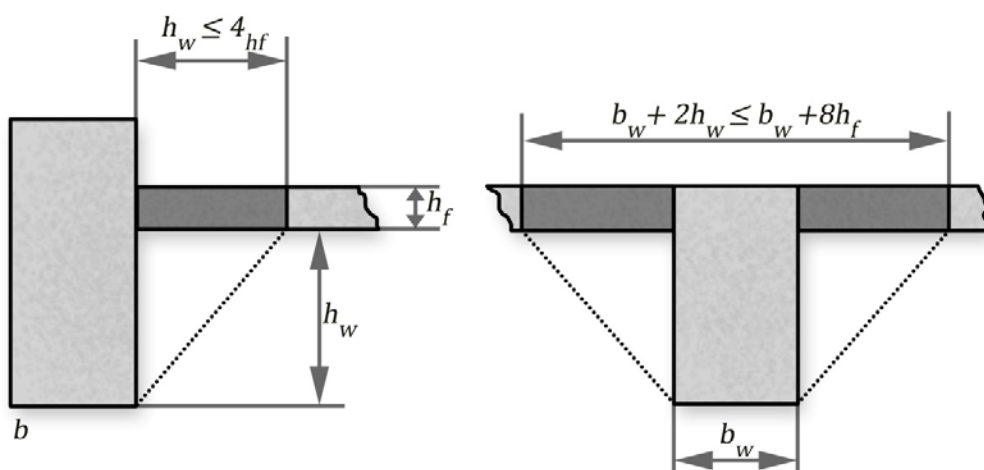


Figura 6,12: Sección que resiste momento torsor en losas monolíticas.

En secciones de HA sometidas a cargas axiales el momento torsor de fisuración se calcula por la expresión

$$T_{cr} = 300\sqrt{f_c'} \frac{A_{cp}^2}{p_{cp}} \sqrt{1 + \frac{N_u}{300A_g\sqrt{f_c'}}$$

Donde:

N_u fuerza axial mayorada, positiva si es a compresión, en kN
 A_g área bruta de la sección transversal, en m^2

El diseño de secciones a torsión puede despreciarse si

$$T_u < \phi \frac{T_{cr}}{4}$$

6,2,3 TORSIÓN EN SECCIONES FISURADAS

Cuando el momento torsor externo, T_u , sobrepasa el momento torsor fisurado, ϕT_{cr} , la sección requiere para su resistencia del aporte, no solo del hormigón, sino del empleo de armaduras, transversales y longitudinales, en un mecanismo resistente explicado en el epígrafe 6,1,3

Para el cálculo del aporte de las armaduras, el ACI considera que estas trabajan a su capacidad máxima, por tanto

$$\sigma_l = f_{yl} \quad \sigma_t = f_{yv}$$

Evaluando el aporte de cada componente:

- **Comprobación de las dimensiones de la sección**

Buscando evitar un gran agrietamiento de la sección y un fallo a compresión de las bielas de hormigón el reglamento del ACI establece las siguientes recomendaciones para el chequeo de las dimensiones de la sección:

Secciones macizas

$$\sqrt{\left(\frac{V_u}{b_w d}\right)^2 + \left(\frac{T_u p_h}{1,7 A_{oh}}\right)^2} \leq \phi \left[\frac{V_c}{b_w d} + 0,67 \sqrt{f_c'} \right]$$

Donde:

A_{oh} área encerrada por el eje de la armadura transversal cerrada más externa, como se muestra en la siguiente figura 6,13

p_h perímetro del eje de la armadura transversal cerradas dispuesta para resistir torsión, ver figura 6,13

V_c fuerza cortante que aporta el hormigón

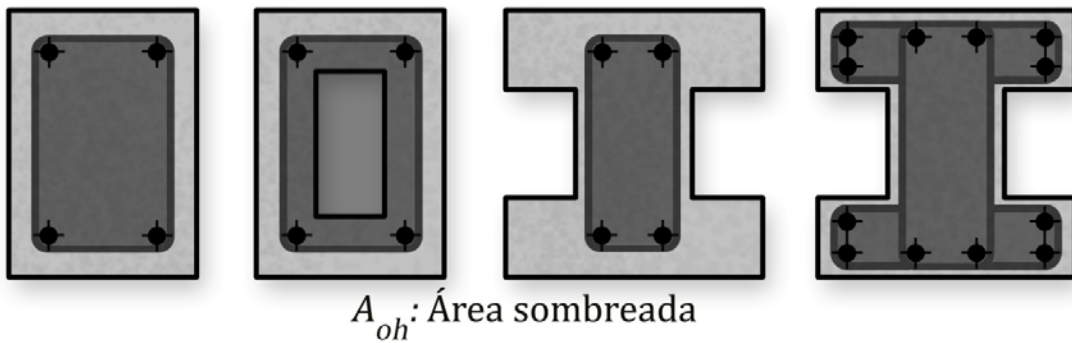


Figura 6,13: Definición de A_{oh}

Expresión en la que deberán respetarse la siguiente convención de unidades:

T_u	en $kN.m$
V_u, V_c	en kN
A_{oh}	en m^2
p_h, d, b_w	en m
f_c'	en MPa

Secciones huecas

$$\frac{V_u}{b_w d} + \frac{T_u p_h}{1,7 A_{oh}} \leq \phi \left[\frac{V_c}{b_w d} + 0,67 \sqrt{f_c'} \right]$$

Debido a las características del accionar de la torsión en secciones tubulares como se muestra en la figura 6, 14, si el espesor de la pared, $t \leq \frac{A_{oh}}{p_h}$, el segundo término de la expresión deberá sustituirse por $\frac{T_u}{1,7 A_{oh} \cdot t}$

- **Refuerzo transversal**

Se ha demostrado en el epígrafe 6,1,3 que:

$$\sigma_t = \frac{q \cdot \tan \alpha}{t_t} \qquad t_t = \frac{A_t}{s}$$

$$\sigma_t \frac{A_t}{s} = q \cdot \tan \alpha$$

Y como:

$$T_u \leq \phi T_n = \phi (2q A_o)$$

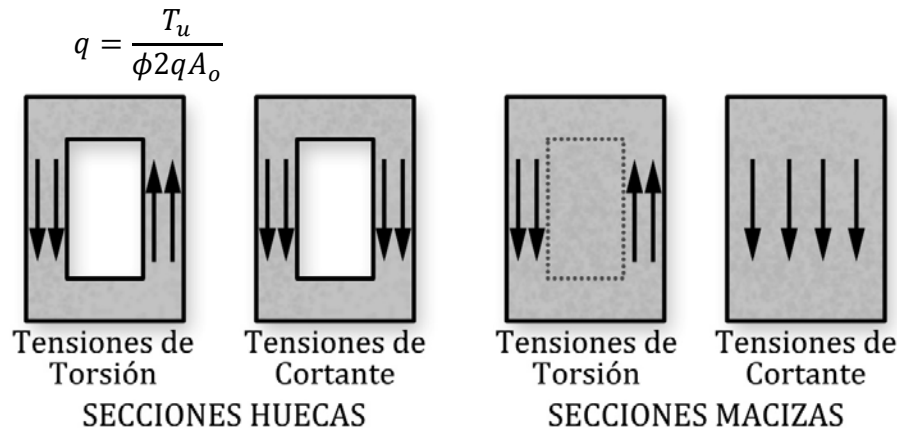


Figura 6,14: Combinación de cortante y torsión en secciones huecas y macizas

Para el caso que nos ocupa $\sigma_t = f_{yv}$

$$f_{yv} \frac{A_t}{s} = \frac{T_u}{\phi 2A_o} \tan \alpha$$

Pudiéndose plantear, para la comprobación:

$$T_u = \phi \frac{A_t}{s} \frac{2A_o f_{yv}}{\tan \alpha}$$

Y para el diseño:

$$\frac{A_t}{s} = \frac{T_u}{\phi 2A_o f_{yv}} \tan \alpha$$

Donde el término A_o se calcula por medio de:

$$A_o = 0,85 A_{oh}$$

Como puede apreciarse este valor de A_o difiere del definido para la sección no fisurada; lo que se justifica por el efecto que el agrietamiento provoca en la sección y que recomienda no considerar el aporte del recubrimiento y aplicarle un 85% de reducción al cálculo de A_o .

En cuanto al ángulo de la grieta, α , se recomienda para secciones de hormigón armado, considerarlo como de 45° , a sabiendas de que es un valor conservador.

Entonces las ecuaciones de cálculo serían:

$$T_u = \phi \frac{A_t}{s} 2A_o f_{yv}$$

$$\frac{A_t}{s} = \frac{T_u}{\phi 2A_o f_{yv}}$$

- **Refuerzo longitudinal**

Tomando en cuenta las ecuaciones obtenidas en el epígrafe 6,1,3:

$$\sigma_l = \frac{q}{t_l \tan \alpha} \quad t_l = \frac{A_l}{p_h}$$

$$\sigma_l \frac{A_l}{p_h} = \frac{q}{\tan \alpha}$$

Como $\sigma_l = f_{yl}$

Finalmente puede plantearse que:

$$f_{yl} \frac{A_l}{p_h} = \frac{T_u}{\phi 2 A_o \tan \alpha}$$

Y entonces para la comprobación:

$$T_u = \phi \frac{A_l}{p_h} 2 A_o f_{yl} \tan \alpha$$

Y para el diseño:

$$\frac{A_l}{p_h} = \frac{T_u f_{yl}}{\phi 2 A_o \tan \alpha}$$

Esta expresión puede ponerse en función del área de refuerzo transversal calculado, $\frac{A_t}{s}$, quedando:

$$\frac{A_l}{p_h} = \frac{A_t f_{yv}}{s f_{yl} \tan^2 \alpha} \frac{1}{\tan^2 \alpha}$$

Si $f_{yl} = f_{yv}$ y considerando $\alpha = 45^\circ$

$$A_l = \frac{A_t}{s} p_h$$

Este refuerzo longitudinal, distribuido perimetralmente en la sección, se debe adicionar al calculado para la flexión compuesta.

6,2,5 RECOMENDACIONES DE DISEÑO

- **Armadura mínima**

Siempre que $T_u < \phi \frac{T_{cr}}{4}$ se colocará la cantidad de refuerzo mínimo

En los estribos

$$(A_v + 2A_t) = \frac{1}{16} \sqrt{f_c'} \frac{b_w s}{f_{yv}} \geq 0,33 \frac{b_w s}{f_{yv}}$$

Para el refuerzo longitudinal

$$A_{l,min} = \frac{5\sqrt{f_c'} A_{cp}}{12 f_{yl}} - \frac{A_t}{s} p_h \frac{f_{yv}}{f_{yl}}$$

debiendo considerarse que:

$$\frac{A_t}{s} \geq \frac{1}{16} \frac{b_w}{f_{yv}}$$

- **Separación de la armadura de torsión**

La separación s de la **armadura transversal** de torsión, no debe exceder el menor de los valores indicados a continuación:

$$\frac{p_h}{8}$$

30 cm

La **armadura longitudinal** de torsión debe estar distribuida a lo largo del perímetro del estribo cerrado, con una separación máxima de 30 cm. Las barras o alambres longitudinales deben estar ubicados dentro de los estribos con, al menos, una barra o alambre longitudinal en cada esquina de los estribos.

Las barras o alambres longitudinales deben tener un diámetro d_b mayor que:

$$\frac{s}{4}$$

$$10 \text{ mm}$$

siendo s la separación de los estribos.

La **armadura de torsión** se debe prolongar, como mínimo, una distancia $(b + d)$ más allá del punto en el que ya no es teóricamente necesaria.

• **Detalles de la armadura de torsión**

La **armadura de torsión** puede estar constituida por barras o alambres longitudinales y por una o más de las combinaciones de armaduras mostradas en la figura 6,15:

- estribos cerrados perpendiculares al eje del elemento,
- malla de acero soldada dispuesta en forma de jaula cerrada, con sus alambres transversales ubicados en forma perpendicular al eje del elemento,
- armadura en forma de zunchos en las vigas no pretensadas.

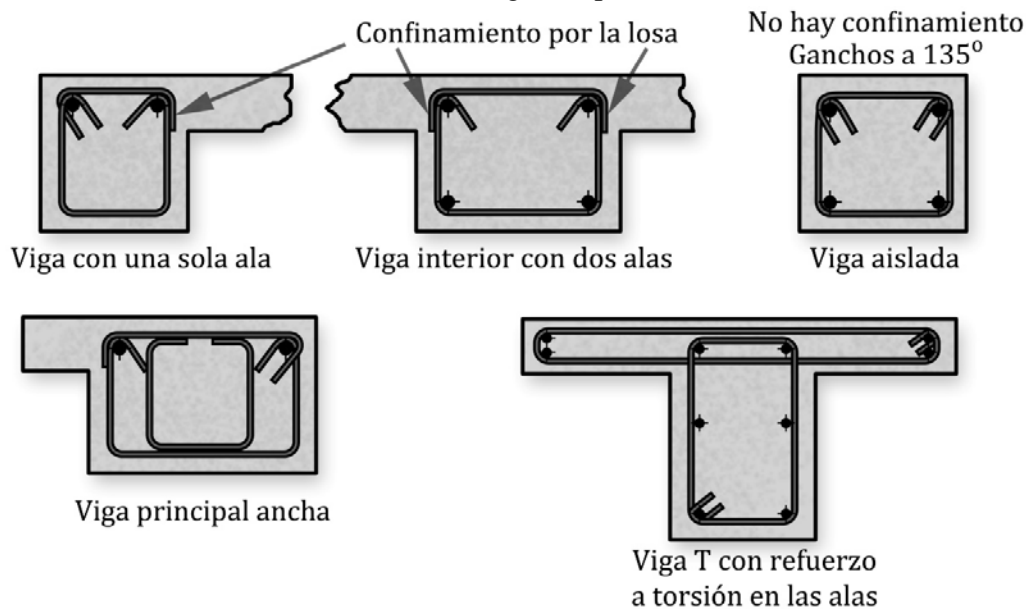


Figura 6,15: Detalles de colocación de las armaduras a torsión

La **armadura transversal de torsión** debe estar anclada por alguna de las siguientes opciones:

- con un gancho a 135° alrededor de una barra o alambre longitudinal,
- con **anclajes** que cumplan las especificaciones correspondientes, ver Capítulo IX, en las zonas donde el hormigón que rodea al anclaje está protegido contra el descascaramiento mediante un ala, una losa o un elemento similar, según se muestra en la figura 6,16

La **armadura longitudinal de torsión** debe ser anclada en ambos extremos del elemento. En las secciones huecas solicitadas a torsión, la distancia desde el eje de la armadura transversal de torsión, hasta la cara interior de la pared de la sección hueca, debe ser $\geq 0,5 \frac{A_{oh}}{p_h}$

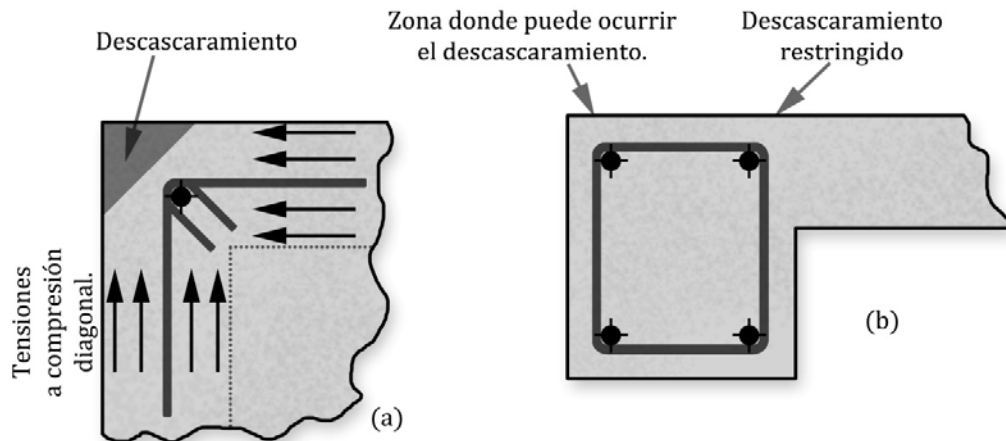


Figura 6,16: Descascaramiento de las esquinas en vigas a torsión

Ejercicio 6.2

Diseñe a cortante y torsión la viga de borde que soporta una losa en voladizo, con las características que se muestra en la figura 6,17. Sobre el conjunto actúa sobrecarga de 2 kN/m^2 y los materiales tiene resistencias de $f'_c = 30 \text{ MPa}$ y $f_y = 420 \text{ MPa}$

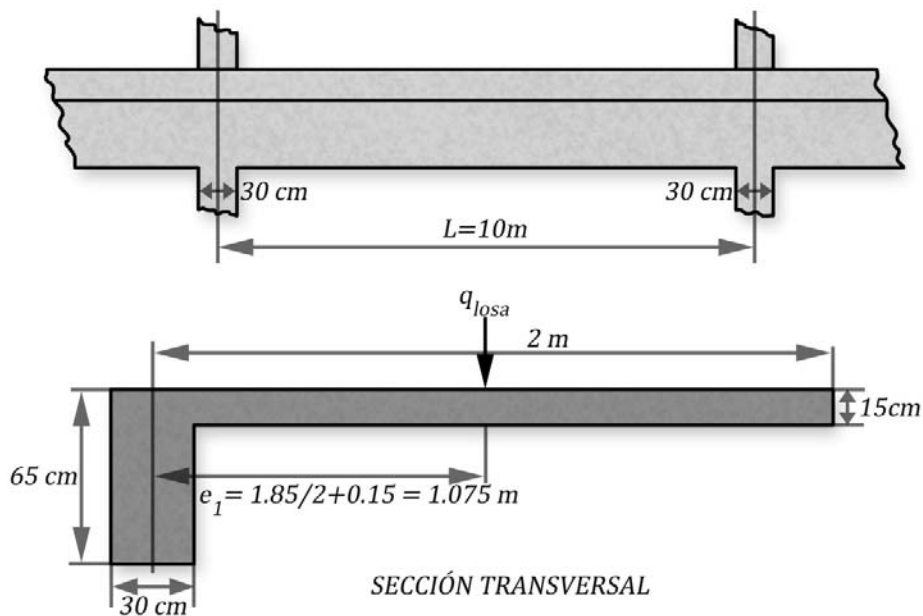


Figura 6,17: Secciones de la viga y la losa. Ejercicio.

Cálculos y discusión

1. Cálculo de las cargas y solicitaciones

En la losa

$$q_{CP} = 24 \cdot 0.15 \cdot 1.85 = 6.66 \text{ kN/m}$$

$$q_{CU} = 2 \cdot 1.85 = 3.7 \text{ kN/m}$$

$$q_{losa} = 1,2q_{CU} + 1,6q_{CV}$$

$$q_{losa} = 1,2 \cdot 6,66 + 1,6 \cdot 3,7 = 13,17 \text{ kN/m}$$

En la viga

$$q_{CP} = 24 \cdot 0,3 \cdot 1,65 = 4,68 \text{ kN/m}$$

$$q_{CV} = 2 \cdot 0,3 = 0,6 \text{ kN/m}$$

$$q_{viga} = 1,2 \cdot 4,68 + 1,6 \cdot 0,6 = 6,456 \text{ kN/m}$$

Finalmente:

$$q_{total} = q_{losa} + q_{viga} = 19,63 \text{ kN/m}$$

El gráfico cortante de la viga se indica en la figura 6,18, donde:

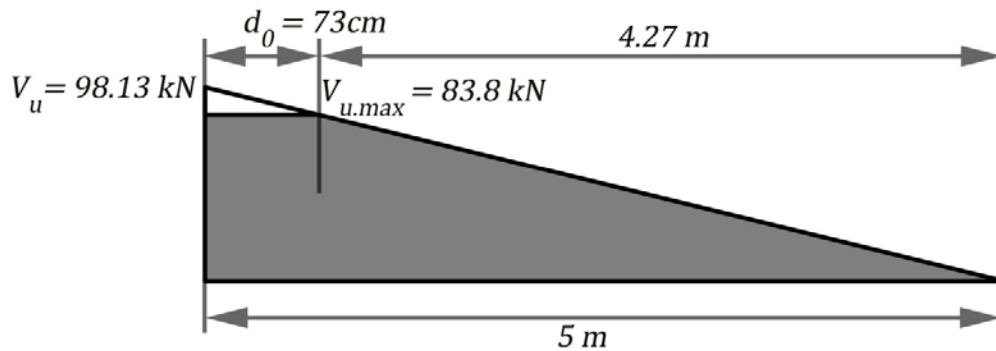


Figura 6,18: Cortante en la viga

$$V_u = q_{total} \frac{L}{2}$$

$$V_u = 19,63 \frac{10}{2} = 98,13 \text{ kN}$$

La sección crítica, a d de la cara del apoyo, es $d_o = d + \frac{30}{2} = 73 \text{ cm}$. Por lo que el corte de cálculo $V_{u,max}$

$$V_{u,max} = V_u \frac{4,27}{5}$$

$$V_{u,max} = 98,13 \frac{4,27}{5} = 83,8 \text{ kN}$$

Para el momento torsor actuante sobre la viga

$$m_t = q_{losa} e_1$$

$$m_t = 13,17 \cdot 1,075 = 14,16 \text{ kN} \cdot \text{m/m}$$

Siendo el valor máximo sobre el apoyo de la viga:

$$T_u = m_t \frac{L}{2}$$

$$T_u = 14,16 \frac{10}{2} = 70,79 \text{ kN}$$

Y el gráfico de momento torsor sobre la viga se muestra en la figura 6,19:

En la sección crítica, a d del apoyo:

$$T_{u,max} = T_u \frac{4,27}{5}$$

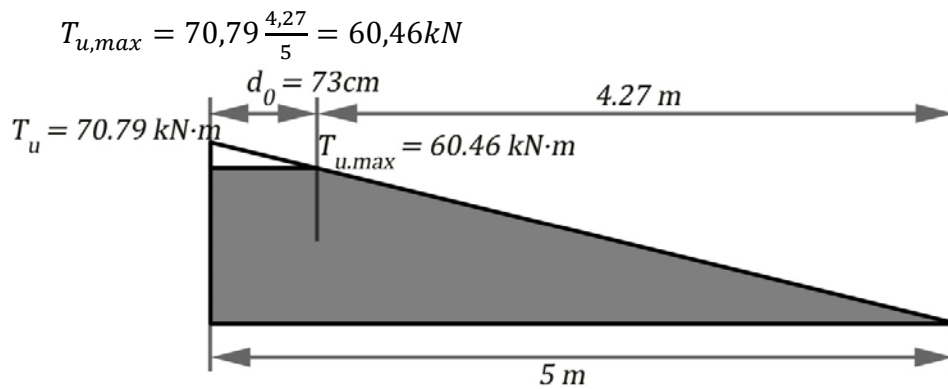


Figura 6,19: Torsión en la viga

2. Comprobación de la necesidad del diseño por torsión

Si $T_{u,max} \leq \phi \frac{T_{cr}}{4}$ no se requiere refuerzo por torsión

Como

$$T_{cr} = 300 \sqrt{f_c} \frac{A_{cp}^2}{p_{cp}}$$

Y la viga y la losa son homogéneas la sección a considerar como resistente a torsión, como se indica en la figura 6,20, será la viga y parte de la losa.

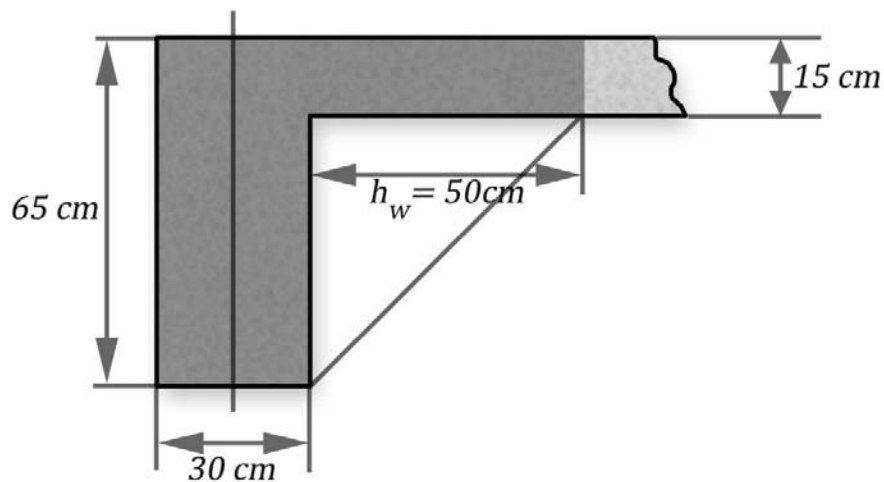


Figura 6,20: Sección resistente a la Torsión.

Calculando la profundidad de losa a considerar, h_w , se toma el menor de los siguientes valores:

$$h_w = 65 - 15 = 50 \text{ cm} \quad \text{ó} \quad 4h_f = 4 \cdot 15 = 60 \text{ cm}$$

Tomado al menor que es h_w

Entonces la dimensiones de la sección compuesta son:

$$A_{cp} = 65 \cdot 30 + 15 \cdot 50 = 2700 \text{ cm}^2$$

$$p_{cp} = 2 \cdot 65 + 2 \cdot (30 + 50) = 290 \text{ cm}$$

Y finalmente:

$$T_{cr} = 300\sqrt{30} \frac{0,27^2}{2,9} = 45,44 \text{ kN} \cdot \text{m}$$

Como

$$T_{u,max} > \phi \frac{T_{cr}}{4} = 11,36 \text{ kN} \cdot \text{m}$$

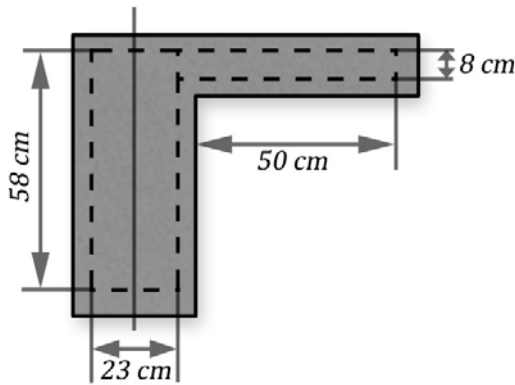
Es necesario colocar refuerzo por torsión

3. Comprobación de la resistencia de las bielas a compresión

La comprobación de que la sección de hormigón no es insuficiente para resistir, en conjunto con el refuerzo, la acción combinada de la torsión y el cortante se realiza por medio de la siguiente verificación:

$$\sqrt{\left(\frac{V_{u,max}}{b_w d}\right)^2 + \left(\frac{T_{u,max} p_h}{1,7 A_{oh}^2}\right)^2} \leq \phi \left[\frac{V_c}{b_w d} + 670 \sqrt{f'_c} \right]$$

Para obtener A_{oh} y p_h , área y perímetro de la línea media de los estribos se emplea la figura 6,21



Considerando:

Recubrimiento = 3 cm

Para agresividad baja y

hormigonado "in situ"

Considerando estribos

Nº 10 $d_b \approx 10 \text{ mm}$

Figura 6,21: Determinación de A_{oh} y P_h .

$$A_{oh} = 23 \cdot 58 + 50 \cdot 8 = 1734 \text{ cm}^2$$

$$p_h = 2(58 + 23) + 2 \cdot 50 = 262 \text{ cm}$$

Calculando el 1er término:

$$\sqrt{\left(\frac{83,8}{0,3 \cdot 0,58}\right)^2 + \left(\frac{60,46 \cdot 2,62}{1,7 \cdot 0,1734^2}\right)^2} = 3136,18 \text{ kN/m}^2$$

Como

$$V_c = 170 \sqrt{f'_c} b_w d$$

El segundo término de la ecuación puede plantearse como

$$\phi [170 \sqrt{f'_c} + 670 \sqrt{f'_c}] = \phi 840 \sqrt{f'_c}$$

$$0,75 \cdot 840 \sqrt{30} = 3450,65 \text{ kN/m}^2$$

Que como es mayor que la expresión anterior permite concluir que la sección está bien dimensionada para resistir los efectos de la combinación de torsión y cortante

4. Cálculo de los estribos

Por torsión

Como

$$\frac{A_t}{s} = \frac{T_{u,max}}{\phi 2 A_o f_{yv}}$$

Y siendo

$$A_o = 0,85 A_{oh}$$

$$A_o = 0,85 \cdot 1734 = 1473,9 \text{ cm}^2$$

Finalmente

$$\frac{A_t}{s} = \frac{6046}{0,75 \cdot 2 \cdot 1473,9 \cdot 42} = 0,0651 \frac{\text{cm}^2}{\text{cm}}$$

Para el cortante

Utilizando el procedimiento simplificado

$$V_c = 170 \sqrt{f_c'} b_w d$$

$$V_c = 170 \sqrt{30} \cdot 0,3 \cdot 0,58 = 162,02 \text{ kN}$$

Como $\phi V_c = 121,51 \text{ kN} > V_u$ no se requiere colocar estribos por cálculo ante el cortante.

Y finalmente el refuerzo a colocar en la zona de máximo cortante y momento torsor será:

$$\frac{A_t}{s} + \frac{A_v}{2s} = 0,0651 + 0 = 0,0651 \frac{\text{cm}^2}{\text{cm}}$$

Y como se colocarán estribos *Nº 10*

$$s = \frac{0,71}{0,0651} = 10,91 \text{ cm}$$

Comprobándose las recomendaciones para el refuerzo transversal mínimo, el **espaciamiento máximo** para la torsión será

$$s_{max} = \frac{p_h}{8} = 32,75 > 30 \text{ cm}$$

Valor menor que el espaciamento máximo a cortante, igual a $\frac{d}{2} = 29 \text{ cm}$, que será entonces el predominante.

Con este valor se comprueba el área mínima de refuerzo transversal por

$$(A_v + 2A_t) = \frac{1}{16} \sqrt{f_c'} \frac{b_w s}{f_{yv}} \geq 0,33 \frac{b_w s}{f_{yv}}$$

El 1er término sera:

$$\frac{1}{16} \sqrt{30} \frac{30 \cdot 29}{420} = 0,709 \text{ cm}^2$$

El 2do:

$$0,33 \frac{30 \cdot 29}{420} = 0,684 \text{ cm}^2$$

Siendo el área colocada de estribos *Nº 10* con $A_v = 1,42 \text{ cm}^2$ mayor que ambas restricciones, por lo que el criterio de espaciamento máximo predomina respecto al de área mínima, resultando la solución válida.

La **distribución de los estribos**, entre la zona de espaciamento mínimo, *10 cm*, y máximo de *29 cm*, se basa en relacionar las distancias a reforzar con los espaciamentos. Para ello como el Cortante y el

Torsor varían linealmente y se anulan en la sección central de la viga, la sección en que debe comenzar a utilizarse la separación máxima entre los cercos se puede determinar por proporcionalidad.

Un primer paso es determinar la distancia x_1 a que se comienzan a colocar estribos al espaciamiento máximo, por lo que siguiendo esta proporción, se calcula x_1 que está medida desde el centro de luz.

Con el apoyo de la figura 6,22 puede obtenerse la relación:

$$\frac{T_{u,max}}{\frac{L}{2} - d} = \frac{T_{ux}}{x_1}$$

Y como:

$$T_{u,max} = \phi 2 A_o f_{yv} \frac{A_t}{s}$$

Entonces para el espaciamiento máximo el valor de momento torsor actuante es:

$$T_{ux} = \phi 2 A_o f_{yv} \frac{A_t}{s_{max}}$$

Por lo que podrá plantearse que:

$$\frac{T_{u,max}}{T_{ux}} = \frac{s}{s_{max}}$$

Y finalmente calcular la distancia x_1 como:

$$x_1 = \frac{s}{s_{max}} \left(\frac{L}{2} - d_o \right)$$

$$x_1 = \frac{10}{29} \left(\frac{L}{2} - d_o \right) = \frac{10}{29} (5 - 0,73) = 1,47m$$

Por lo que los estribos se distribuirán en un tramo de 2,8 m a partir de d del apoyo, a un espaciamiento menor del máximo, como se indica en la figura 6,22

Una solución conservadora es colocar en este primer tramo el espaciamiento crítico de 10cm, sin embargo podría buscarse una respuesta más racional colocándose estribos con espaciamientos diferentes, por ejemplo la siguiente distribución:

- 15 estribos, espaciados a 10 cm en una distancia de 1,55 m de los apoyos. A partir de este punto el espaciamiento será

$$s_2 = 10 + \frac{1,55 - 0,58}{2,9} 19 = 16,35cm$$

- 5 estribos, espaciados a 16 cm en una distancia de 0,80 m a continuación de la anterior. A partir de este punto el espaciamiento será.

$$s_3 = 10 + \frac{2,35 - 0,58}{2,9} 19 = 21,6cm$$

- 6 estribos, espaciados a 20 cm a una distancia de 1,20 m seguidamente a los anteriores. A partir de este punto se colocará el espaciamiento máximo de 29 cm.

La distribución definitiva se muestra en la figura 6,22

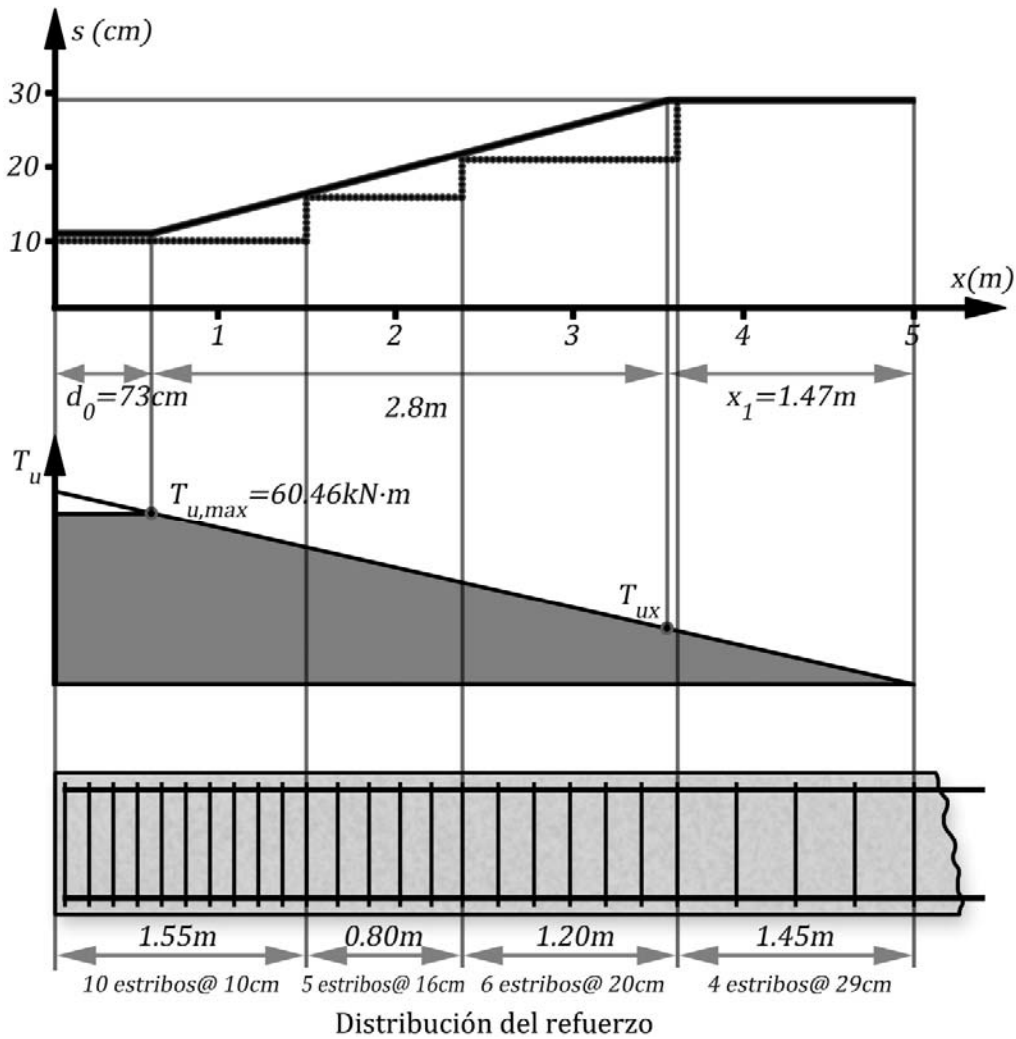


Figura 6,22: Distribución del refuerzo transversal.

5. Cálculo del acero longitudinal

$$\frac{A_l}{p_h} = \frac{A_t f_{yv}}{s f_{yl} \tan^2 \alpha} \cdot 1$$

Como $f_{yl} = f_{yv}$ y puede suponerse $\alpha = 45^\circ$ entonces

$$A_l = \frac{A_t}{s} p_h$$

$$A_l = 0,0651 \cdot 262 = 17,06 \text{ cm}^2$$

Chequeando el valor de **refuerzo mínimo**

$$A_{l,min} = \frac{5\sqrt{f'_c}}{12} \frac{A_{cp}}{f_{yl}} - \frac{A_t}{s} p_h \frac{f_{yv}}{f_{yl}}$$

$$A_{l,min} = \frac{5\sqrt{30}}{12} \frac{2700}{420} - 0,0651 \cdot 262 < 0$$

Además debe comprobarse que el área mínima solo a torsión cumpla la siguiente condición:

$$\frac{A_t}{s} \geq \frac{1}{16} \frac{b_w}{f_{yv}} = \frac{1}{16} \frac{30}{420} = 0,0229$$

Y como se cumplen todas las restricciones impuestas se da por concluido el diseño y se colocarán las 10 barras N° 16, $19,90\text{cm}^2$, distribuidas en el perímetro de la sección, como se muestra en las figuras 6,23; que deberán sumarse a las calculadas para resistir el momento flector.

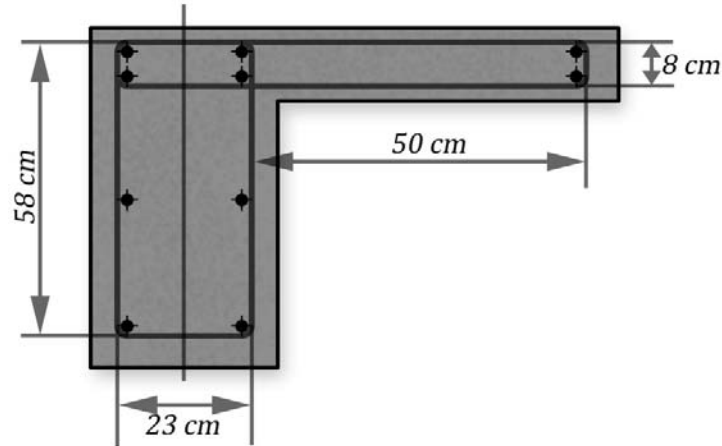


Figura 6,23: Distribución del refuerzo longitudinal

Ejercicio 6.3

Se presenta la Planta del Nivel Típico del entrepiso correspondiente a un edificio social de 5 Niveles. La figura 6,24 ofrece los detalles de la Planta.

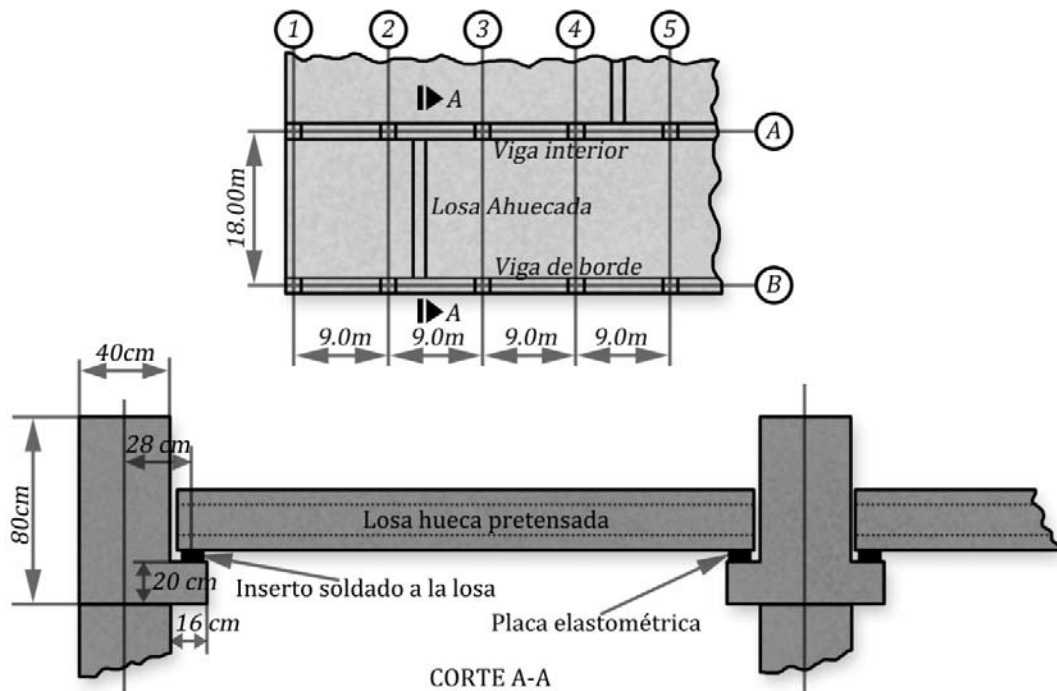


Figura 6,24: Planta ilustrada del sistema de entrepiso. Ejercicio 6.3

El entrepiso queda resuelto estructuralmente de la siguiente manera: se trata de un sistema de columnas hormigonadas in situ de $40\text{cm} \times 40\text{cm}$, ubicadas en los ejes longitudinales de la edificación. La distancia entre ejes de las vigas es de 18 m y entre columnas de 9.00m . A las columnas descargan vigas de sección rectangular con salientes o entalladuras para permitir luego el apoyo de losas ahuecadas pretensadas que definen el entrepiso. A lo largo de los ejes extremos las vigas, en este caso de borde, se conectan a las columnas para transmitir la torsión, pero entre ellas y sobre las columnas se interrumpe la continuidad.

Diseñe la armadura longitudinal y transversal requerida para las vigas de borde si la carga permanente, incluyendo peso de la losa, del relleno y de piso, es de 3 kN/m^2 , mientras que la de uso es de 1.5 kN/m^2 . Considere un hormigón de 25MPa y acero $G-40$ y $G-60$ para las armaduras transversal y longitudinal, respectivamente.

Cálculos y discusión

1. Cálculo de las cargas y las solicitaciones.

Se va a considerar que sobre la losa las cargas actúan uniformemente repartidas.

Al evaluar la **carga que tributa la losa a la viga de borde** debe tomarse en cuenta que la placa elastomérica que posee la losa garantiza corrimientos horizontales y giros en uno de sus apoyos y puede ser considerada como un elemento isostático trabajando en la luz de 9.00m . Por lo que con el apoyo de la figura 6,25:

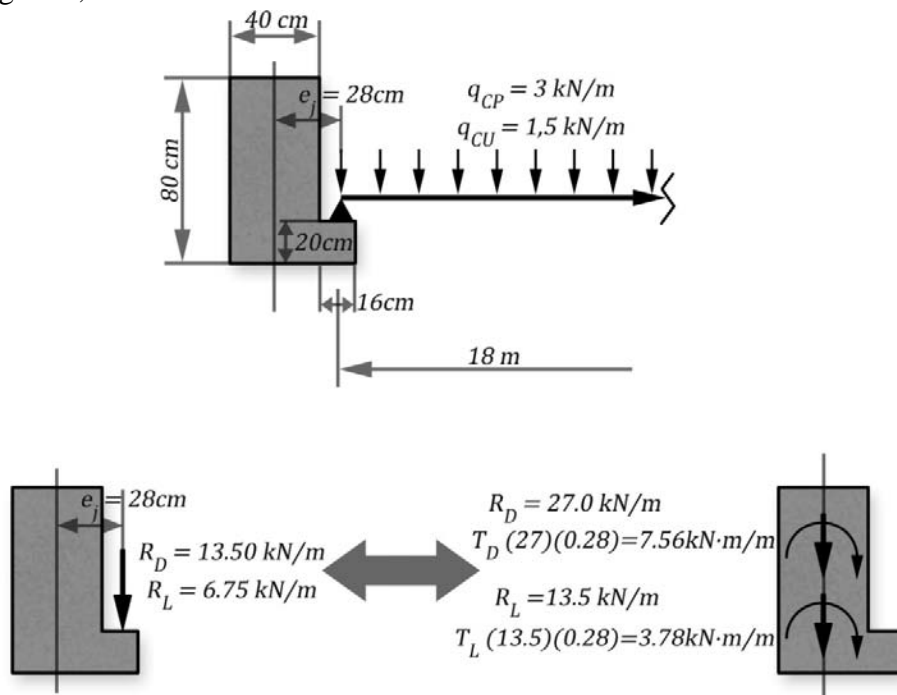


Figura 6,25: Carga que tributa la losa sobre la viga de borde

En la losa

$$q_{CP} = 3\text{ kN/m}^2$$

$$R_D = \frac{1}{2}q_{CP}L = \frac{1}{2} \cdot 3 \cdot 18 = 27\text{ kN/m}$$

$$q_{CU} = 1,5 \text{ kN/m}^2$$

$$R_L = \frac{1}{2} q_{CU} L = \frac{1}{2} 1,5 \cdot 18 = 13,5 \text{ kN/m}$$

En la viga se calcula el peso propio

$$q_{PP} = 24(0,4 \cdot 0,8 + 0,16 \cdot 0,2) = 8,4 \text{ kN/m}$$

Finalmente:

$$q_u = 1,2(q_{CP} + q_{PP}) + 1,6q_{CU} = 1,2(27 + 8,4) + 1,6 \cdot 13,5 = 64,08 \text{ kN/m}$$

$$R = 1,2 \cdot R_d + 1,6R_L = 1,2 \cdot 27 + 1,6 \cdot 13,5 = 54 \text{ kN/m}$$

Para el momento torsor actuante sobre la viga

$$m_t = R \cdot e_1$$

$$m_t = 54 \cdot 0,28 = 15,12 \text{ kN} \cdot \text{m/m}$$

Como la viga de borde no posee continuidad sobre las columnas, se trata de un elemento isostático que se debe diseñar para la totalidad del momento torsor mayorado, ya que este se requiere para el equilibrio, es decir, no puede aprovecharse la redistribución.

Momento Flector (para el diseño de la armadura longitudinal a flexión)

$$M_u = \frac{1}{8} q_u L^2 = \frac{1}{8} 64,08 \cdot 9^2 = 650 \text{ kN} \cdot \text{m}$$

Cortante (para el diseño de la armadura transversal a cortante y a torsión)

Como no existe fuerza ni momento torsor concentrado entre la cara del apoyo de la viga y la sección situada a una distancia d de ella, esta última se considera la sección crítica a cortante. Si se supone un recubrimiento teórico de la armadura longitudinal igual a 7 cm , entonces $d = 73 \text{ cm}$. Como la columna tiene 40 cm de peralte la sección crítica se encuentra a $d_o = d + 20 \text{ cm}$ del eje como se aprecia en la figura 6,26, sección en que se debe evaluar el Cortante y la Torsión.

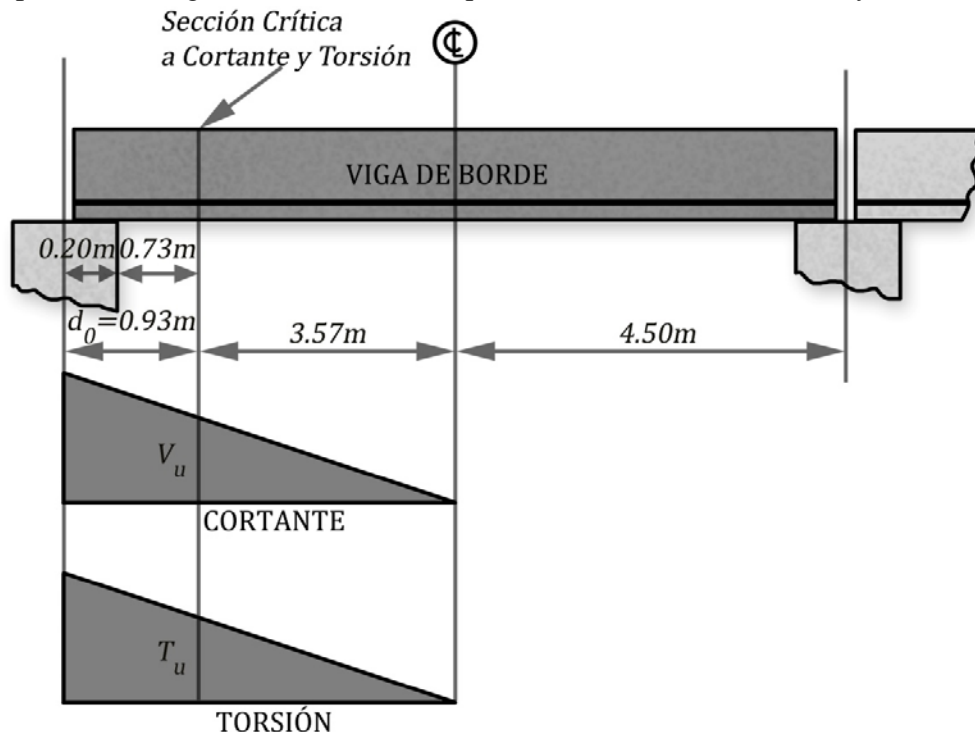


Figura 6,26: Sección crítica a cortante y torsión

Entonces el cortante en el apoyo será:

$$V_u = \frac{1}{2}q_u L = \frac{1}{2}64,08 \cdot 9 = 288 \text{ kN}$$

Y en la sección crítica:

$$V_{u,max} = V_u \frac{3,57}{4,5} = 288 \frac{3,57}{4,5} = 228,48 \text{ kN}$$

Momento Torsor (para el diseño de la armadura a torsión)

Como igual no existe un momento torsor concentrado entre la cara del apoyo de la viga y la sección situada a una distancia d de ella, esta última se considera la sección crítica a torsión:

Entonces el momento torsor en el apoyo será:

$$T_u = \frac{1}{2}m_t L = \frac{1}{2}15,12 \cdot 9 = 68,04 \text{ kN} \cdot \text{m}$$

Y en la sección crítica:

$$T_{u,max} = T_u \frac{3,57}{4,5} = 68,04 \frac{3,57}{4,5} = 53,98 \text{ kN} \cdot \text{m}$$

Resumen, que también se muestra en la figura 6,27:

$M_u = 650 \text{ kN} \cdot \text{m}$ (en el centro de la luz)

$V_{u,max} = 228,5 \text{ kN}$ (en la sección situada a una distancia “ d ” de la cara de la columna)

$T_{u,max} = 54 \text{ kN} \cdot \text{m}$ (en la sección situada a una distancia “ d ” de la cara de la columna)

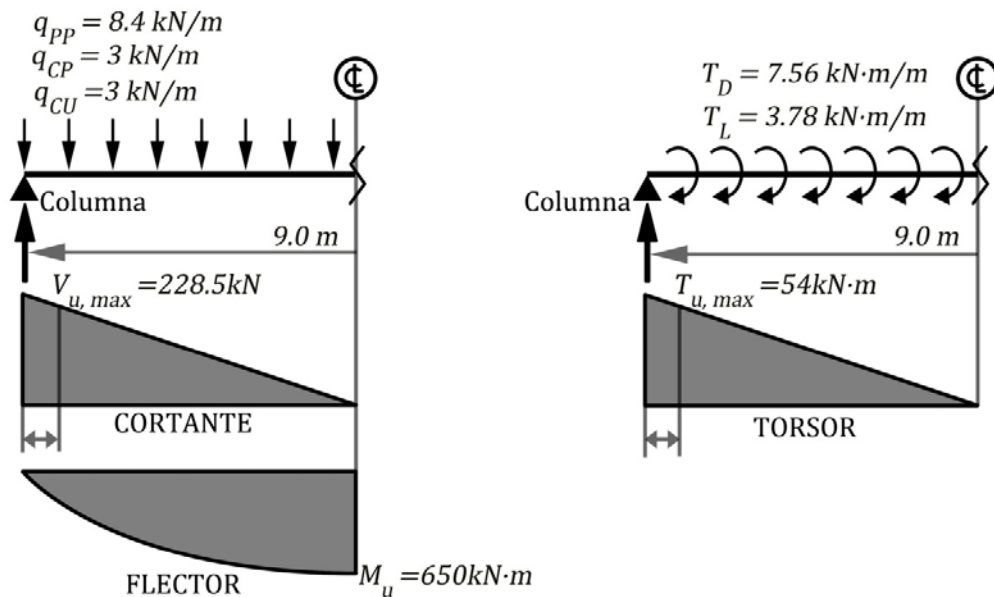


Figura 6,27: Solicitaciones sobre la viga de borde

2. Comprobación de la necesidad del diseño por Torsión.

Si $T_u \leq \phi \frac{T_{cr}}{4}$ no se requiere refuerzo por torsión

Como

$$T_{cr} = 300 \sqrt{f_c'} \frac{A_{cp}^2}{p_{cp}}$$

Donde para los siguientes cálculos se incluye la entalladura de la viga de borde

$$A_{cp} = 0,4 \cdot 0,8 + 0,16 \cdot 0,2 = 0,352 \text{ m}^2$$

$$p_{cp} = 2 \cdot 0,16 + 2 \cdot (0,4 + 0,8) = 2,72m$$

Y finalmente:

$$T_{cr} = 300\sqrt{35} \frac{0,352^2}{2,72} = 88,9kN \cdot m$$

Como

$$T_u > \phi \frac{T_{cr}}{4} = 16,67kN \cdot m$$

Es necesario colocar refuerzo por torsión

3. Comprobación de la resistencia de las bielas a compresión

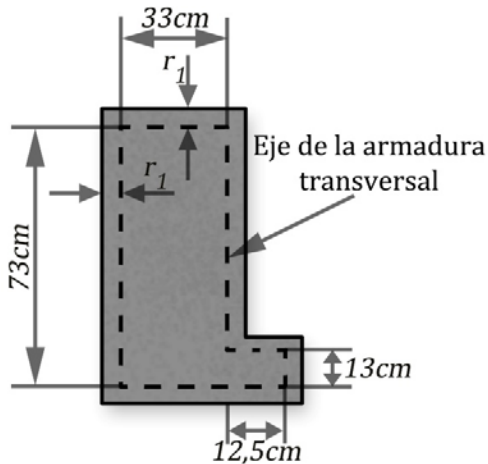
Comprobando que la sección de hormigón resista la acción combinada de la torsión y el cortante por medio de la siguiente verificación:

$$\sqrt{\left(\frac{V_{u,max}}{b_w d}\right)^2 + \left(\frac{T_{u,max} p_h}{1,7 A_{oh}^2}\right)^2} \leq \phi \left[\frac{V_c}{b_w d} + 670 \sqrt{f'_c} \right]$$

Se obtiene A_{oh} y p_h , área y perímetro de la línea media de los estribos, con el apoyo de la figura 6,28

$$A_{oh} = 33 \cdot 73 + 12,5 \cdot 13 = 2571,5cm^2$$

$$p_h = 2(33 + 73) + 2 \cdot 12,5 = 237cm$$



Considerando:

Recubrimiento = 3cm

Para agresividad baja y hormigonado "in situ"

Considerando estribos

Nº 10 $d_b \approx 10mm$

$r_1 = 3,5cm$

Figura 6,28: Valores de A_{oh} y p_h

Calculando el 1er término:

$$\sqrt{\left(\frac{228,5}{0,4 \cdot 0,73}\right)^2 + \left(\frac{54 \cdot 2,37}{1,7 \cdot 0,2571^2}\right)^2} = 1381kN/m^2$$

El segundo término de la ecuación puede plantearse como

$$\phi 840 \sqrt{f'_c} = 0,75 \cdot 840 \sqrt{25} = 3150kN/m^2$$

Por lo que la sección es apropiada para resistir la combinación del momento torsor y el cortante.

4. Cálculo de los estribos

Por torsión

Se trata de estribos cerrados de 2 ramas, elaborados con acero G-40, Nº10

$$f_{yv} = 300MPa \quad A_v = 0,71cm^2$$

Como

$$\frac{A_t}{s} = \frac{T_u}{\phi 2A_o f_{yv}}$$

Y siendo

$$A_o = 0,85A_{oh}$$

$$A_o = 0,85 \cdot 2571,5 = 2185,78cm^2$$

Finalmente

$$\frac{A_t}{s} = \frac{5400}{0,75 \cdot 2 \cdot 2185,78 \cdot 30} = 0,0549 \frac{cm^2}{cm}$$

Por cortante

Utilizando el procedimiento simplificado

$$V_c = 170\sqrt{f'_c} b_w d$$

$$V_c = 170\sqrt{25} \cdot 0,4 \cdot 0,73 = 248,2kN$$

Como $\phi V_c = 186,15kN < V_u$ se requiere colocar estribos por cálculo ante el cortante, procediendo a su cálculo a través de:

$$V_s = \frac{V_u}{\phi} - V_c$$

$$V_s = \frac{228,5}{0,75} - 248,2 = 56,44kN$$

El espaciamiento de los cercos (en este caso de dos ramas) requerido a cortante, cuando ellos son perpendiculares al eje de la pieza, viene dado por:

$$\frac{A_v}{s} = \frac{V_s}{f_{yv} d}$$

$$\frac{A_v}{s} = \frac{56,44}{30 \cdot 73} = 0,026 \frac{cm^2}{cm}$$

Para calcular el espaciamiento requerido de los estribos por la torsión y el cortante combinados:

$$\frac{A_t}{s} + \frac{A_v}{2s} = 0,0549 + \frac{0,026}{2} = 0,0678 \frac{cm^2}{cm}$$

Y como se colocarán estribos *Nº 10*

$$s = \frac{0,71}{0,0678} = 10,48cm$$

Comprobándose las recomendaciones para el refuerzo transversal mínimo, el **espaciamiento máximo** para la torsión será

$$s_{max} = \frac{p_h}{8} = 29,63 = 29cm < 30cm$$

Valor menor que el espaciamiento máximo a cortante, igual a $\frac{d}{2} = 36,5cm$, por lo que será entonces el predominante.

Con este valor se comprueba el área mínima de refuerzo transversal por

$$(A_v + 2A_t) = \frac{1}{16} \sqrt{f_c} \frac{b_w s_{max}}{f_{yv}} \geq 0,33 \frac{b_w s_{max}}{f_{yv}}$$

El 1er término sera:

$$\frac{1}{16} \sqrt{25} \frac{40 \cdot 29}{300} = 1,23 \text{ cm}^2$$

El 2do:

$$0,33 \frac{40 \cdot 29}{300} = 1,3 \text{ cm}^2$$

Siendo el área colocada de estribos $N^\circ 10$ con $A_v = 1,42 \text{ cm}^2$ mayor que ambas restricciones, por lo que el diámetro del estribo escogido se corresponde con el espaciamiento máximo. En caso de que no se cumpliera esta restricción lo más apropiado es reducir el espaciamiento máximo en una proporción $\frac{A_v}{A_{min}}$

La **distribución de los estribos**, entre la zona de espaciamiento mínimo, 10 cm , y máximo de 29 cm , se basa en relacionar las distancias a reforzar con los espaciamientos. Para ello como el Cortante y el Torsor varían linealmente y se anulan en la sección central de la viga, la sección en que debe comenzar a utilizarse la separación máxima entre los cercos se puede determinar por proporcionalidad, como se indica en la figura 6,29.

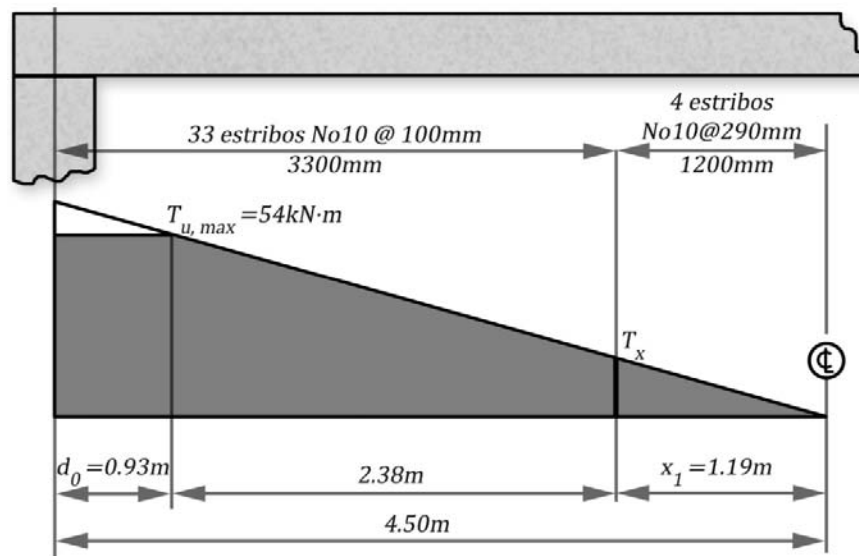


Figura 6,29: Distribución del refuerzo transversal

Evaluada a partir del eje de la viga:

$$x_1 = \frac{10}{30} \left(\frac{L}{2} - 0,93 \right) = \frac{10}{30} (4,5 - 0,93) = 1,19 \text{ m}$$

Finalmente los estribos se distribuirán en un tramo de $2,38 \text{ m}$ a partir de d_o del apoyo, a un espaciamiento menor del máximo, como se indica en la figura 6,29. Luego vendrían los ajustes necesarios a partir del espaciamiento de los cercos que se da en cada uno de estos tramos, es decir, a la hora de hacer la ingeniería de detalle para dibujar el plano.

5. Cálculo del acero longitudinal

$$\frac{A_l}{p_h} = \frac{A_t f_{yv}}{s f_{yl}}$$

$$A_l = \frac{A_t}{s} p_h \frac{f_{yv}}{f_{yl}}$$

$$A_l = 0,0678 \cdot 237 \frac{300}{420} = 11,47 \text{ cm}^2$$

Verificando la cuantía mínima para la armadura longitudinal:

$$A_{l,min} = \frac{5\sqrt{f_c'}}{12} \frac{A_{cp}}{f_{yl}} - \frac{A_t}{s} p_h \frac{f_{yv}}{f_{yl}}$$

$$A_{l,min} = \frac{5\sqrt{25}}{12} \frac{3520}{420} - 0,0678 \cdot 237 \frac{300}{420} = 11,44 \text{ cm}^2$$

Donde se comprueba que el área solo a torsión cumpla la siguiente condición:

$$\frac{A_t}{s} \geq \frac{1}{6} \frac{b_w}{f_{yv}} = \frac{1}{16} \frac{40}{300} = 0,022$$

Como $A_l > A_{l,min}$, se cumplen las restricciones impuestas se da por concluido el diseño y se colocarán las 6 barras N° 16, $11,94 \text{ cm}^2$, distribuidas en el perímetro de la sección, como se muestra en la figura 6,30; que deberán sumarse a las calculadas para resistir el momento flector.

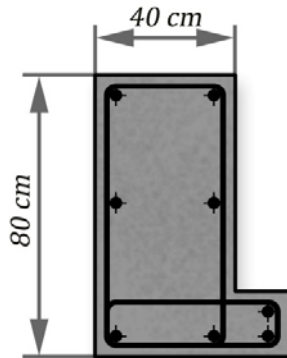
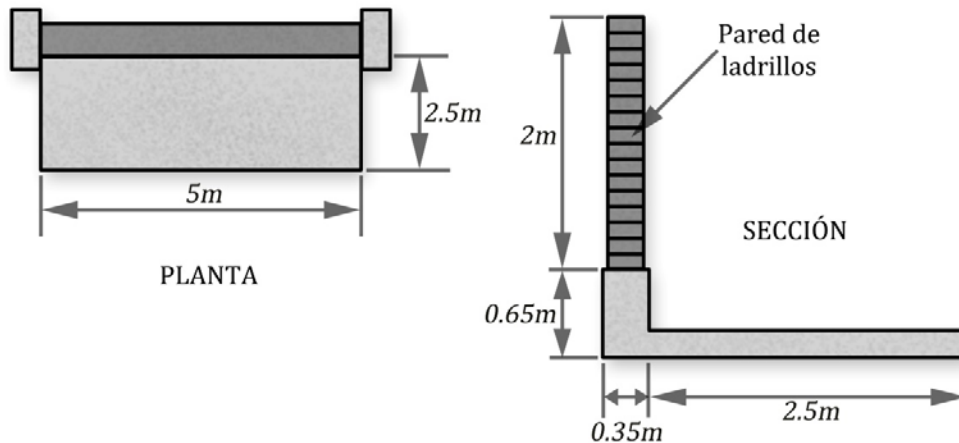


Figura 6,30: Detalle del armado longitudinal de la viga para la torsión

EJERCICIOS PROPUESTOS

1. Calcule la resistencia a la torsión de una viga de sección rectangular de $40 \times 60 \text{ cm}$ y 5 m de luz. Esta sección está armada con $8 \text{ barras } N^{\circ}25$ como refuerzo longitudinal a la torsión, repartido perimetralmente y estribos $N^{\circ}10$ espaciados 15 cm y un recubrimiento de 40 mm . Todo el acero es $G-40$ y el hormigón tiene una $f_c' = 25 \text{ MPa}$.
Expresar la resistencia de la viga en una curva de comportamiento.
2. En la figura 6,31 se muestra una marquesina en voladizo integral, soportada por una viga de sección rectangular. La estructura será construida en una zona con agresividad media. A partir de esta información diseñe la viga para resistir las solicitaciones de flexión y torsión.

**Figura 6,31: Ejercicio propuesto 2**

3. Una viga de sección rectangular, $b = 60 \text{ cm}$ y $h = 40 \text{ cm}$ y 7 m de luz está sometida a una carga uniformemente distribuida y mayorada, $q_u = 25 \text{ kN/m}$ y un momento torsor, también uniformemente distribuido y mayorado, $m_t = 50 \text{ kN} \cdot \text{m/m}$. Si esta viga está situada en un área con baja agresividad y se empleará hormigón de $f_c' = 30 \text{ MPa}$ y refuerzo longitudinal y transversal de $f_y = 300 \text{ MPa}$, diseñe el elemento para resistir las cargas actuantes.
4. La viga T calculada en el ejercicio resuelto 4,10 del Capítulo IV ha sufrido cambios en la acción de la carga de uso, que se ha reducido a la mitad pero se ha desplazado 20 cm a la derecha del eje de la sección. Diseñe el refuerzo longitudinal para las nuevas condiciones y los estribos requeridos para soportar la combinación del momento torsor y el cortante. Debe considerar el aporte que brinda a la torsión la losa, zona en la que puede colocar refuerzo para resistirla.

BIBLIOGRAFÍA CONSULTADA

1. American Concrete Institute. Building Code Requirements for Reinforced Concrete, ACI 318 – 02, Detroit, Michigan. 2005
2. ACI 318 02 Requisitos para Hormigón Estructural. PCA 2002.
3. Babe Ruano M. “Elementos de Estructura de Hormigón Armado”. Tomo I. Editorial Pueblo y Educación. la Habana. Cuba. 1978
4. Babe Ruano M. “Hormigón Armado para Arquitectos. Editorial ISPJAE 1986
5. Baykov, V. y E. Sigalov. Estructuras de Hormigón Armado. Moscú: Ed. Mir, 1986
6. Collins, M. Comportamiento del Hormigón. Impresiones Ligeras, ISPJAE. 1978
7. Medina Torri F.; Ruiz Alejo L. “Hormigón Estructural 1” Editorial Pueblo y Educación. La Habana. Cuba. 1991
8. N.C. 053–039–1997. Obras de Hormigón Armado. Principios Generales y Métodos de Cálculo. 1997
9. Nilson, H. A. Diseño de Estructuras de Concreto Presforzado. México: Ed. Limusa, 1999
10. Park, R. y T, Paulay. Estructuras de Concreto Reforzado. México: Ed. Limusa, 1979
11. Stiopin P. A. Resistencia de materiales. Editorial MIR. Moscú. 1979

CAPÍTULO 7

Estados Límites de Utilización

7,1 INTRODUCCIÓN

En los capítulos precedentes se ha analizado el comportamiento del Hormigón Armado en la rotura, en el Estado Límite Ultimo de Agotamiento de la sección. En el caso de la flexión se evalúa el agotamiento a Momento Flector y a Fuerza Cortante.

En la curva de comportamiento M vs φ , figura 7,1, se aprecia claramente la trayectoria de resistencia – deformación de una sección a flexión.

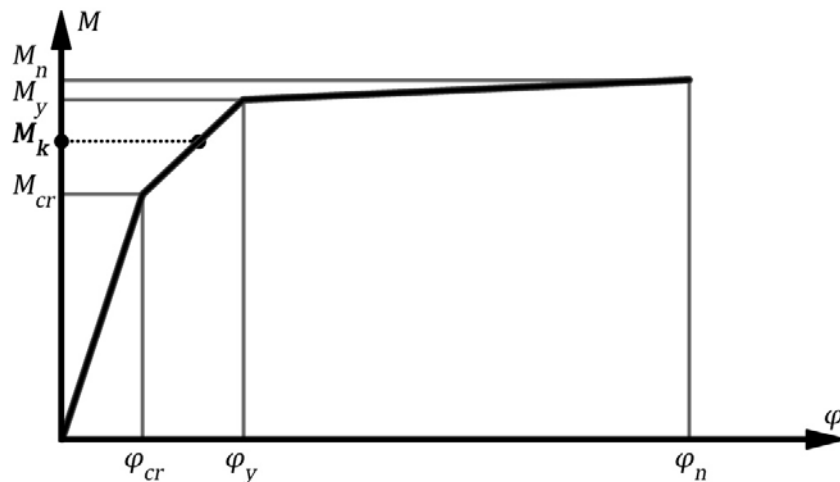


Figura 7,1: Curva de comportamiento en vigas

Donde se diferencia dos ETAPAS de análisis.

- ETAPA DE ROTURA: $M_n - \varphi_n$

Valores que caracterizan el agotamiento, en los que se diseña la sección para resistir la combinación de carga más desfavorable $M_u < \phi \cdot M_n$

- ETAPA DE SERVICIO

Es la etapa de “FUNCIONAMIENTO” de la viga, por lo que para $M = M_k$, debe garantizarse que el elemento no se agriete ni se deforme más allá de valores permisibles. Esto es lo que se llama el chequeo de los Estados Límites de Utilización: de Fisuración y de Deformación.

El valor de momento M_k se calcula con las cargas de servicio, sin mayorar, es decir que:

$$M_k = \gamma_f \cdot M \quad \text{donde} \quad \gamma_f = 1$$

En la etapa de funcionamiento el Momento que provoca la fisuración de la sección (M_{cr}) resulta una frontera en la valoración del comportamiento.

Si $M_k \leq M_{cr}$ la sección no se fisura y aporta en su totalidad, como se puede apreciar en la curva M vs ϕ . En las vigas comunes, cuando se produce el valor de M_k ya la sección se fisuró, pues ocurre que $M_k > M_{cr}$.

Por tanto podrá establecerse dos zonas

- $M_k \leq M_{cr}$ sección no fisurada
- $M_k > M_{cr}$ sección fisurada

Ha sido confirmado fehacientemente, teórica y experimentalmente, que en el hormigón armado bajo cargas de servicio el hormigón tiene un comportamiento que puede admitirse como ELÁSTICO, por lo que a continuación se desarrollan las ecuaciones que rigen esta hipótesis.

7.1.1 MOMENTO DE FISURACIÓN

En las secciones de Hormigón Armado el cálculo del M_{cr} tiene en esencia una importancia referencial, pues como regla estas se fisuran para cargas relativamente bajas.

Considerando un diagrama lineal f_c vs ε_c' , se muestra en la figura 7,2 los diagramas tensionales para M_{cr} y aplicando Navier.

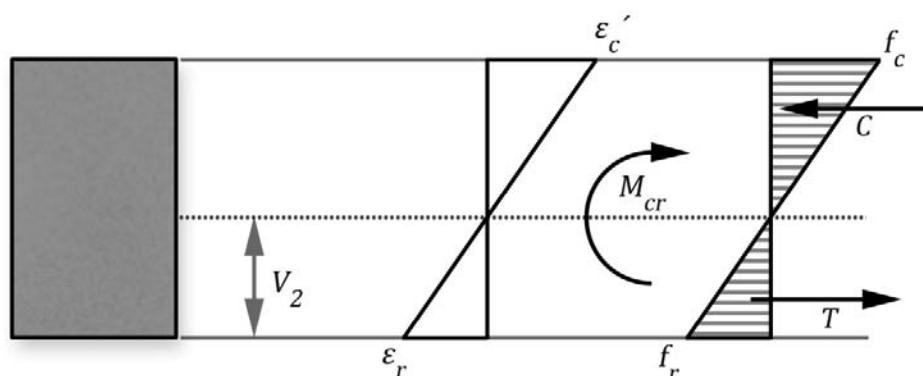


Figura 7,2 Momento de fisuración en sección con comportamiento elástico

$$f_r = \frac{M_{cr}}{W'} = \frac{M_{cr}}{I} V_2$$

Donde:

f_r máxima tensión a tracción del hormigón a flexión

$$f_r = 0,62\sqrt{f_c'}$$

$W' = \frac{I}{V_2}$ Módulo de la sección

Para tomar en cuenta el aporte del refuerzo colocado en la sección se calcula la SECCIÓN TRANSFORMADA, lo que se ilustra en la figura 7,3

Las áreas transformadas de acero a hormigón se obtienen por:

$$C = T$$

$$A_e \cdot f_c = A_s \cdot f_s$$

$$A_e \cdot \varepsilon_c' \cdot E_c = A_s \cdot \varepsilon_s \cdot E_s$$

Y como $\varepsilon_c' = \varepsilon_s$

$$A_e = A_s \cdot \frac{E_s}{E_c} = A_s \cdot n$$

Donde $n = \frac{E_s}{E_c}$ es el Modulo de equivalencia

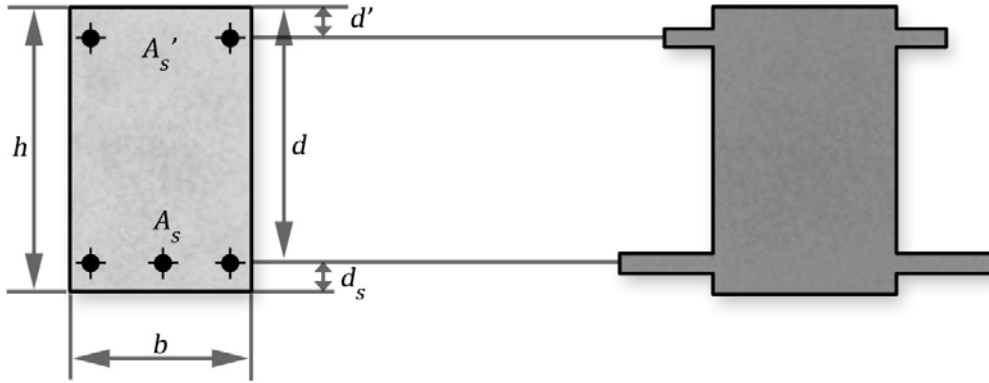


Figura 7,3: Sección transformada

Entonces:

$A_h = \text{Área hormigón} + \text{Área transformada del acero}$

$$A_h = A_g + n \cdot A_s + n \cdot A_s' = b \cdot h + n(A_s + A_s')$$

Si se considera el área de hormigón desplazada por el refuerzo:

$$A_h = b \cdot h + (n - 1)(A_s + A_s')$$

Para obtener la posición del centroide de la sección transformada, V_2 , se calcula el Momento Estático respecto al borde inferior

$$S_h = \frac{bh^2}{2} + (n - 1)A_s \cdot d_s + (n - 1)A_s'(h - d')$$

$$V_2 = \frac{S_h}{A_h}$$

Y finalmente para calcular el Momento de Inercia de la sección transformada, se divide la sección en partes y se trabaja con la expresión

$$I_h = \sum_{i=1}^n (I_{oi} + A_i \cdot y_i^2)$$

Donde:

- I_h Momento de inercia total de la sección transformada respecto a su centroide
- I_{oi} Momento de inercia de cada parte de la sección total respecto a su centroide
- A_i Área de cada parte de la sección
- y_i Distancia del centroide de cada área hasta el centroide de la sección

Para una sección rectangular, despreciando las inercias de los aceros respecto a su propio centroide:

$$I_h = \frac{bh^3}{12} + bh(V_2 - \frac{h}{2})^2 + (n - 1)A_s(V_2 - d_s)^2 + (n - 1)A_s'(h - d' - V_2)^2$$

Entonces para el cálculo definitivo del M_{cr} , tomando en cuenta la SECCIÓN TRANSFORMADA

$$M_{cr} = \frac{f_r}{V_2} I_h$$

7.1.2 SECCIÓN FISURADA

Cuando $M_{cr} < M_k$ la sección está fisurada pero aún no ha entrado en la fase de agotamiento, siendo la etapa más común de la vida de una viga.

Analizando para M_k el comportamiento de la sección bajo régimen elástico y con apoyo de la figura 7,4, se desarrollan las ecuaciones básicas del comportamiento de la sección. Nótese que se llama x a la posición de la línea neutra, para diferenciarla de c , valor de esta cuando está sometida a M_u , en el agotamiento.

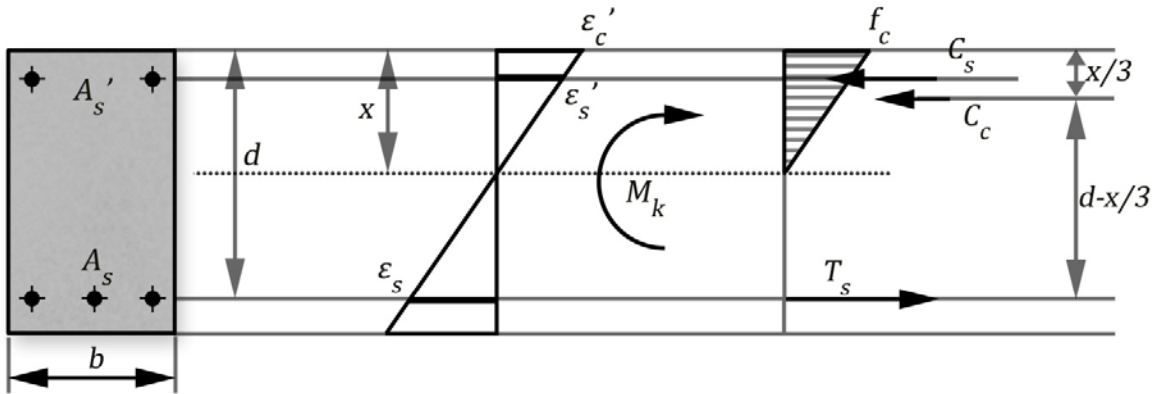


Figura 7,4 Sección fisurada

$$\Sigma F = 0$$

$$C_c + C_s = T_s$$

$$\frac{1}{2} f_c b \cdot x + A'_s f'_s = A_s f_s$$

Donde:

$$f_c = \epsilon'_c E_c$$

$$f'_s = \epsilon'_s E_c$$

$$f_s = \epsilon_s E_s$$

Y por las ecuaciones de compatibilidad

$$\frac{\epsilon'_c}{x} = \frac{\epsilon'_s}{x - d'} = \frac{\epsilon_s}{d - x}$$

Sustituyendo en la ecuación de fuerzas

$$\frac{1}{2} \epsilon'_c E_c b \cdot x + A'_s \epsilon'_c E_s \frac{x - d'}{x} = A_s \epsilon_s E_s \frac{d - x}{x}$$

Como $n = \frac{E_s}{E_c}$ y considerando el área de hormigón desplazado por el refuerzo comprimido, para calcular x se resuelve la ecuación

$$\frac{1}{2} b x^2 + [n A_s + (n - 1) A'_s] x - n A_s d - (n - 1) A'_s d' = 0$$

La conclusión del problema se logra calculando ϵ_s y el resto de las deformaciones, trabajando en la ecuación de momentos respecto a A_s

$$M_k = \frac{1}{2}f_c b \cdot x \left(d - \frac{x}{3}\right) + A_s' f_s' (d - d')$$

O preferiblemente respecto a la resultante del hormigón C_c

$$M_k = A_s f_s \left(d - \frac{x}{3}\right) + A_s' f_s' \left(\frac{x}{3} - d'\right)$$

Y como

$$\frac{\varepsilon_s'}{x - d'} = \frac{\varepsilon_s}{d - x}$$

Finalmente:

$$M_k = A_s \varepsilon_s E_s \left(d - \frac{x}{3}\right) + A_s' \varepsilon_s E_s \frac{x - d'}{d - x} \left(\frac{x}{3} - d'\right)$$

Despejando el valor de la tensión en el acero principal:

$$\varepsilon_s E_s = f_s = \frac{M_k}{A_s \left(d - \frac{x}{3}\right) + A_s' \frac{(x - d') \left(\frac{x}{3} - d'\right)}{d - x}}$$

Y puede calcularse

$$\varepsilon_s = \frac{f_s}{E_s}$$

$$f_s' = \varepsilon_s' E_s = \varepsilon_s \frac{x - d'}{d - x} E_s$$

$$f_c = \varepsilon_c' E_c = \varepsilon_s \frac{x}{d - x} E_c$$

Pero desde el punto de vista práctico lo importante es el cálculo de f_s , pudiendo admitirse una solución más simple, despreciando el aporte de A_s' .

Entonces

$$M_k = \frac{1}{2}f_c b \cdot x \left(d - \frac{x}{3}\right) = A_s f_s \left(d - \frac{x}{3}\right)$$

$$f_s = \frac{M_k}{A_s \left(d - \frac{x}{3}\right)}$$

Pudiéndose calcular x sin considerar el aporte de A_s' , expresión más sencilla y que no provoca variaciones notables en los resultados. Para estas condiciones la ecuación de fuerzas quedaría:

$$\frac{1}{2}bx^2 + nA_s x - nA_s d = 0$$

Ejercicio 7.1

Obtenga el Momento de Fisuración y la tensión del refuerzo principal para la sección que se muestra en la figura 7,5 sobre la que actúa un momento de servicio: $M_k = 135 \text{ kN.m}$. La viga fabricada “in situ”, está situada en una zona de agresividad MEDIA, siendo el recubrimiento efectivo 40 mm

$$A_s' = 3.98 \text{ cm}^2 \text{ (2 barras N}^\circ 16\text{)}$$

$$A_s = 10.2 \text{ cm}^2 \text{ (2 barras N}^\circ 25\text{)}$$

$$f_c' = 20 \text{ MPa}$$

$$f_y = 420 \text{ MPa}$$

$$d_s = 6.22c$$

$$d' = 5.75 \text{ cm}$$

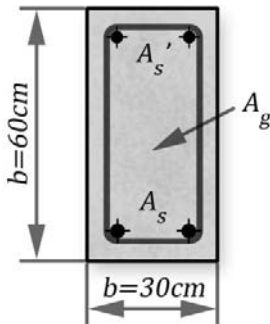


Figura 7,5: Ejercicio 7,1

Los recubrimientos mecánicos fueron obtenidos para las características de la barras por la tabla A-8

Cálculos y discusión

1. Cálculo de las características geométricas de la sección transformada.

Construyendo una TABLA para el cálculo de las características geométricas de la sección:

TABLA 7,1: Características geométricas de la sección transformada

Sección	$A_i(\text{cm}^2)$	$y_i(\text{cm})$	$A_i \cdot y_i(\text{cm}^3)$	I_{oi}	$A_i \cdot y_i^2$	$I_y(\text{cm}^4)$
1. (Hormigón)	1800	30	54000	540000	1620000	2160000
2. $(n-1)A_s'$	33.89	53,78	1838,73		99760,03	99760,03
3. $(n-1)A_s$	86.85	5.75	540,24		3360,28	3360,28
Σ	1920.75		56378,96	540000	1723120,31	2263120,31

$$n = \frac{E_s}{E_c}$$

$$E_s = 2.10^5 \text{ MPa}$$

$$E_c = 4700\sqrt{f_c'} = 21019 \text{ MPa}$$

$$n = 9,52$$

$$A_h = 1920,75 \text{ cm}^2$$

$$V_2 = \frac{S_h}{A_h} = \frac{56378,96}{1920,75} = 29,35 \text{ cm}$$

$$I_h = I_y - A_h V_2^2$$

$$I_h = 2263120,31 - 1920,75 \cdot 29,35^2 = 60248,41 \text{ cm}^4$$

Pudiéndose calcular también por:

$$I_h = \frac{1}{12}bh^3 + b \cdot h(V_2 - \frac{h}{2})^2 + (n-1)A_s(V_2 - d_s)^2 + (n-1)A_s'(h - d' - V_2)^2$$

$$I_h = 54000 + 1800(29,35 - 30)^2 + (9,52 - 1)10,2(29,35 - 5,75)^2 + (9,52 - 1)(53,78 - 29,35)^2$$

$$I_h = 60248,41 \text{ cm}^4$$

2. Cálculo del Momento de fisuración: M_{cr}

$$M_{cr} = \frac{f_r}{V_2} I_h$$

$$f_r = 0,62\sqrt{f_c'} = 2,77\text{MPa}$$

$$M_{cr} = \frac{0,277}{29,35} 608248,41 = 5746 = 57,46\text{kN.m}$$

Si se hubiera trabajado con la sección bruta.

$$M_{cr} = \frac{0,277}{30} 540000 = 4991 = 49,91\text{kN.m}$$

Lo que representa un 16% menor, demostrándose la validez de los cálculos con la sección transformada

3. Cálculo de la tensión en el acero traccionado: f_s

De la ecuación de fuerzas

$$\frac{1}{2}bx^2 + [nA_s + (n-1)A_s']x - nA_sd - (n-1)A_s'd' = 0$$

Los coeficientes de la ecuación son.

$$a = 15$$

$$b = 9,52 \cdot 10,2 + (9,52 - 1)3,98 = 130,95$$

$$c = 9,52 \cdot 10,2 \cdot 53,78 + (9,52 - 1)3,98 \cdot 5,75 = 5024,91$$

$$x = \frac{-130,95 + \sqrt{130,95^2 + 4 \cdot 15 \cdot 5024,61}}{2 \cdot 15} = 14,45\text{cm}$$

Entonces

$$f_s = \frac{M_k}{A_s \left(d - \frac{x}{3} \right) + A_s' \frac{(x - d') \left(\frac{x}{3} - d' \right)}{d - x}}$$

$$f_s = \frac{13500}{10,2 \left(53,78 - \frac{14,45}{3} \right) + 3,98 \frac{(14,45 - 5,75) \left(\frac{14,45}{3} - 5,75 \right)}{53,78 - 14,45}} = 27,096 = 270,96\text{MPa}$$

Sin considerar el aporte del refuerzo comprimido:

$$\frac{1}{2}bx^2 + nA_sx - nA_sd = 0$$

$$x = \frac{-97,1 + \sqrt{97,1^2 + 4 \cdot 15 \cdot 5219,61}}{2 \cdot 15} = 15,7\text{cm}$$

$$f_s = \frac{M_k}{A_s \left(d - \frac{x}{3} \right)}$$

$$f_s = \frac{13500}{10,2 \left(53,78 - \frac{15,7}{3} \right)} = 27,26 = 272,63\text{MPa}$$

Demostrándose que la diferencia no es significativa validándose el procedimiento más sencillo

7,2 FISURACIÓN

Para el control de la fisuración, desde la normativa NC-53-39-97 “Obras de Hormigón Armado. Principios Generales y Métodos de Cálculo”, se introduce en Cuba el enfoque del ACI para la verificación del Estado Límite de Abertura de Fisuras, manteniendo el enfoque histórico para los restantes Estados Límites de Fisuración, promovidos por las normativas europeas.

La fisuración en elementos de Hormigón Armado es inevitable, pues aparece cuando se sobrepasa la capacidad resistente del hormigón a tracción que es baja, aproximadamente de un 10% de su resistencia a compresión. Las grietas pueden producirse por diferentes efectos, los más importantes la

acción de las cargas que provocan solicitaciones de flexión o torsión de la sección, pero también debido a cambios de temperatura, la retracción del hormigón u otra deformación sobre un elemento con determinadas restricciones a los desplazamientos.

En el presente capítulo se estudian las grietas provocadas por el Momento Flector. En el caso del Hormigón Armado, como regla, las solicitaciones producidas por las cargas de servicio superan el Momento de Fisuración de la sección, conduciendo al inevitable agrietamiento.

Se han identificado tres motivos por los cuales es necesario limitar el ancho de las fisuras en el hormigón. Estos son la apariencia (estética), la corrosión y la impermeabilidad.

La **apariencia** es importante en el caso del hormigón a la vista y el agrietamiento por tanto tiene un papel muy importante, que justifica un riguroso control del ancho de la fisura.

La **corrosión** es importante en el caso del hormigón expuesto a ambientes agresivos, condiciones típicas en climas tropicales, como el cubano. Se ha demostrado que para limitar este efecto las medidas más efectivas están en la utilización de hormigones de mejor calidad y aumentando el espesor del recubrimiento de hormigón a las barras de refuerzo, no es la abertura de la fisura un factor decisivo, por lo que las últimas disposiciones del ACI no dirigen el control del agrietamiento a limitar el ancho de esta.

La **impermeabilidad** requiere una severa limitación del ancho de las fisuras, aplicable solamente a elementos que contengan líquidos o granos o que demanden otros requerimientos especiales por la agresividad del medio o por necesidades del estado de la superficie, las exigencias alrededor de la fisuración se incrementan y demandan un tratamiento particular.

7.2.1 ESTADOS LÍMITES DE FISURACIÓN:

La prevención de la fisuración es considerada por la norma cubana NC-53-39-97 en tres Estados Límites:

- Estado Límite de descompresión
- Estado Límite de formación de fisura.
- Estado Límite de abertura de fisura

Descompresión

Prohíbe la aparición de tracciones en la sección, por tanto la resultante de las fuerzas actuantes en la sección está dentro del Núcleo Central, concepto definido en resistencia de materiales como la zona de la sección en que colocada la resultante de las fuerzas se asegura que esta esté totalmente comprimida.

Formación de fisura

Es el estado donde la tensión de tracción de la fibra más traccionada, calculada para una sección homogeneizada, es igual o menor a la resistencia a la tracción del hormigón.

$$f_t \leq f_r = 0,62\sqrt{f_c'}$$

$$M_k \leq M_{cr}$$

En el capítulo II se evaluaron detalladamente estos casos al definir las combinaciones de carga y curvatura en una sección a flexión, o de carga y desplazamiento en un tensor, en que se produce la fisuración.

Estos Estados Límites son propios del hormigón pretensado, por lo que se profundizará en ellos en los capítulos correspondientes del tomo II .

Abertura de fisura

Este es característico del hormigón armado que, como se demostró en el capítulo de comportamiento del hormigón, está fisurado bajo las cargas de servicio. Ha sido práctica en los últimos años chequear este Estado Límite a partir del control del ancho característico de la fisura (a_f), calculado a nivel del centro de gravedad de las armaduras más próximas a la fibra más traccionada, el que no debe sobrepasar un valor especificado en función de las condiciones ambientales.

Sin embargo en investigaciones desarrolladas en los últimos años y resumidas por el Comité ACI 224, sobre el “Control de la Fisuración en Estructuras de Hormigón” se establece que:

“la tendencia del diseño de hormigón armado y pretensado para asegurar una fisuración aceptable bajo cargas de servicio consiste en proveer un detallado adecuado, tal como requisitos de armadura mínima y correcta selección de los diámetros de las barras, separación de las barras y reducción de las restricciones, antes que en tratar de aplicar métodos sofisticados para calcular las fisuras”

Por tanto el control del ancho de la grieta se convierte en un análisis específico y diferenciado para las estructuras que requieran cumplir determinadas exigencias estéticas o de impermeabilidad. En este sentido es importante definir el concepto de abertura de fisura máxima, para lo que, en las condiciones cubanas, son válidas las indicaciones de la normativa NC 250:04 “Requisitos de durabilidad para el diseño y construcción de Edificaciones y Obras Civiles de hormigón estructural”. A continuación se detalla el enfoque en este sentido.⁽¹⁰⁾

Las condiciones de agresividad del ambiente se clasifican en cuatro categorías, (ver capítulo VIII):

1. Agresividad MUY ALTA:

Elementos de estructuras marinas por encima del nivel de la marea alta y en zonas de recorridos de mareas.

Estructuras situadas en las proximidades de la línea costera hasta 500 m. del mar en la costa norte y hasta 100 m en la sur.

Estructuras no impermeabilizadas en contacto con aguas que presenten un contenido elevado de cloruros, no necesariamente relacionados con el ambiente marino.

2. Agresividad ALTA:

Elementos de estructuras marinas sumergidos permanentemente.

Estructuras situadas en la franja costera a más de 500 m y hasta 3 Km. del mar en la costa norte y a más de 100 m y hasta 1 Km. en la costa sur.

Estructuras soterradas bajo la influencia total ó parcial de agua de mar o salobre.

3. Agresividad MEDIA:

Estructuras situadas en la franja costera a más de 3 Km. y hasta 20 Km. de la costa norte y a más de 1 Km. y hasta 20 Km. de la costa sur.

Estructuras soterradas bajo la influencia total o parcial de aguas y suelos comunes.

Depósitos de agua dulce.

Interiores de edificaciones aisladas del medio exterior y sometidas a humedades altas ó condensaciones.

Estructuras situadas en zonas de humedades relativas medias anuales mayores de 65%.

4. Agresividad BAJA

Estructuras situadas a más de 20 km de ambas costas.

Interiores de edificaciones no sometidos a condensaciones.

Estructuras soterradas no afectadas por las aguas subterráneas o freáticas en suelos comunes.

Estructuras situadas en zonas de humedades relativas medias anuales iguales ó menores del 65%.

La selección del ancho permisible de la grieta se hace según la NC 250:04, atendiendo a la tabla 7,2:

En consonancia con lo expresado anteriormente, la tabla 7,2 se convierte en una guía general para el proyectista en el diseño de elementos a flexión y un complemento de los análisis globales considerados para garantizar la correcta protección del refuerzo y durabilidad de la estructura, conocido que el ancho de fisura no siempre es un indicador confiable de la corrosión permisible del acero. Estos valores de abertura máxima se compararán con los obtenidos por las expresiones recomendadas en los epígrafes siguientes, con la certeza que en la estructura ocurrirán grietas superiores a las estimadas y que crecerán en el tiempo.

TABLA 7,2: Máxima abertura de fisura por requerimientos de durabilidad (mm)

AGRESIVIDAD.	HORMIGÓN ARMADO
Muy alta	<i>Tipo 1 – 0,15 (**)</i> <i>Tipo 2 – 0,2 (**)</i>
Alta	0,25
Media	0,30
Baja	0,35

NOTAS:

(*) Se deberá comprobar que el acero activo se encuentre en la zona comprimida de la sección bajo la combinación de acciones casi permanentes.

(**) El tipo 2, en agresividad muy alta corresponde a:

- Edificaciones ubicadas en una franja hasta 500 m del mar en la Costa Norte y hasta 100 m en la Sur
- Edificaciones ubicadas en cayos.

Para el resto de las “Descripciones” de agresividad muy alta le corresponde el tipo 1

Los valores de abertura de fisura de la tabla son medidos a cara del elemento (fibra más traccionada) y corresponden a combinación de acciones casi permanentes.

7.2.2 FACTORES INFLUYENTES EN LA FISURACIÓN

El mecanismo de aparición de las grietas ha sido caracterizado por Murashev y se esquematiza en la figura 7,6.

La primera fisura se presenta cuando la tensión al nivel del acero sobrepasa la resistencia a la tracción del hormigón f_r , y por tanto desaparece el trabajo conjunto, tomando el acero todo el esfuerzo lo que provoca:

- Incremento del esfuerzo del hormigón comprimido
- Aumento de la curvatura ϕ al subir la línea neutra, x
- A lo largo del elemento y en función del desarrollo de las fisuras, son variables x y f_s

La aparición de la próxima fisura es un fenómeno que aún no está claramente explicado pero ocurre al sobrepasarse, en la zona entre las primeras grietas, la tensión límite a tracción del hormigón. Sin

embargo se ha demostrado que es la abertura de la primera grieta la que provoca la situación más desfavorable.

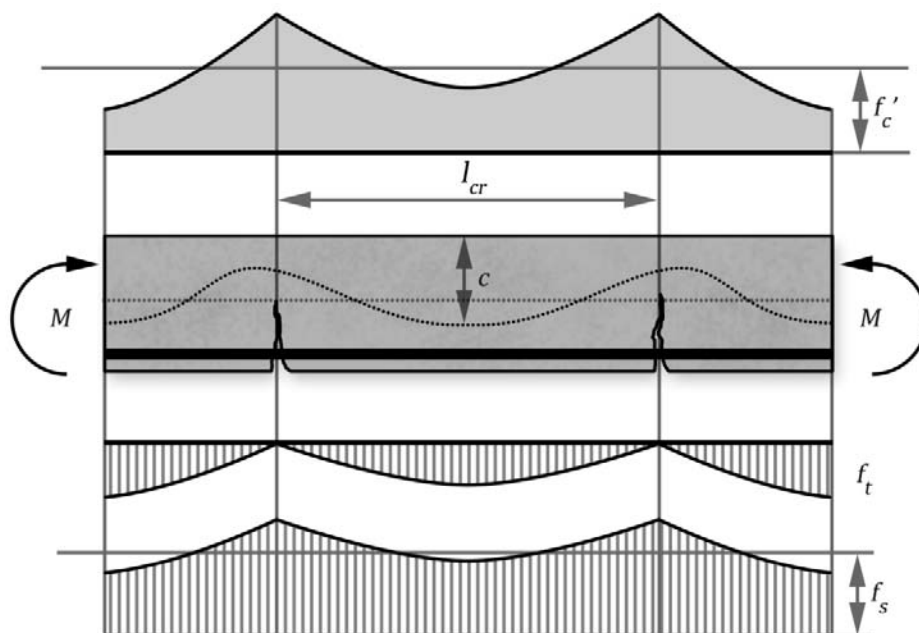


Figura 7,6: Mecanismo de formación de fisuras

La corrosión del acero siempre se ha asociado a la presencia de la fisuración. Sin embargo, se ha demostrado que el ancho de las grietas no influye directamente en esta reacción sino en el periodo de tiempo requerido para que ella tenga lugar.

Los factores que pueden incidir en la fisuración son muchos y se manejan de diferentes formas por las normativas internacionales. En general hay coincidencias en que los factores más importantes son: la tensión en el acero, la adherencia entre el hormigón y el acero, la cuantía del refuerzo principal, la calidad del acero, la característica de la superficie de las barras, la calidad del hormigón, el diámetro de las barras y su colocación, la presencia de grupos de barras, etc.

Estos factores provocan dos efectos principales sobre la sección: la tensión en el acero y la adherencia, y por tanto el accionar del proyectista debe estar dirigido a su regulación.

A continuación se evalúan cada uno de estos factores a la luz del enfoque de diferentes normativas y por resultados de la experimentación, resultados obtenidos en la Facultad de Construcciones de la UCLV, a principios de la década de los noventa.

La **tensión en el refuerzo principal** resulta el elemento principal y tiene una relación prácticamente lineal con la abertura de fisura. Esta apreciación se confirma al evaluar el resultado de ensayos que se muestran en la figura 7,7.

Se aprecia además como la normativa del ACI-95 ofrece resultados alejados conservadoramente de los ensayos. Por otra parte se confirma la validez del tratamiento lineal de la sección bajo este régimen de carga. Si se usa acero de alta calidad la fisuración aumenta, pues la tensión de trabajo del acero es alta

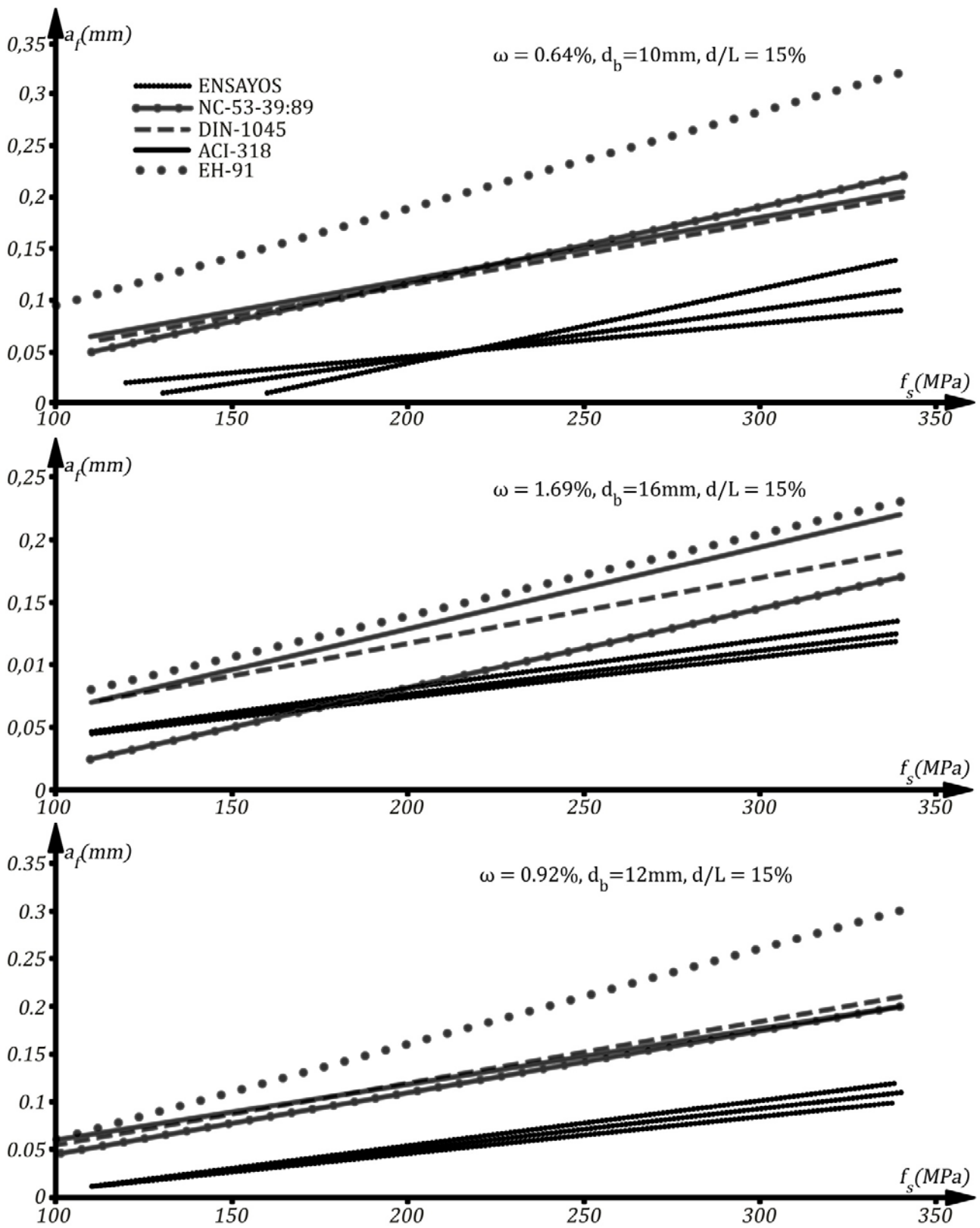


Figura 7,7: Resultados de ensayos y comparación de normativas

La **cuantía del refuerzo principal** se manifiesta como tendencia asociada a la tensión del refuerzo. Si se aumenta la cuantía de acero disminuye la fisuración porque baja la tensión en el acero, por lo que secciones de gran ductilidad tendrán un alto grado de fisuración. Este factor es considerado por prácticamente todas las normativas y su influencia se manifiesta en la figura 7,8, por otra parte los ensayos demostraron que para altas cuantías algunas normativas no ofrecen resultados confiables.

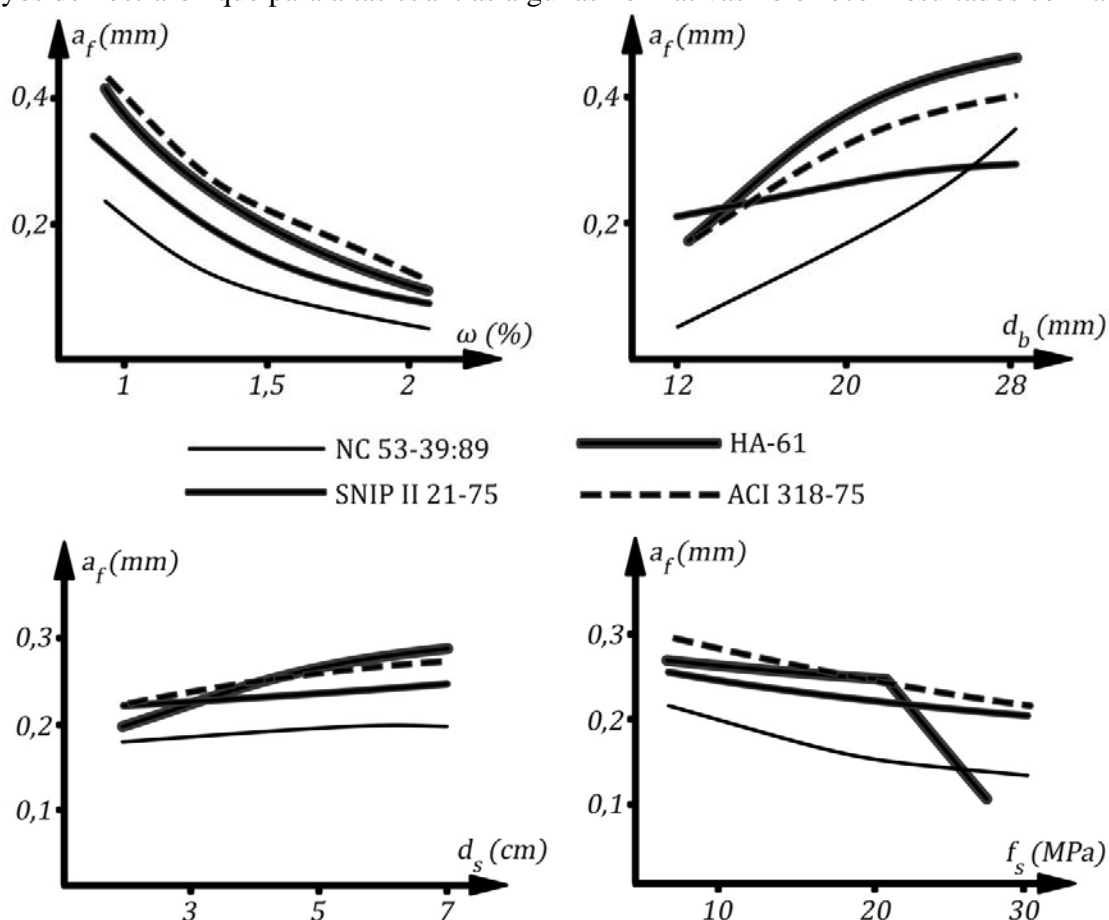


Figura 7,8: Influencia de algunos factores. Comparación según algunas normativas

La influencia del **diámetro de la barras (d_b)** está asociada a la necesidad de que las tensiones en el área traccionada estén repartidas convenientemente y por tanto contribuyan a la adherencia acero – hormigón. Usar diámetros pequeños brinda un mayor perímetro adherente, y por tanto menor fisuración. Estas conclusiones se ratifican tanto en los ensayos como en la figura 7,8, que muestra una comparación de diferentes normas.

El **recubrimiento de las barras** tiene un papel menos significativo en la abertura de fisuras, sin embargo es deseable colocar barras lo mas cercanas posible al borde mas traccionado, buscando su disminución, lo que se confirma apreciando la figura 7,8. en las nuevas disposiciones del ACI este factor cobra mayor importancia dada la tendencia de buscar mayores recubrimientos para alcanzar una mejor protección del refuerzo.

De esta manera puede determinarse que medidas son más efectivas para que se cumpla el estado de fisuración. Pueden establecerse dos decisiones fundamentales:

1. Disminuir el diámetro de las barras calculados en el diseño resistente, manteniendo el área teórica (dentro de lo posible), de esta forma disminuye la separación entre barras, se aumenta el perímetro adherente y por tanto la adherencia acero – hormigón.
2. Aumentar la cantidad de acero, aumentar la cuantía, colocar refuerzo de menos calidad y favorecer secciones con menor ductilidad, por tanto disminuir la tensión en el acero,

Aunque la forma actual de garantizar el cumplimiento del Estado Límite de Aberturas de Fisuras, propio de elementos de hormigón armado, no parte del cálculo del ancho de las grietas, a continuación se abordan diferentes enfoques para su cálculo, con vistas a dotar al proyectista de estas herramientas, siempre útiles en el análisis integral de las estructuras y para elevar la comprensión de su comportamiento.

Las indicaciones del ACI, hasta ACI 318-95, establecían que la verificación del estado límite de abertura de fisura, consistía en comprobar que el ancho máximo más probable que se puede presentar en la superficie de una pieza sometida a flexión (a_f) sea menor que el ancho permisible a_{fk} :

Estas disposiciones se basan en los trabajos de Gergely y Lutz que, para la flexión, pueden simplificarse en la siguiente expresión:

Donde:

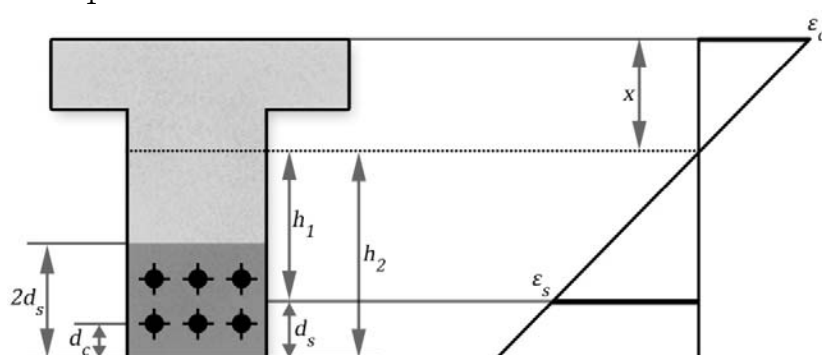
$$\beta = \frac{h_2}{h_1} = \frac{h - x}{d - x}$$


Figura 7,9: Factor de profundidad. Recubrimientos.

f_s tensión de trabajo del acero bajo cargas de servicio en MPa

El valor de la tensión se aprendió a calcularlo anteriormente y vendrá dado por la expresión:

$$f_s = \frac{M_k}{A_s(d - \frac{x}{3})}$$

De una forma aproximada se puede asumir $f_s = 0,6f_y$

Además la NC-53-39-97 propone para el cálculo del brazo del par las siguientes expresiones:

Para secciones rectangulares sin refuerzo a compresión:

$$jd = d - \frac{x}{3} = 0,8d \quad \text{si } n \cdot \rho \geq 0,15$$

$$jd = d - \frac{x}{3} = 0,85d \quad \text{si } n \cdot \rho < 0,15$$

Para secciones T y rectangular con refuerzo a compresión:

$$jd = d - \frac{x}{3} = 0,9d$$

d_c distancia del borde de la fibra más traccionada al centroide de la barra o cable más cercano a ella en mm .

A_k área efectiva de hormigón en tracción que rodea al acero traccionado, dividido entre el número de barras (n_b) o alambres en mm^2 .

$$A_k = \frac{2d_s b}{n_b}$$

Si las barras son de diferentes diámetros, el número de barras está dado por el área total de refuerzo entre el área de la barra de mayor diámetro

La fórmula de Gergely y Lutz refleja que la distribución del refuerzo influye en el ancho de las fisuras de los elementos sometidos a flexión, a través de los parámetros d_c y A_k . Esta expresión no es aplicable a losas armadas en dos direcciones.

La expresión para la determinación de a_f proporciona el valor más probable del ancho de fisura máximo. Sin embargo este parámetro tiene gran dispersión. Aproximadamente un 10% de las fisuras que se presentan en el elemento tienen un ancho 50% mayor que el estimado por la fórmula y un 2% de ellos tienen un ancho menor al 50% de él. Por ello, el control de la fisuración debe buscar conseguir una distribución adecuada del refuerzo en la zona de tracción, en lugar de efectuar cálculos detallados para estimar el ancho de las fisuras.

El código ACI 318-95 prefiere dar mayor importancia a la distribución del refuerzo y por ello, propone el siguiente procedimiento para el control de la grieta, válido cuando $f_y \geq 280MPa$

$$Z = \frac{a_f}{1,1 \cdot 10^{-5} \cdot 1,2} = f_s \sqrt[3]{d_c A_k}$$

Esta relación se deriva de la fórmula propuesta por Gergely y Lutz, por lo que los parámetros en ambos tienen el mismo significado. Para las condiciones de Cuba el valor de Z estará limitado por:

- En vigas :

$$Z \leq 26515N/mm \quad \text{para } a_f = 0,35mm$$

$$Z \leq 23000N/mm \quad \text{para } a_f = 0,3mm$$

$$Z \leq 19940N/mm \quad \text{para } a_f = 0,25mm$$

$$Z \leq 15300N/mm \quad \text{para } a_f = 0,2mm$$

$$Z \leq 11364N/mm \quad \text{para } a_f = 0,15mm$$

- En losas : 0,887 de los valores dados para las vigas

Si el peralte efectivo d de una viga es mayor o igual a 90 cm el elemento debe llevar barras adicionales en sus caras para evitar la fisuración que se pudiera producir en ellas al estar desprovistas de acero. El código sugiere que este refuerzo se coloque en la mitad inferior del elemento.

b) Enfoque de Frosch

Basado en un modelo físico del agrietamiento de vigas y losas en una dirección, Frosch revaluó el fenómeno de la fisuración y propuso una nueva expresión para el cálculo del ancho de las grietas, el que se obtendrá por:

$$a_f = 2 \frac{f_s}{E_s} \beta \sqrt{d_c^2 + \left(\frac{s}{2}\right)^2}$$

donde:

β Factor de profundidad

Se admite calcular aproximadamente por:

$$\beta = 1 + 0,0031d_c \quad \text{donde } d_c \text{ en } mm$$

f_s tensión de trabajo del acero en MPa

E_s modulo de deformación del acero en MPa

d_c distancia del borde de la fibra más traccionada al centroide de la barra más cercana a ella en mm .

s separación entre los centros de las barras de la armadura principal por flexión más cercana a la cara más traccionada, en mm

Como se aprecia la abertura de fisura depende de la tensión en el acero, la separación entre las barras y el recubrimiento de estas.

Este modelo de predicción de las fisuras es tomado como referencia para las normativas del ACI a partir de 1999, pues se ha admitido que refleja mejor la realidad, al demostrarse que el de Gergely Lutz se aleja de esta, sobre todo, para recubrimientos mayores de $2,5$ pulgadas ($6,3cm$).

c) Breve análisis comparativo.

Partiendo de la base de que el cálculo del ancho de una grieta se convierte para el proyectista en un análisis complementario, indicado solo para casos especiales o cuando se estime la necesidad de una mejor comprensión del comportamiento del elemento, a continuación se comparan, de forma muy sencilla, ambas expresiones con vistas a bridar mas elementos de juicio en la selección de un procedimiento u otro.

La comparación se realiza para losas, donde no hay estribos y por tanto la separación de las barras para la expresión de Gergely Lutz puede plantearse como:

$$s = \frac{\left(\frac{a_f}{1,1 \cdot 10^{-5} \beta}\right)^3}{2d_c^2}$$

La de Frosch es más general y será:

$$s = 2 \sqrt{\left(\frac{a_f}{2 \frac{f_s}{E_s} \beta} \right)^2 - d_c^2}$$

En la figura 7,10 se comparan ambas expresiones variando la tensión del acero para un recubrimiento de 4cm, para una edificación situada en una zona con agresividad media.

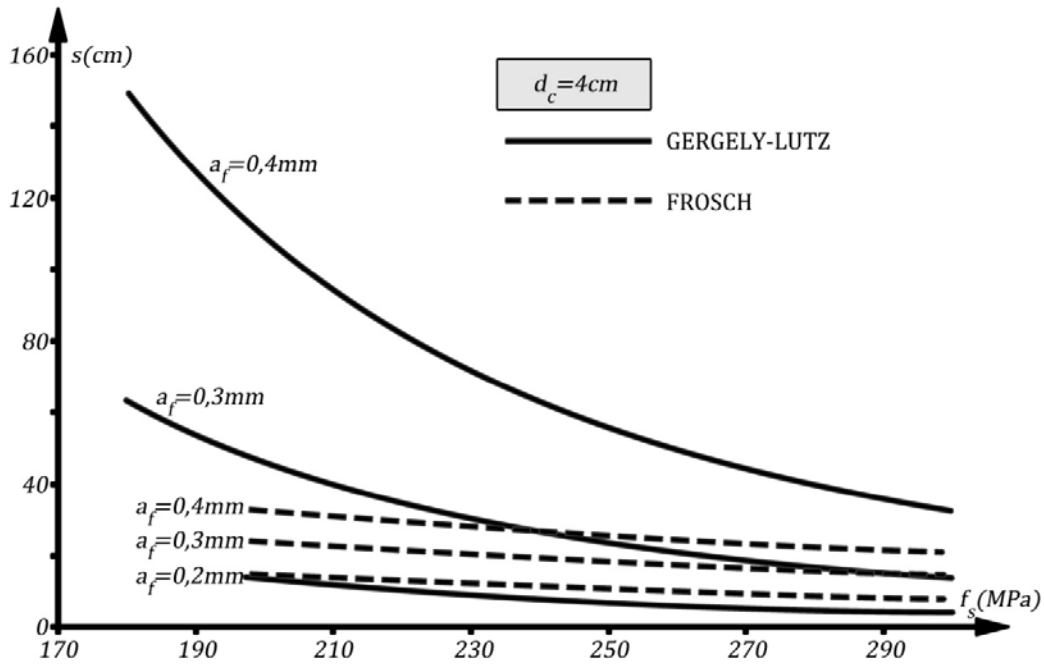


Figura 7,10: Comparación de expresiones para el cálculo del ancho de fisura. Variación de f_s .

En la figura 7,11 la comparación se produce variando el recubrimiento entre 3 y 8cm, considerando que $f_s = 280 \text{ MPa}$ aproximadamente $0,67 f_y$ cuando se emplea el acero G-60.

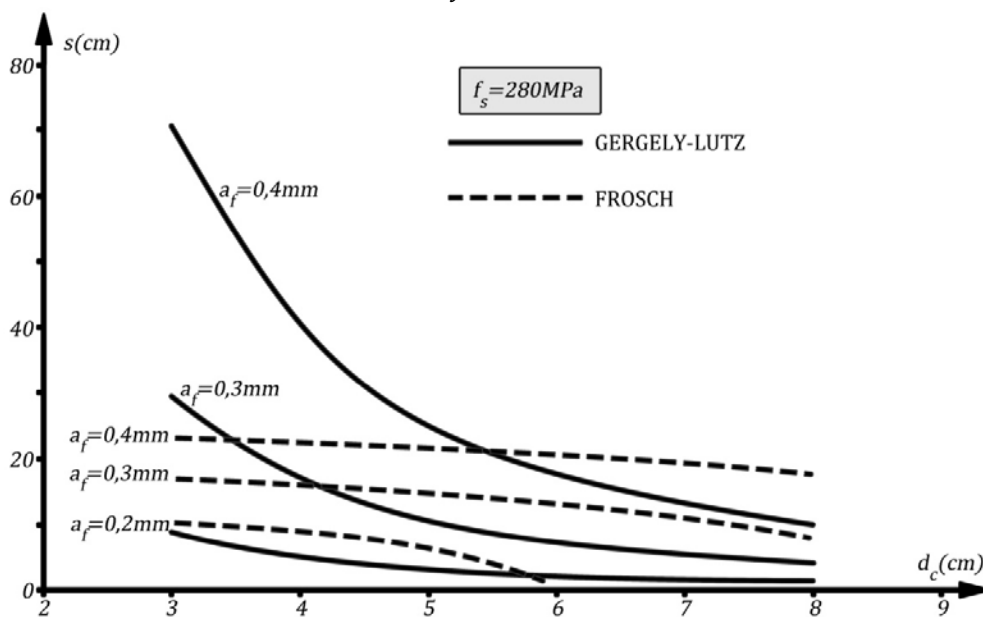


Figura 7,11: Comparación de expresiones para el cálculo del ancho de fisura. Variación de d_c .

El análisis de estas figuras permite adelantar algunas conclusiones:

- Las regulaciones del ACI-95 (Gergely Lutz) son muy conservadoras, lo que se demostró en epígrafes precedentes, pero que se hacen compatibles con un rigor bajo en las exigencias de las aberturas de fisuras máximos; $0,4 \text{ mm}$ para ambientes interiores y $0,3 \text{ mm}$ para ambientes exteriores, valores máximos establecidos en los reglamentos norteamericanos. Las normativas cubanas son mas exigentes en este campo obligando a aberturas máximas entre $0,35$ y $0,15 \text{ mm}$. Esto hace que el cumplimiento del reglamento se dificulte en vigas con refuerzo de mayor calidad y ductilidad. Indudablemente estas disposiciones no responden plenamente a las condiciones en Cuba.
- La expresión de Frosch, reconocida por el Comité ACI 224, responde mejor a los rangos de recubrimientos mas empleados en elementos a flexión, sobre todo para vigas que requieren estribos y diámetros mayores en las barras del refuerzo principal, por lo que hace que los valores de d_c superen los 6 cm . En la figura 7,11 puede apreciarse como para estos recubrimientos la expresión de Gergely Lutz es mucho mas conservadora y alejada de la realidad, según la comparación de la figura 7,7
- En la figura 7,10, donde se compara la influencia de la tensión en el acero principal, se muestra como para los anchos máximos mas comunes en Cuba siempre es más conservadora la expresión del ACI – 95. Si a esto se une que en el país se emplean habitualmente refuerzos G – 40, se confirman las conclusiones anteriores.

En resumen los autores recomiendan a los proyectistas cubanos el uso de la expresión de Frosch para el cálculo de la abertura de fisuras en vigas y losas en una dirección.

7.2.4 DISPOSICIONES DEL ACI 318-99 PARA EL CHEQUEO DE LA FISURACIÓN.

En la edición 1999 del Código del ACI se introdujo un cambio significativo en el chequeo de la fisuración dirigido fundamentalmente a limitar la separación entre las barras más próximas a la cara traccionada de la sección. Así se sustituye las disposiciones anteriores, que por medio del factor Z , se controlaba la abertura de grieta por un nuevo método que intenta controlar la fisuración superficial a un ancho que, en forma general, sea aceptable en la práctica, pero que puede variar ampliamente dentro de una estructura dada.

Esta separación máxima de la armadura depende solamente de la tensión en el acero f_s bajo cargas de servicio, y del recubrimiento libre c_c de la armadura de flexión a partir de la superficie traccionada más próxima y viene dada por la siguiente expresión:

$$s = 380 \left(\frac{280}{f_s} \right) - 2,5c_c$$

Pero no mayor que:

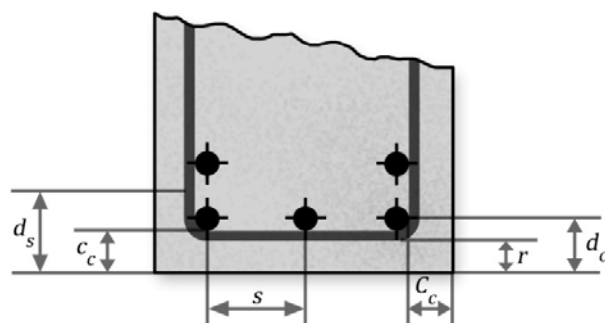
$$s = 300 \left(\frac{280}{f_s} \right)$$

Donde:

- s separación entre los centros de las barras de la armadura principal por flexión más cercana a la cara más traccionada, en mm

f_s tensión en la armadura calculada para las cargas de servicio (MPa). Se permite adoptar esta tensión igual a 60 por ciento de la tensión de fluencia especificada de la armadura.

c_c espesor del recubrimiento libre, medido desde la barra a la superficie mas traccionada, en mm. Ver figura 7,12



r recubrimiento neto (al estribo)

c_c recubrimiento a la cara acero principal

d_c recubrimiento mecánico (a la 1era camada)

d_s recubrimiento mecánico de todo el refuerzo principal

Figura 7,12 : Espaciamiento entre barras y recubrimientos para el control de la fisuración

Esta expresión es una simplificación de la propuesta por Frosch, evaluada para $f_s = 280\text{MPa}$ y $a_f = 0,44\text{mm}$ como se ilustra en la figura 7,13. Si bien se considera una tensión del refuerzo alta, propia del acero G-60, es muy poco exigente en el control del ancho de la grieta, en total correspondencia con el criterio de que este no es un factor clave en el control de la fisuración. Esto provoca que resulte poco probable que un elemento a flexión no cumpla esta restricción.

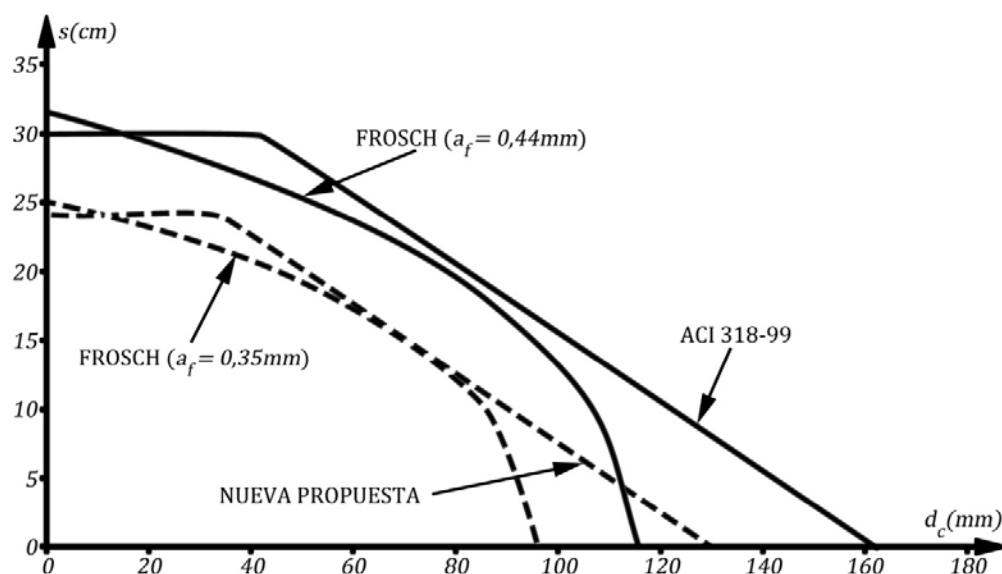


Figura 7,13: Disposiciones ACI 318-99. Ajustes a las condiciones cubanas

Tratando de aprovechar la enorme ventaja de la sencillez de las expresiones del ACI 318-99 y adecuándolas a las exigencias de ancho de grietas planteadas para las condiciones cubanas por la NC 250:04, podrían establecerse expresiones similares pero para una abertura de fisuras de $a_f = 0,35\text{mm}$. Esta simplificación se ilustra también en la figura 7,13. Entonces quedarían expresadas por la siguiente expresión:

$$s = 300 \left(\frac{280}{f_s} \right) - 2,5c_c$$

Pero no mayor que: $s = 250 \left(\frac{280}{f_s} \right)$

Finalmente algunas consideraciones sobre la tensión en el refuerzo principal (f_s) que es indudablemente el factor más influyente en la fisuración. Determinada a partir de la expresión siguiente:

$$f_s = \frac{M_k}{A_s(d - \frac{\chi}{3})}$$

En la que se evidencia que mientras menos dúctil sea la sección, mayor A_s y menor brazo, menor será f_s . Si se evalúa la validez de las diferentes simplificaciones propuestas para el cálculo de tensión del refuerzo o del brazo, reflejados en la figura 7,14, puede concluirse que:

- Considerar $f_s = 0,6f_y$ resulta solo válido para un cálculo aproximado, pues como se aprecia se aleja de los valores reales. Por otra parte está demostrado que con la disminución del factor de seguridad para secciones con tracción controlada esta tensión está alrededor de $0,67f_y$

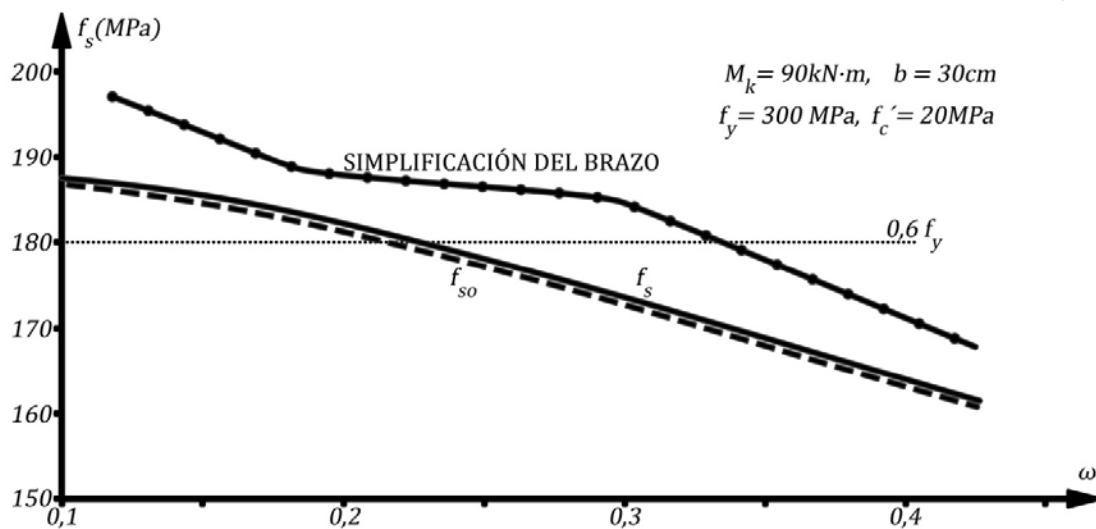


Figura 7,14: Comparación de procedimientos para calcular la tensión en el acero

- La simplificación del brazo, como propone la NC 53-39-97, resulta injustificable, pues no reporta mayor simplicidad en los cálculos y es conservadora.
- No considerar el aporte del refuerzo comprimido, f_{so} en el gráfico, es una buena opción pues sin afectar sensiblemente los resultados introduce una verdadera simplificación en los cálculos.

Ejercicio 7.2

Para la sección del epígrafe anterior compruebe la fisuración, recordando que la viga forma parte de una edificación construida “in situ” y con agresividad ambiental MEDIA, la abertura de fisura máxima será $a_f = 0,3 \text{ mm}$ y el recubrimiento es 40 mm . Se emplearán estribos N° 10 de $9,5 \text{ mm}$.

Cálculos y discusión

a) Chequeo de la fisuración. Aplicación de las expresiones del ACI 318-99.

Como se sabe estas expresiones no dependen de las condiciones del ambiente y el control no se realiza a través del ancho de fisura. Entonces se obtiene:

$$s_{max} = 380 \left(\frac{280}{f_s} \right) - 2,5c_c$$

Donde:

$$f_s = \frac{M_k}{A_s(d - \frac{x}{3})}$$

$$f_s = 272,63 \text{ MPa}$$

$$c_c = r + d_{be}$$

$$c_c = 40 + 9,5 = 49,5 \text{ mm}$$

$$s_{max} = 380 \left(\frac{280}{272,63} \right) - 2,5 \cdot 49,5 = 222,9 \text{ mm} = 22,29 \text{ cm}$$

Pero no debe ser mayor que: $s_{max} = 300 \left(\frac{280}{f_s} \right)$

$$s_{max} = 300 \left(\frac{280}{272,63} \right) = 308,1 \text{ mm} = 30,81 \text{ cm}$$

Predominando el 1er cálculo, por lo que $s_{max} = 22,29 \text{ cm}$

A continuación se calcula el espaciamiento real entre las barras:

$$s_{real} = \frac{b - 2c_c - n_b d_b}{n_b - 1}$$

$$s = \frac{30 - 2 \cdot 4,95 - 2 \cdot 2,54}{2 - 1} = 15,02 \text{ cm}$$

Valor que está por debajo del máximo permitido,

Si se emplearan las expresiones propuestas para las condiciones cubanas, que restringen el ancho de fisura a $0,35 \text{ mm}$ el espaciamiento máximo será:

$$s_{max} = 300 \left(\frac{280}{f_s} \right) - 2,5c_c$$

$$s_{max} = 300 \left(\frac{280}{272,63} \right) - 2,5 \cdot 49,5 = 184,4 \text{ mm} = 18,44 \text{ cm}$$

Pero no mayor que: $s_{max} = 250 \left(\frac{280}{f_s} \right) = 250 \left(\frac{280}{272,63} \right) = 256,6 \text{ mm} = 25,66 \text{ cm}$

Predominando $s_{max} = 18,44 \text{ cm}$ que como se aprecia es también mayor que el real, pero mas exigente

b) Cálculo de a_f . Utilizando la expresión de Gergely Lutz

Utilizando los cálculos realizados en el ejemplo anterior

$$d_c = \frac{d_b}{2} + r + d_{be}$$

$$d_c = \frac{25,4}{2} + 40 + 9,5 = 62,2 \text{ mm}$$

$$A_k = \frac{2d_s b}{n_b} = \frac{2 \cdot 62,2 \cdot 300}{2} = 18660 \text{ mm}^2$$

$$\beta = \frac{h_2}{h_1} = \frac{h - x}{d - x}$$

$$\beta = \frac{60-15,7}{53,78-15,7} = 1,163$$

finalmente:

$$a_f = 1,1 \cdot 10^{-5} \beta f_s^3 \sqrt{d_c A_k}$$

$$a_f = 1,1 \cdot 10^{-5} \cdot 1,163 \cdot 272,63^3 \sqrt{62,2 \cdot 18660} = 0,367 \text{ mm}$$

Comprobándose que $a_f > 0,3 \text{ mm}$ por lo que la sección se fisura mas de lo permisible.

c) Cálculo de a_f . Utilizando la expresión de Frosch

$$a_f = 2 \frac{f_s}{E_s} \beta \sqrt{d_c^2 + \left(\frac{s}{2}\right)^2}$$

$$a_f = 2 \frac{272,63}{200000} 1,163 \sqrt{62,2^2 + \left(\frac{150,2}{2}\right)^2} = 0,31 \text{ mm}$$

Como se esperaba menor que lo obtenido por la expresión anterior, pero que tampoco cumple con el ancho de grieta permisible

d) Soluciones alternativas.

Buscando alternativas que mejoren el comportamiento de la sección a la fisuración, deben evaluarse variantes con un mayor número de barras, respetando el valor del área de cálculo, $A_{real} = 9,69 \text{ cm}^2$

Se analizarán cuatro variantes:

VARIANTES

1	2 Φ 22, 1 Φ 16	$A_s = 9,73 \text{ cm}^2$
2	5 Φ 16	$A_s = 9,95 \text{ cm}^2$
3	2 Φ 20, 2 Φ 16	$A_s = 9,66 \text{ cm}^2$
4	8 Φ 13	$A_s = 10,32 \text{ cm}^2$

En la variante 4 se requieren situar el refuerzo en 2 camadas.

En la siguiente tabla se refleja el cálculo de cada variante:

TABLA 7,3: Variantes de armado de la sección

VARIANTE	1	2	3	4
$d_c \text{ (mm)}$	60,6	57,45	59,05	55,85
n_b	2,51	5	3,4	8
$A_k \text{ (mm}^2\text{)}$	14486,1	6894	10420,6	5141,2
$x \text{ (cm)}$	15,42	15,62	15,4	15,66
$f_s \text{ (MPa)}$	284,32	276,62	258,43	272,96
β	1,157	1,149	1,153	1,183
$a_f \text{ (mm) (G-L)}$	0,347	0,257	0,308	0,234
$a_f \text{ (mm) (Frosch)}$	0,255	0,189	0,215	0,198

Se aprecia que todas las variantes son mejores que la anterior en su respuesta a la fisuración, pero solo la segunda y cuarta satisfacen los requisitos exigidos de acuerdo a lo normado por el ACI

318-95. Los anchos de fisuras calculados por la expresión de Frosch cumplen en todas las alternativas.

7,3 DEFORMACIÓN

Como Estado Límite de Utilización el control de las deflexiones o flechas en vigas tiene que ver con el funcionamiento de estas. Los criterios que rigen este funcionamiento en cuanto a la deformabilidad, de acuerdo a Medina y Ruiz, son:

- *Sensoriales.* Aceptabilidad a los sentidos
 - Efectos táctiles
 - Efectos auditivos
 - Efectos visuales
- *Servicios estructurales.*
 - Cubiertas
 - Entrepisos en laboratorios, almacenes, etc.
 - Soportes tecnológicos
- *Servicios no estructurales*
 - Carpintería
 - Cielo rasos
 - Cristalería
 - Tabiquería ligera

Estos autores proponen la siguiente clasificación de las deformaciones que se originan en el hormigón armado:

- Dependientes de la tensión: instantáneas ó diferidas
- Independientes de la tensión: termo higrométricas, retracción
- Reversibles o irreversibles
- En función del tipo de solicitación:
 - Alargamiento o acortamiento (cargas axiales)
 - Deflexiones o flechas (flexión)
 - Distorsión por corte (cortante)
 - Desplazamiento en los apoyos
 - Desplazamiento por cambios de temperatura
 - Desplazamientos por fluencia o retracción
 - Desplazamiento de la estructura en su conjunto o de un pórtico.

Estos últimos desplazamientos revisten singular importancia en el diseño de estructuras de hormigón armado y se controlan a partir de la medición de los desplazamientos instantáneos bajo cargas horizontales, viento o sismo principalmente.

Las deformaciones provocadas por la temperatura, retracción o fluencia se controlan indirectamente y tienen mayor importancia en elementos de hormigón pretensado y al analizar las estructuras integralmente pues pueden provocar tensiones no previstas en algunas de sus partes.

7.3.1 CONTROL DE FLECHAS

Este capítulo se dedicará al control de las flechas o deformaciones por flexión en losas o vigas. Los factores que tienen mayor influencia en su desarrollo son:

- *Longitud del elemento o luz.*
Es el factor que decide que tipo de elemento utilizamos para salvar una distancia horizontal. La relación peso/luz y la deformabilidad son claves en escoger la opción a emplear, algunas de ellas pueden ser:
 - Viga de HA
 - Viga de HP
 - Viga de sección variable
 - Arcos
 - Armaduras
 - Cáscaras
 - Estructuras colgantes
- *Condiciones de apoyo. Continuidad.*
Una vez escogido el tipo de elemento, las condiciones de apoyo contribuyen notablemente al control de la flecha. Las vigas continuas son una formidable respuesta en esta dirección
- *Tipo de carga.*
El tipo y la posición de la carga en el elemento influyen en la magnitud de la flecha.
- *Calidad del hormigón*
La resistencia del hormigón influye a través del modulo de deformación $E_c = 4700\sqrt{f'_c}$
- *Características geométricas de la sección*
Son factores sobre los que el proyectista puede ejercer un mayor control, buscando incrementar la inercia de la sección, lo que puede lograrse por distintas vías:
 - El incremento del peralte de la sección
 - La selección de formas mas eficientes y con gran inercia, como las I o las T
 - La cantidad y colocación del refuerzo
- *Grado de fisuración de la sección*
El agrietamiento de la sección reduce la inercia de la sección y por tanto su deformabilidad. Por esto la fisuración y la deformación son fenómenos estrechamente vinculados y deben evaluarse de forma conjunta.
- *Efecto del pretensado*
El pretensado no solo contribuye a que la sección no se fisure, sino que introduce fuerzas que provocan contraflechas.

7.3.2 FLECHAS PERMISIBLES

La Norma Cubana N.C. 053-039-1997 plantea dos alternativas para el control de las deflexiones.

1. *Para las vigas y losas de HA no ligadas a otros elementos estructurales*
Se admite no calcular la flecha siempre que se coloquen peraltos superiores a los indicados en la tabla 7,4
2. *Para las vigas y losas no contempladas en el caso anterior.*

Debe calcularse la flecha y comprobar que no exceda los valores normados en la tabla 7,5.

TABLA 7,4: Valores de h mínimos por deformación (en función de la luz del elemento, L)

ELEMENTO	Peralto Total mínimo <i>h</i>							
	Simplemente apoyada		Un extremo continuo		Ambos extremos continuos		En voladizo	
	Elementos que no soportan o están unidos a divisiones u otro tipo de elementos que puedan dañarse por deflexiones grandes							
<i>f_y (MPa)</i>	<i>280</i>	<i>420</i>	<i>280</i>	<i>420</i>	<i>280</i>	<i>420</i>	<i>280</i>	<i>420</i>
Losas macizas reforzadas en una sola dirección	<i>L/25</i>	<i>L/20</i>	<i>L/30</i>	<i>L/23</i>	<i>L/35</i>	<i>L/26</i>	<i>L/12,5</i>	<i>L/10</i>
Vigas o losas con nervios en una dirección	<i>L/20</i>	<i>L/16</i>	<i>L/24</i>	<i>L/18,5</i>	<i>L/28</i>	<i>L/21</i>	<i>L/16</i>	<i>L/8</i>

TABLA 7,5: Flechas máximas permisibles en edificaciones (en función de la luz del elemento, L)

Tipo de elemento	Flecha considerada	Flecha limite
Azoteas planas que no soportan ni están ligadas a elementos no estructurales que pueden ser dañados por flechas excesivas.	Flecha instantánea debida a la carga viva L	$L/180$
Entrepisos que no soportan ni están ligados a elementos no estructurales que puedan ser dañados por flechas excesivas.	Flecha instantánea debida a la carga viva L	$L/360$
Sistema de entrepiso o azotea que soportan o están ligados a elementos no estructurales susceptibles de ser dañados por flechas excesivas	La parte de de la deflexión total que ocurre después de la construcción de los elementos no estructurales, o sea la suma de las deflexiones a largo plazo como consecuencia de todas las cargas sostenidas y las deflexiones instantáneas que ocasiona cualquier carga viva adicional	$L/480$
Sistema de entrepiso o azotea que soporta o están ligados a elementos no estructurales no susceptibles de ser dañados por flechas excesivas.		$L/240$
Vigas soportes de puentes-grúas <ul style="list-style-type: none"> ○ Grúas operadas a mano. ○ Grúas eléctricas. 	Deflexión total	$L/500$ $L/600$

Otros elementos especiales, no contemplados en la tabla, se tomaran de la literatura especializada correspondiente.

7.3.3 FLECHAS INSTANTÁNEAS.

El cálculo de las flechas en elementos de HA se realiza por los mismos procedimientos que para materiales elásticos. Generalizando puede plantearse que la flecha depende de la luz, tipo de carga y de apoyo, y de la rigidez de la sección.

De forma genérica, y según la teoría de elasticidad, una deformación se calcula según las expresiones:

$$\Delta = K \frac{qL^4}{EI} \quad \text{ó} \quad \Delta = K \frac{PL^3}{EI} \quad \text{ó} \quad \Delta = K \frac{ML^2}{EI}$$

Según sea carga distribuida, concentrada o momento respectivamente.

Donde:

- L luz a cubrir del elemento
- E modulo de deformación del material, para el caso del hormigón es igual a
 $E_c = 4700\sqrt{f'_c}$ (en MPa)
- K coeficiente que evalúa las condiciones de apoyo del elemento. En las tablas A-4 de los anexos se muestran los valores empleando en la expresión de cálculo de la flecha el momento flector actuante, M
- I inercia de la sección,

7.3.4 RIGIDEZ EFECTIVA DE LA SECCIÓN FISURADA.

Es en el cálculo de I o I_e , la inercia efectiva, que se introduce las características del hormigón armado como material compuesto y se considera la influencia de la fisuración de la sección. Pueden diferenciarse dos casos:

1er caso: $M_k \leq M_{cr}$

La sección no se ha fisurado por lo que:

$$f_t < f_r = 0,62\sqrt{f'_c}$$

$$I_e = I_h$$

Obteniéndose I_h para la sección transformada como se indicó en el epígrafe 7,11

2do caso: $M_k > M_{cr}$

La sección está fisurada, pierde su carácter homogéneo y se reduce su rigidez en la medida que el valor de M_k sobrepase el momento de fisuración M_{cr}

Si se analiza el fenómeno en una curva M vs Δ , como se muestra en la figura 7,15, se destaca que en la zona del gráfico bajo las cargas de servicio:

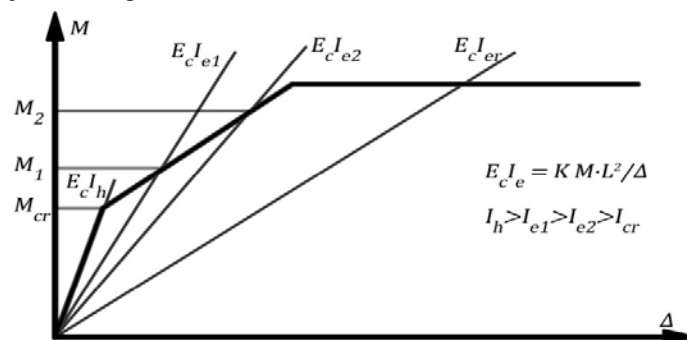


Figura 7,15: Variación de la rigidez de la sección de HA en función de la fisuración

Donde I_{cr} es la inercia de la sección cuando se encuentra totalmente fisurada por debajo de la línea neutra, valor extremo y teórico que se alcanza fuera de la zona de las cargas de servicio.

Con el apoyo de la figura 7,16 puede calcularse I_{cr} por la expresión:

$$I_{cr} = \frac{1}{3}bx^3 + n \cdot A_s(d - x)^2 + (n - 1)A_s'(x - d')^2$$

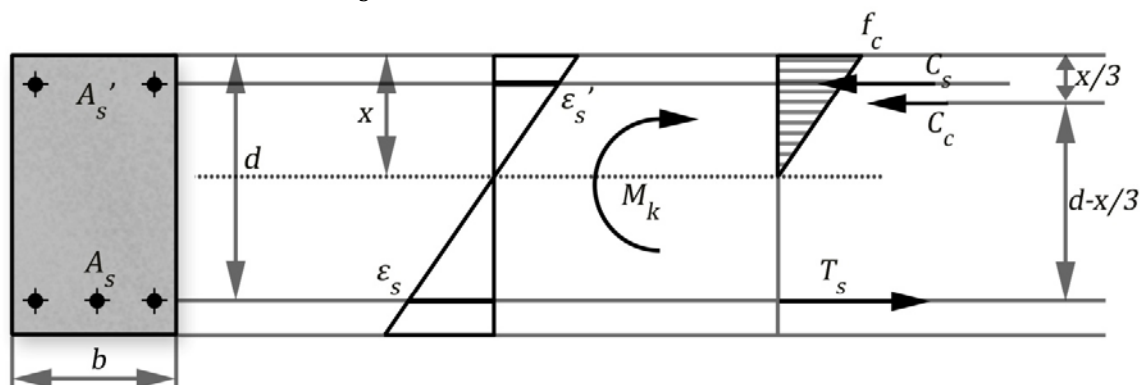


Figura 7,16 Sección fisurada

Entonces finalmente, para calcular la inercia efectiva de la sección I_e , valor que está entre I_h e I_{cr} , el ACI propone la siguiente expresión empírica:

$$I_e = I_{cr} + \left(\frac{M_{cr}}{M_k} \right)^3 (I_h - I_{cr}) < I_h$$

A lo largo de un elemento continuo o simplemente apoyado, el momento flector va variando y por tal razón varía también el momento de inercia efectivo, como se aprecia en la figura 7,17. Por ello, las relaciones presentadas inicialmente para la determinación de las flechas no pueden ser utilizadas directamente pues los elementos son de inercias variables.

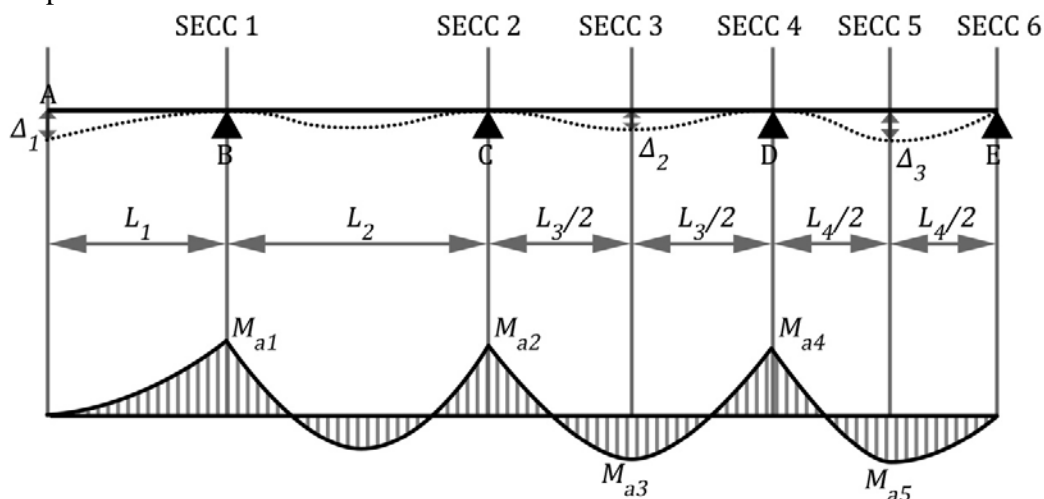


Figura 7,17: Inercia efectiva en vigas continuas.

Para superar esta situación, el código ACI propone que el momento de inercia efectivo de un miembro continuo sea igual al promedio de las inercias efectivas de la sección de mayor momento positivo y la de mayor momento negativo. Para elementos prismáticos simplemente apoyados, el

momento de inercia efectivo será el correspondiente a la sección central, y para los voladizos, el momento de inercia en el apoyo.

Alternativamente, se puede emplear las siguientes expresiones para determinar la inercia efectiva en elementos continuos en uno dos extremos:

a) Para vigas en ambos extremos continuos:

$$I_e = 0,7I_{em} + 0,15(I_{e1} + I_{e2})$$

b) Para vigas con un extremo continuo:

$$I_e = 0,85I_{em} + 0,15I_{e1}$$

donde:

I_e : Inercia efectiva promedio

I_{em} : I_e en la sección central de la luz

I_{e1}, I_{e2} : I_e en los respectivos extremos de la viga

Si se recurre a este enfoque, para la viga de la figura 7.16, se procedería de la siguiente manera:

- Para determinar Δ_2 (flecha en el centro de la luz de la viga **CD**, cuyos dos extremos son continuos):

$$I_{em} = I_{cr3} + \left(\frac{M_{cr3}}{M_{a3}}\right)^3 (I_{h3} - I_{cr3}) < I_{h3} \quad \text{Evaluado todo en la sección 3, la central}$$

$$I_{e1} = I_{cr2} + \left(\frac{M_{cr2}}{M_{a2}}\right)^3 (I_{h2} - I_{cr2}) < I_{h2} \quad \text{Evaluado todo en la sección 2, una de las secciones extremas de la viga}$$

$$I_{e2} = I_{cr4} + \left(\frac{M_{cr4}}{M_{a4}}\right)^3 (I_{h4} - I_{cr4}) < I_{h4} \quad \text{Evaluado todo en la sección 4, la segunda sección extrema de la viga}$$

$$I_e = 0,7I_{em} + 0,15(I_{e1} + I_{e2})$$

- Para determinar Δ_3 (flecha en el centro de la luz de la viga **DE**, con sólo un extremo continuo):

$$I_{em} = I_{cr5} + \left(\frac{M_{cr5}}{M_{a5}}\right)^3 (I_{h5} - I_{cr5}) < I_{h5} \quad \text{Evaluado todo en la sección 5, la central}$$

$$I_{e2} = I_{cr4} + \left(\frac{M_{cr4}}{M_{a4}}\right)^3 (I_{h4} - I_{cr4}) < I_{h4} \quad \text{Evaluado todo en la sección 4, la única sección continua de la viga}$$

$$I_e = 0,85I_{em} + 0,15I_{e1}$$

Para cálculos aproximados se puede trabajar, en vigas continuas, con el valor correspondiente de I_e del centro de la luz.

7.3.4 FLECHAS DIFERIDAS

Es conocido que el hormigón se deforma diferidamente bajo la acción de cargas sostenidas, la fluencia, efecto que se produce también en elementos de HA, pese a que el acero no se comporte de la misma manera. El mecanismo de la fluencia en vigas no está completamente explicado, por lo que los análisis se basan en los resultados de la experimentación. El ACI acepta la expresión de Branson que depende del tiempo de aplicación de la carga y de la cuantía del refuerzo comprimido. Concretamente:

$$\lambda = \frac{T}{1 + 50\rho'}$$

Donde:

ρ' Cuantía geométrica del refuerzo en compresión, en el centro de la luz para vigas simples o

continuas y en el apoyo para los voladizos.

T Factor dependiente del tiempo de permanencia de la carga y cuyos valores se muestran en la figura 7,18. También pueden tomarse:

5 años o más	2
12 meses	1,4
6 meses	1,2
3 meses	1

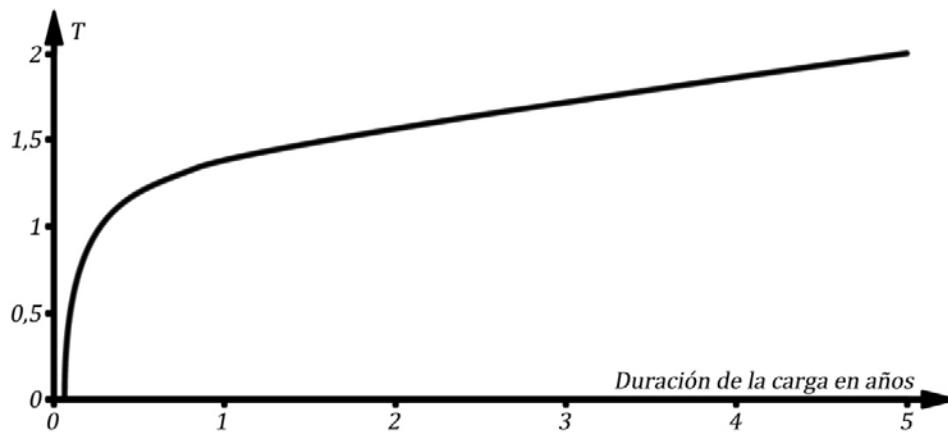


Figura 7,18 Factor T , dependiente de la duración de la carga

Finalmente la flecha diferida será:

$$\Delta = \lambda \Delta_i$$

Donde Δ_i es la flecha instantánea.

7.3.5 FLECHA TOTAL

Como realmente sobre una viga se combinan las acciones de cargas de larga y corta duración la norma cubana establece para el cálculo de la flecha total la siguiente expresión:

$$\Delta_{tot} = \Delta_{te} + \lambda_{\infty} \Delta_p + \lambda_t \Delta_{tld}$$

Donde:

Δ_p flecha instantánea debido a las cargas permanentes M_{CP} , la inercia de la sección será I_{e1}

$$I_{e1} = I_{cr} + \left(\frac{M_{cr}}{M_{CP}} \right)^3 (I_h - I_{cr}) < I_h$$

Δ_{tld} flecha instantánea debido a las cargas temporales de larga duración

$$\Delta_{tld} = \Delta_{ptld} - \Delta_p$$

Δ_{ptld} flecha instantánea debido a las cargas permanentes y temporales de larga duración, $M_1 = M_{CP} + M_{CUld}$, la inercia de la sección será I_{e11}

$$I_{e11} = I_{cr} + \left(\frac{M_{cr}}{M_1} \right)^3 (I_h - I_{cr}) < I_h$$

Δ_{te} flecha instantánea debido a las cargas temporales de corta duración

$$\Delta_{te} = \Delta_{pt} - \Delta_{ptld}$$

Δ_{pt} flecha instantánea debido a las cargas totales permanentes y temporales,

$M_2 = M_k = M_{CP} + M_{CU}$, la inercia de la sección será I_{e2}

$$I_{e2} = I_{cr} + \left(\frac{M_{cr}}{M_2}\right)^3 (I_h - I_{cr}) < I_h$$

λ_∞ Coeficiente que toma en cuenta la fluencia de la viga bajo los efectos de cargas sostenidas indefinidamente

λ_t Coeficiente que toma en cuenta la fluencia de la viga bajo los efectos de cargas sostenidas en un tiempo t dado.

Como se aprecia la expresión de flecha total parte del supuesto de que la carga permanente y la de uso puedan tener duraciones diferentes en su permanencia en el tiempo, situación más general. Si se considera que la carga de uso de larga duración actúa indefinidamente sobre la viga, entonces el coeficiente de fluencia sería uno solo y la flecha total podría calcular de forma más sencilla por la siguiente expresión:

$$\Delta_{tot} = \Delta_{te} + \lambda_\infty \Delta_{ptld}$$

En la figura 7,18 se expresan, de forma esquemática, la relación entre el momento actuante, la inercia efectiva y la flecha instantánea, lo que nos permite comprender el fenómeno más integralmente.

Una mayor sencillez en los cálculos se logra si, conservadoramente, se considera el valor de I_{e2} para obtener todas las flechas y obtener cada una por una simple relación lineal como propone Nilson. Esta simplificación sobreestima la flecha de larga duración y por tanto la flecha total, como se aprecia en la figura 7,19

$$\Delta_{ptld}' = \Delta_{pt} \frac{M_1}{M_2}$$

$$\Delta_{te}' = \Delta_{pt} \frac{M_{CUld}}{M_2}$$

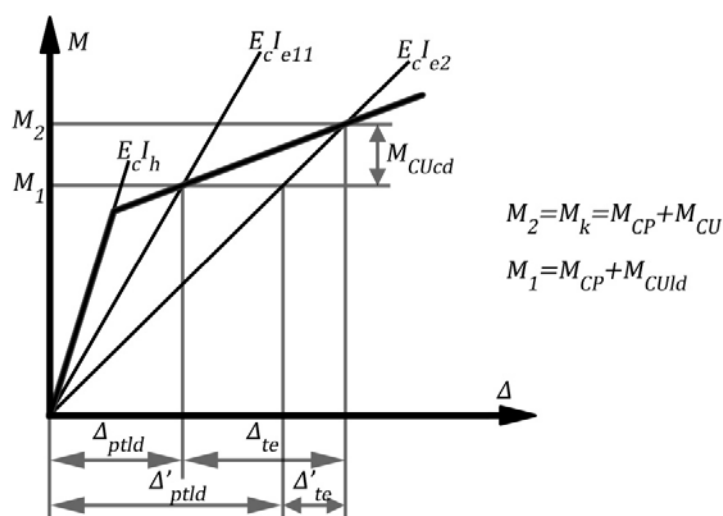


Figura 7,19: Flechas instantáneas. Versión simplificada de Nilson

Ejercicio 7.3

La sección de la viga, que se ha venido analizando en los anteriores epígrafes del capítulo, forma parte de un entrepiso que soporta tabiques ligeros y cubre cristalería y carpintería sensibles a deflexiones excesivas. Además como datos complementarios.

$$\begin{aligned} L &= 6m && \text{empotrada - apoyada} \\ M_{CU} &= 80kNm && , 50\% \text{ de larga duración} \\ M_{CP} &= 55kNm \end{aligned}$$

¿Satisface la viga los criterios límites de deformación?

Cálculos y discusión**a) Cálculo de la flecha permisible**

Con el auxilio de la TABLA 7,3, para las condiciones planteadas en el problema, la flecha permisible es:

$$\begin{aligned} \Delta_{perm} &= \frac{L}{480} \\ \Delta_{perm} &= \frac{600}{480} = 1,25cm \end{aligned}$$

b) Cálculo de las flechas instantáneas

Del ejemplo anterior se selecciona la sección con 5 barras N° 16, cuyas características geométricas son:

$$\begin{aligned} I_h &= 608990,3cm^4 && M_{cr} = 57,72kNm \\ E_c &= 21019MPa && x = 15,62cm \end{aligned}$$

Calculando I_{cr}

$$\begin{aligned} I_{cr} &= \frac{1}{3}bx^3 + n \cdot A_s(d-x)^2 + (n-1)A_s'(x-d')^2 \\ I_{cr} &= \frac{1}{3}(30 \cdot 15,62^2 + 9,52 \cdot 9,95(54,25-15,62)^2 + (9,51-1)3,98(15,62-5,75)^2) \\ I_{cr} &= 179429,8cm^4 \end{aligned}$$

- Flechas de larga duración

$$M_1 = M_{CP} + 0,5M_{CU}$$

$$M_1 = 55 + 40 = 95kNm > M_{cr}$$

$$I_{e11} = I_{cr} + \left(\frac{M_{cr}}{M_1}\right)^3 (I_h - I_{cr}) < I_h$$

$$I_{e11} = 179429,5 + \left(\frac{57,72}{95}\right)^3 (608990,3 - 179429,5)$$

$$I_{e11} = 274765,7cm^4 < I_h$$

$$\Delta_{ptld} = K \frac{M_1 L^2}{E_c I_{e11}}$$

donde $K = \frac{1}{13}$, para vigas empotrada – apoyada, en la Tabla A-4 de los anexos.

$$\Delta_{ptld} = \frac{1}{13} \frac{9500 \cdot 600^2}{21019 \cdot 274765,7} = 0,456cm$$

- Flechas de corta duración

$$M_2 = M_{CP} + M_{CU}$$

$$M_2 = 55 + 80 = 135 \text{ kNm} > M_{cr}$$

$$I_{e2} = I_{cr} + \left(\frac{M_{cr}}{M_2}\right)^3 (I_h - I_{cr}) < I_h$$

$$I_{e2} = 179429,5 + \left(\frac{57,72}{135}\right)^3 (608990,3 - 179429,5)$$

$$I_{e2} = 212657,7 \text{ cm}^4 < I_h$$

$$\Delta_{pt} = K \frac{M_2 L^2}{E_c I_{e2}}$$

$$\Delta_{ptld} = \frac{1}{13} \frac{13500 \cdot 600^2}{2101,9 \cdot 212657,7} = 0,836 \text{ cm}$$

$$\Delta_{te} = \Delta_{pt} - \Delta_{ptld}$$

$$\Delta_{te} = 0,836 - 0,456 = 0,381 \text{ cm}$$

c) *Flechas total*

$$\Delta_{tot} = \Delta_{te} + \lambda_{\infty} \Delta_{ptld}$$

donde:

$$\lambda = \frac{T}{1 + 50\rho'}$$

$$\rho' = \frac{A_s'}{bd}$$

$$\rho' = \frac{3,98}{30 \cdot 54,25} = 0,0024$$

$$\lambda = \frac{2}{1 + 50 \cdot 0,0024} = 1,78$$

$$\Delta_{tot} = 0,381 + 1,78 \cdot 0,456 = 1,19 \text{ cm} < \Delta_{perm}$$

d) *Cálculo aproximado*

Considerando un solo valor de inercia efectiva I_{e2}

$$\Delta_{ptld}' = \Delta_{pt} \frac{M_1}{M_2}$$

$$\Delta_{ptld}' = 0,836 \frac{95}{135} = 0,588 \text{ cm}$$

$$\Delta_{te}' = \Delta_{pt} \frac{M_{cuid}}{M_2}$$

$$\Delta_{te}' = 0,836 \frac{40}{135} = 0,248 \text{ cm}$$

$$\Delta_{tot} = \Delta_{te} + \lambda_{\infty} \Delta_{ptld}$$

$$\Delta_{tot} = 0,248 + 1,78 \cdot 0,588 = 1,29 \text{ cm} > \Delta_{perm}$$

Valor lógicamente mayor que el anterior pues se sobrestima la flecha instantánea debido a las cargas de larga duración las que al afectarse por λ , provocan un incremento de la flecha total. Nótese como el procedimiento aproximado y más simple brinda un valor que sobrepasa la flecha permisible.

7.3.6 ANÁLISIS DE VARIABLES

Seguidamente se analiza la influencia de los factores que deciden la magnitud de la flecha en una viga con la luz, la carga y las condiciones de apoyo dada.

- *Peralto de la sección*

Es el elemento clave y decisivo por su influencia en la inercia efectiva de la sección. En la figura 7,20 se aprecia esta dependencia al comparar los valores de I_h , I_{cr} e I_e . Nótese como para las secciones menos peraltadas no se cumple el criterio de deflexión límite.

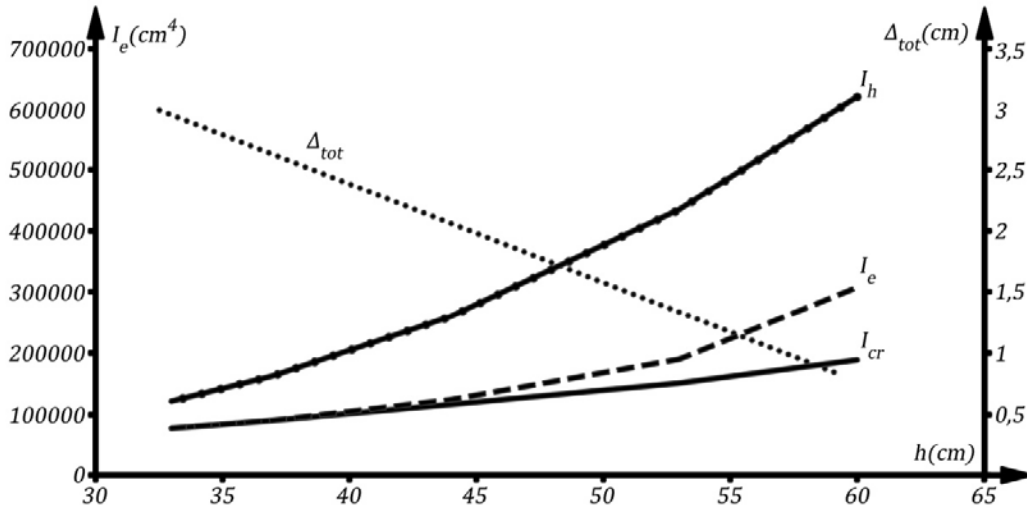


Figura 7,20: Influencia en la flecha total del peralto de la sección

- *Ancho y resistencia del hormigón.*

Ambos son factores importantes que contribuyen a la rigidez de la sección. Esta influencia se aprecia en las figuras 7,21 y 7,22.

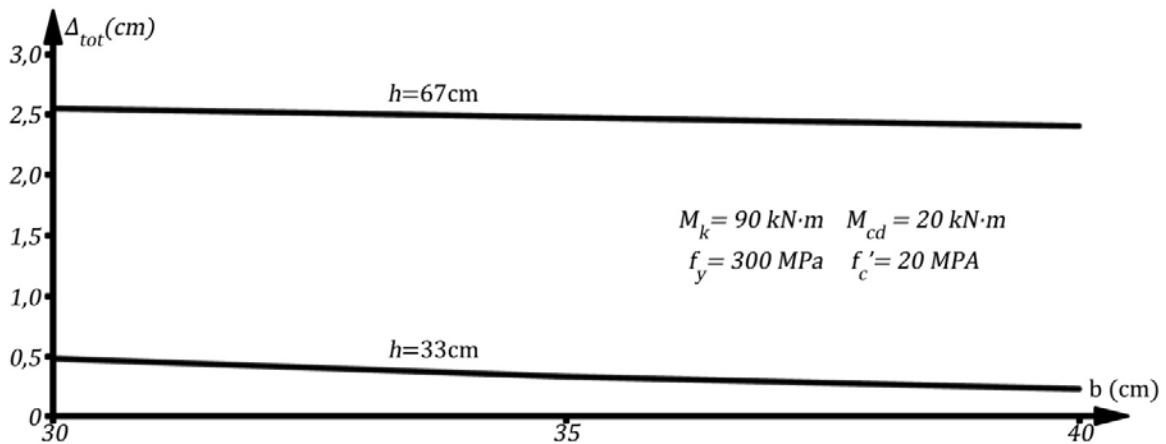


Figura 7,21: Influencia en la flecha total del ancho de la sección

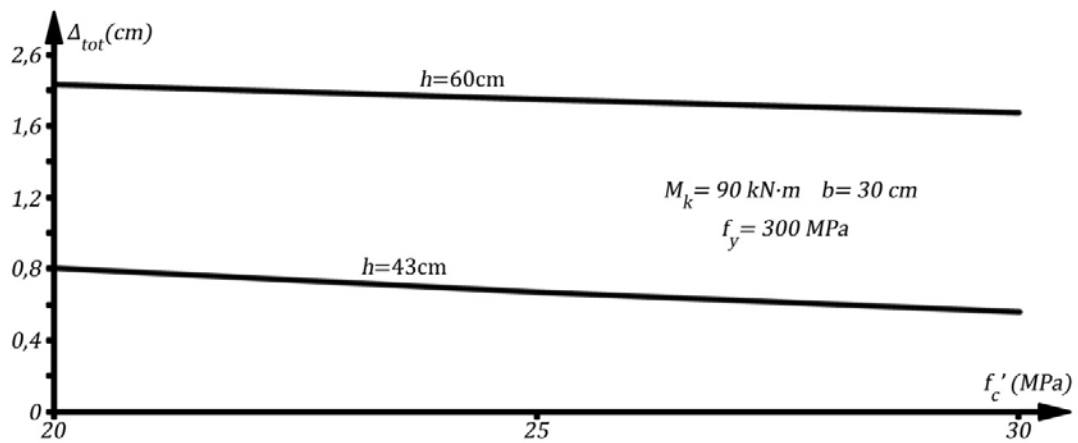


Figura 7,22: Influencia en la flecha total de la resistencia del hormigón

- *Acero a compresión*

La influencia fundamental está en el coeficiente λ , que valora la fluencia de la viga. Además influye favorablemente al incrementar la inercia efectiva de la sección

EJERCICIOS PROPUESTOS

- 1) Se ha diseñado una sección sometida a un momento flector debido a los cargas permanentes de 400 kN.m y de 500 kN.m por el efecto de los cargas de uso. Tiene un ancho de 40 cm y peralte total de 120 cm y ha sido reforzada con 8 barras N° 25. El hormigón es de $f'_c = 20 \text{ MPa}$ y el refuerzo con $f_y = 300 \text{ MPa}$

Si las vigas son interiores en un ambiente de agresividad MEDIA

- Compruebe la fisuración de la sección empleando la expresión simplificada
 - Obtenga a_f utilizando la expresión de Gergely – Lutz
 - Calcule el valor de a_f utilizando la expresión de Frosch
 - Compare los resultados por estos procedimientos y coméntelos
- 2) La solución anterior ¿es válida para un ambiente de agresividad ALTA?. Proponga soluciones alternativos para asegurar que $a_f < a_{fk}$
- 3) Para las mismas cargas del ejercicio 1 se prefirió una solución alternativa con $h = 95 \text{ cm}$ y 11 barras N° 25
- ¿Es esta variante mejor o peor que la anterior desde el punto de vista de la fisuración? Argumente su respuesta
 - Calcule el valor de a_f utilizando la expresión de Gergely – Lutz
 - Calcule el valor de a_f utilizando la expresión de Frosch
 - ¿Cumple los requisitos de fisuración para un ambiente agresivo? De no resultar permisible, proponga una nueva solución comprobando los resultados

- 4) Para la siguiente sección

$$b = 30 \text{ cm}$$

$$f'_c = 25 \text{ MPa}$$

$$h = 70 \text{ cm}$$

$$f_y = 300 \text{ MPa}$$

$$A_s' = 2 \text{ barras N° 16}$$

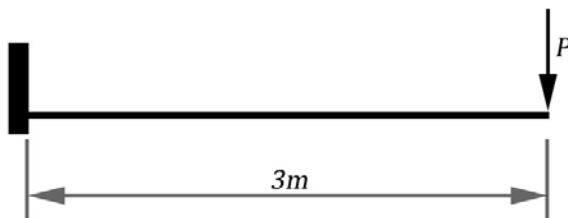
$$A_s = 3 \text{ barras N° 32}$$

- Calcule la abertura de fisura
- ¿Para que características del elemento resulta permisible?
- Proponga medidas a adoptar para que satisfaga la condición de $a_f < 0,2 \text{ mm}$

5) Obtenga el máximo valor de P para la que la viga de la figura 7,23 no sobrepase una abertura de fisura de $0,2 \text{ mm}$ utilizando el procedimiento de Frosch

$$b = 40 \text{ cm}$$

$$h = 80 \text{ cm}$$



$$A_s' = 2 \text{ barras N° 16}$$

$$A_s = 8 \text{ barras N° 25}$$

$$f'_c = 25 \text{ MPa}$$

$$f_y = 300 \text{ MPa}$$

Figura 7,23 Ejercicio propuesto 5

- 6) Calcule la flecha de la sección del ejercicio 1 si esta forma parte de una viga de 8 m de luz simplemente apoyada
- Considere que $A_s' = 2 \text{ barras N° 16}$ y $M_{CU} = 200 \text{ kN} \cdot \text{m}$

¿Cumple esta flecha con los valores permisibles?

- 7) Con vista a reducir el valor de la flecha se adoptan las siguientes medidas
- a) Construir la viga con la sección del ejercicio 3
 - b) Incrementar el refuerzo A_s'
 - c) Reducir el valor de f_c'
 - d) Convertir los apoyos en empotramientos

Evalúe cada una de las soluciones y comente su validez

- 8) Compruebe si la viga del ejercicio 5 cumple los requerimientos de flecha máxima
Considere que el 50% de P se debe a cargas de uso y que estas son de corta duración.

BIBLIOGRAFÍA CONSULTADA

1. American Concrete Institute. Building Code Requirements for Reinforced Concrete, ACI 318 – 02, Detroit, Michigan. 2005
2. ACI 318 02 Requisitos para Hormigón Estructural. PCA 2002.
3. Babe Ruano M. “Elementos de Estructura de Hormigón Armado”. Tomo I. Editorial Pueblo y Educación. la Habana. Cuba 1978
4. Babe Ruano M. “Hormigón Armado para Arquitectos”. Editorial ISPJAE 1986
5. Fernández S. “Análisis de la fisuración en vigas de hormigón armado “.Tesis en opción al grado de doctor en Ciencias. 1995
6. Medina Torri F.; Ruiz Alejo L. “Hormigón Estructural 1” Editorial Pueblo y Educación 1991. La Habana. Cuba. 1991
7. Nawy, E. (1988). “Concreto Reforzado. Un enfoque básico”. Ed. Prentice-Hall Inc. México. 1988
8. N.C. 053–039–1997. Obras de Hormigón Armado. Principios Generales y Métodos de Cálculo. 1997
9. N.C. 250–2004. Requisitos de durabilidad para el diseño y construcción de Edificaciones y Obras Civiles de hormigón estructural. 2004
10. Nilson, H. A. Diseño de Estructuras de Concreto Presforzado. México: Ed. Limusa, 1999
11. Park, R. y T, Paulay. Estructuras de Concreto Reforzado. México: Ed. Limusa, 1979

CAPÍTULO 8

Adherencia, anclaje y distribución del refuerzo

8,1 INTRODUCCIÓN

Todo proyecto civil exige que se respete la correspondencia entre la forma en que se concibe la estructura atendiendo a sus características y a las del terreno donde irá a colocarse, las hipótesis y los modelos de cálculo que se siguieron hasta llegar a la ingeniería de detalle, y su ejecución; todo ello procurando una atinada correlación entre la concepción, el cálculo y las disposiciones constructivas que se adoptaron. Para lograrlo es indispensable un efectivo control durante la ejecución de la obra, de manera que se garanticen las propuestas básicas adoptadas por el proyectista.

En capítulos anteriores se introdujo el análisis de secciones de vigas evaluando tanto la capacidad resistente de la sección, como el cumplimiento de requisitos de funcionamiento ante la fisuración y las deformaciones. Se impone entonces otra problemática ¿Cómo constructivamente se concreta el diseño estructural?

Por ejemplo en una viga continua ¿cuales son los retos en este sentido?

- Garantizar el anclaje y la adherencia de las barras. En elementos de hormigón armado se parte como hipótesis de que la deformación del acero es igual a la del hormigón que la envuelve lo que supone una buena adherencia entre ambos.
- Una distribución de las barras en la sección transversal que asegure adherencia, protección y facilite el hormigonado.
- El empalme entre las barras si la viga es superior a las longitudes de estas
- El despiezo y cortes de barras para aprovechar mejor la capacidad resistente de la sección y alcanzar un diseño racional

Es notorio que muchos elementos fallan por errores en las disposiciones constructivas, aspecto ocasionalmente subestimado y donde se da terminación a lo iniciado en un buen diseño

8,2 ANCLAJE DE LAS ARMADURAS

Como se ha estado explicando, no porque se haga un buen diseño resistente de la viga se evitará la posibilidad del fallo de la misma, sino que existen otros factores de suma importancia relacionados fundamentalmente con su construcción que han de estudiarse y controlarse, siendo uno de los mas importantes el que tiene que ver con la adherencia y anclaje de las armaduras dentro de la masa de hormigón.

La adherencia de las barras se logra si estas están debidamente ancladas, es decir que se impide el deslizamiento entre el acero y el hormigón

El anclaje se logra de dos formas, como se muestra en la figura 8,1:

- Aprovechando la adherencia hormigón – acero obteniendo una longitud de anclaje que garantice este ya sea en barras rectas o dobladas (ganchos)
- Utilización de dispositivos especiales en los exteriores de las barras que forman una zona de anclaje en la cabezas de las vigas

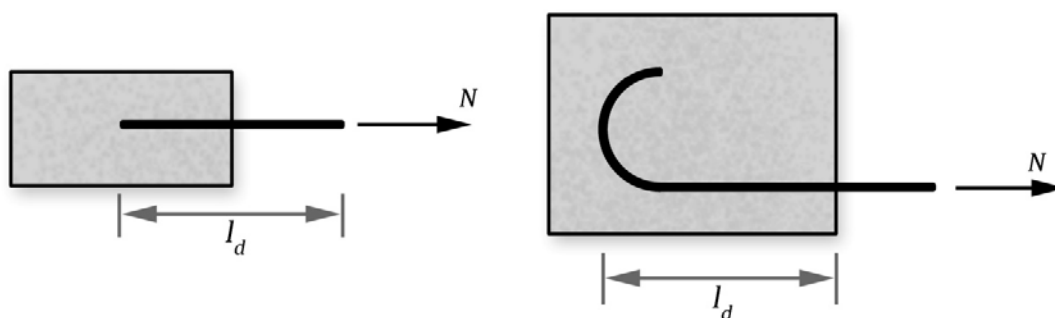


Figura 8,1 Tipos de anclaje

Este último procedimiento es excepcional en Hormigón Armado por lo que se profundizará en el primero

Analizando el fenómeno del anclaje por embebimiento del acero en el hormigón los factores que influyen son:

- Tipo de barra. Corrugada o lisa
- Calidad del hormigón
- Perímetro de las barras. Superficie de adherencia
- Tipo de anclaje. Recto o gancho
- Tipo de sollicitación. Tracción o compresión
- Zona en que esta situada la barra

8.2.1 LONGITUD DE ANCLAJE EN BARRAS TRACCIONADAS

Si se analiza el equilibrio a lograr en una barra ante una carga que tienda a arrancarla, como se muestra en figura 8,2, se puede obtener el valor de l_{db} necesario para lograr el anclaje de la misma.

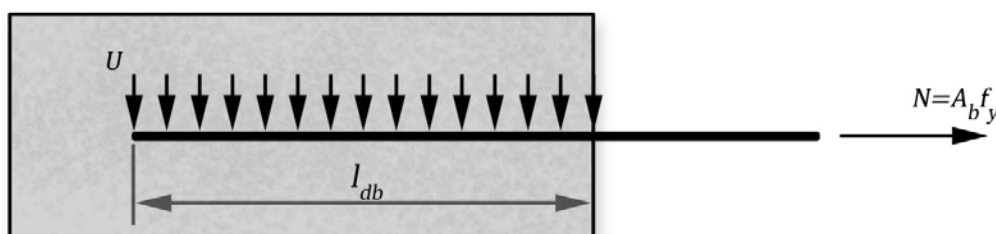


Figura 8,2: Longitud de anclaje

En esta dirección el ACI establece experimentalmente que

$$U = 35\sqrt{f'_c} \quad (\text{en lb/pulg}^2)$$

Donde U es la fuerza por unidad de longitud resistente a la adherencia y entonces el equilibrio para un tramo l_{db} puede plantearse como

$$Ul_{db} = A_b f_y$$

$$l_{db} = \frac{A_b f_y}{U}$$

Llegándose finalmente a la expresión, para el sistema inglés de unidades

$$l_{db} = \frac{3f_y}{40\sqrt{f_c'}} d_b$$

Y en el sistema internacional de unidades

$$l_{db} = \frac{0,9f_y}{\sqrt{f_c'}} d_b$$

Donde:

- A_b (cm^2), área de un barra de refuerzo
- d_b (cm), diámetro de la barra de refuerzo
- f_c' (MPa), resistencia del hormigón
- f_y (MPa), resistencia del acero
- l_{db} (cm), longitud de anclaje teórica

En la formulación que se expondrá a lo largo de este tema se debe considerar que independientemente de la calidad de hormigón que se emplee, la sustitución de $\sqrt{f_c'}$ debe ser tal que:

$$\sqrt{f_c'} \leq 8,3 MPa$$

El valor l_{db} se ve influido por diversos factores que provocan que la longitud de anclaje requerida varíe. Esta variación se expresa a través del coeficiente de una corrección m_f y por tanto la longitud de anclaje real se calculará por:

$$l_d = m_f l_{db} = m_f \frac{0,9f_y}{\sqrt{f_c'}} d_b$$

Quedando definitivamente la expresión de la siguiente forma:

$$l_d = \left[\frac{\psi_t \psi_e \psi_s \lambda}{\left(\frac{c_b + K_{tr}}{d_b} \right)} \right] \frac{0,9f_y}{\sqrt{f_c'}} d_b$$

Los diferentes factores influyentes se describen a continuación:

- *Ubicación de las armaduras. Zonas de baja adherencia (ψ_t)*

Se considera **zonas de baja adherencia** las situadas en la parte superior de la viga, u otra zona de la sección en la que las barras tengan por encima menos de $30cm$ de hormigón. Esta medida se justifica por el efecto desfavorable que provoca en la adherencia la pérdida de agua por el fraguado y el aire atrapado en la mezcla que tiende a subir en el proceso de vibrado y se sitúa debajo de las barras.

Entonces:

$$\begin{array}{ll} \psi_t = 1,3 & \text{para armaduras en zona de baja adherencia} \\ \psi_t = 1 & \text{para armaduras en zona de alta adherencia} \end{array}$$

- *Diámetro de las barras (ψ_e)*

Es un factor decisivo, directamente proporcional a la longitud de anclaje. No obstante se ha demostrado que para barras de pequeño diámetro la expresión para el cálculo de l_{db} es conservadora, por tanto se establece:

$$\begin{array}{ll} \psi_e = 0,8 & \text{para barras N° 19 o de menor diámetro} \\ \psi_e = 1 & \text{para barras N° 22 o de mayor diámetro} \end{array}$$

- *Adherencia en hormigones ligeros (λ)*

Los hormigones con agregados ligeros producen menor adherencia, por lo que en estos caso se recomienda:

$$\begin{array}{ll} \lambda = 1 & \text{para hormigones comunes} \\ \lambda = 1,3 & \text{para hormigones ligeros} \end{array}$$

- *Para barras con revestimientos protectores (ψ_s)*

Los revestimientos en las armaduras, colocados para su protección ante la oxidación, reducen la capacidad adhesiva de las barras, en estos casos se introduce la siguiente corrección:

$$\begin{array}{ll} \psi_s = 1,5 & \text{para armaduras con revestimiento y recubrimiento menor de } 3d_b \text{ ó} \\ & \text{separación libre menor de } 6d_b \\ \psi_s = 1,2 & \text{para las demás armaduras con revestimiento} \\ \psi_s = 1 & \text{para armaduras sin revestimiento} \end{array}$$

- *Recubrimiento y espaciamiento entre barras (c_b)*

Es un factor clave en la adherencia, pues el grado de fisuración alrededor de las barras decide la calidad del anclaje. Por tanto se adopta el menor de los siguientes valores, ver figura 8,3:

- La distancia entre el centro de la barra y la superficie de hormigón más próxima,
- La mitad de la separación entre los centros de las barras.

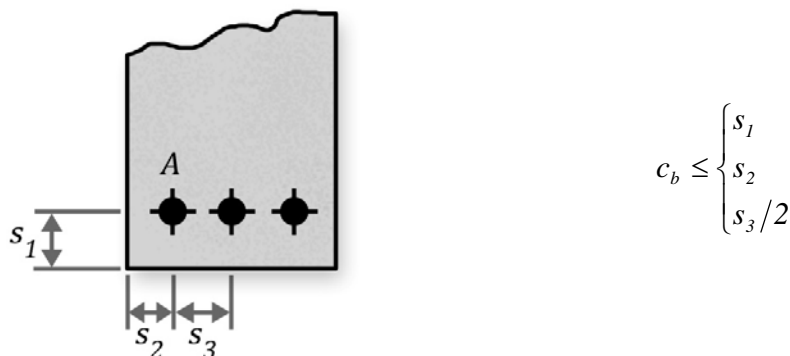


Figura 8,3: Recubrimiento y espaciamiento de barras. (c_b)

- *Refuerzo transversal (K_{tr})*

La colocación de refuerzo transversal, el área y su espaciamiento, favorece la adherencia, el anclaje de las barras principales. Su influencia se recoge a través de la siguiente expresión:

$$K_{tr} = \frac{A_{tr} f_{yt}}{10 \cdot s \cdot n}$$

siendo:

A_{tr} (cm^2) área total de la armadura transversal que está ubicada dentro de la distancia s

f_{yt} (MPa) resistencia de la armadura transversal

s (cm) separación máxima de la armadura transversal ubicada en la longitud l_d

n número de barras que se anclan a lo largo del plano de hendimiento

La relación $\frac{c_b + K_{tr}}{d_b}$ no debe ser mayor de 2,5. de forma conservadora puede hacerse $K_{tr} = 0$

- *Refuerzo en exceso*

Como regla se coloca en $A_{real} > A_{cálculo}$ y por tanto se admite reducir l_{db} en esta proporción, de forma tal que:

$$l_d = m_f l_{db} \frac{A_{cálculo}}{A_{real}}$$

Pero l_d no puede ser menor que 30 cm

Como una forma de simplificar los cálculos, en función de las condiciones más comunes, hormigones de peso normal ($\lambda = 1$), barras sin revestimiento ($\psi_s = 1$) y ubicadas en zonas de alta adherencia ($\psi_e = 1$), se obtienen los valores de l_d para dos condiciones de recubrimientos y espaciamientos de barras:

- CONDICIÓN 1: $\frac{c_b + K_{tr}}{d_b} = 1,5$

La separación libre entre las barras que se anclan o empalman es mayor o igual que d_b , el recubrimiento libre es mayor o igual que d_b y la cantidad de estribos a lo largo de l_d es mayor que el mínimo indicado en las normativas

o bien

La separación libre entre las barras que se anclan o empalman es mayor o igual que $2d_b$ y el recubrimiento libre es mayor o igual que d_b

- CONDICIÓN 2: $\frac{c_b + K_{tr}}{d_b} = 1$

Otro caso no recogido en los anteriores

Estos valores se muestran en los ANEXOS en la Tabla A-6, a los que puede aplicársele el coeficiente $\frac{A_{cálculo}}{A_{real}}$ para tomar en cuenta el refuerzo en exceso y si las armaduras están colocadas en zonas de baja adherencia se incrementará l_d en un 30%, $\psi_e = 1,3$

Cuando se tienen paquetes de barras, además de considerar el diámetro equivalente del conjunto, se incrementará el valor de la longitud de anclaje de la siguiente forma:

- Para 3 BARRAS, se incrementará en 1,2
- Para 4 BARRAS, se incrementará en 1,33

Para determinar los factores de modificación que se especifican en el artículo, cada paquete de barras debe ser tratado como si fuera una sola barra de un diámetro d_b , determinado en función del área total equivalente.

8.2.2 BARRA CON ANCLAJES CURVOS

Cuando en un elemento no puede lograrse colocar la longitud de anclaje, l_d , principalmente en los apoyos; entonces se doblan las barras, como puede apreciarse en la figura 8,4

El efecto del doblaje no elimina totalmente la necesidad de una longitud de adherencia, solo lo reduce de forma tal que:

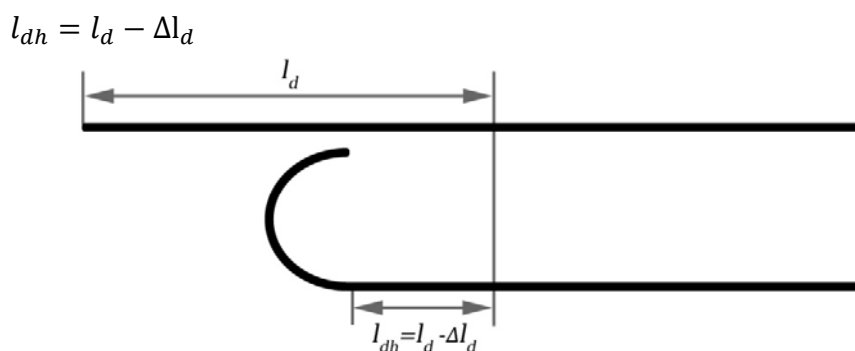


Figura 8,4: Longitud de anclaje en ganchos

El ACI establece las siguientes disposiciones sobre los ganchos en función del tipo de doblado (ver figura 8,5)

1. Un doblaz a 180° más una extensión mínima de longitud igual a 4 diámetros de barra, pero no menor que 6 cm en el extremo libre de la barra.
2. Un doblaz a 90° más una extensión mínima de longitud igual a 12 diámetros de barra en el extremo libre de la barra.

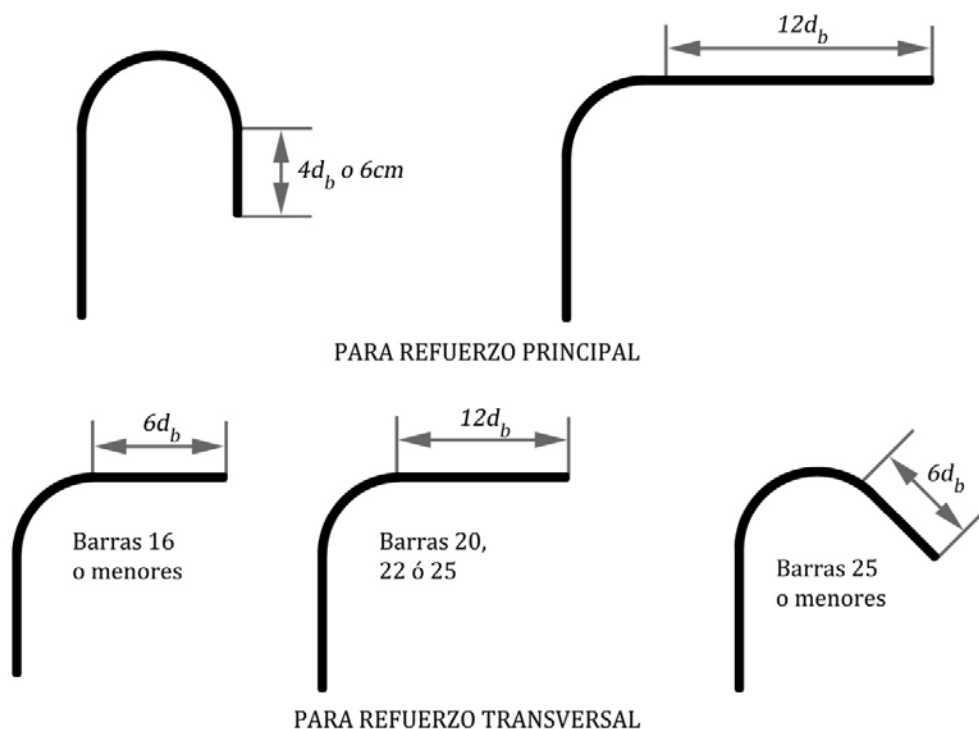


Figura 8,5: Ganchos estándares según el ACI

3. Para el anclaje de estribos
 - a. Para barras N° 16 y menores, un doblaz de 90° más una extensión mínima de longitud igual a 6 diámetros de barra en el extremo libre de la barra.
 - b. Para barras N° 19, 22 y 25, un doblaz a 90° más una extensión mínima de longitud igual a 12 diámetros de barra en el extremo libre de la barra.

- c. Para barras N° 25 y menores, un doblé a 135° más una extensión mínima de longitud igual a 6 diámetros de barra en el extremo libre de la barra.

El diámetro mínimo de doblamiento medido en la parte interior de la barra para ganchos estándares diferentes de los de estribos de tamaño N° 10 hasta el N° 16, no debe ser menor que los valores determinados en la tabla 8.1. Para ganchos de estribos con barras N° 16 y menores, el diámetro interior de doblamiento no debe ser menor que 4 diámetros de barra, según el Código ACI

TABLA 8.1 Diámetros mínimos de doblamiento para ganchos estándares

Diámetro de la barra a doblar	Diámetro del mandril de doblado	
	90°	135° ó 180°
$d_b \leq 25mm$	$6d_b$	$6d_b$
$25mm < d_b \leq 32mm$		$8d_b$
$d_b > 32mm$		$10d_b$

Para el calculo de la longitud de desarrollo de la barra con ganchos, l_{dh} , y los factores de modificación por:

$$l_{dh} = \left(0,24 \frac{f_y}{\sqrt{f_c}} \psi_e \lambda \right) d_b$$

Debiendo ser mayor que $8l_{dh}$ ó $150mm$

8.2.3 LONGITUD DE ANCLAJE EN BARRAS COMPRIMIDAS

En las zonas en que el refuerzo comprimido debe transmitir sus esfuerzos a otro elemento o en los apoyos debe garantizarse un adecuado anclaje, obviamente por ser las zonas comprimidas mas favorables desde el punto de vista de la adherencia y el agrietamiento, las longitudes de anclajes serán menores que para las barras traccionadas. La expresión será entonces:

$$l_{dc} = \frac{0,24d_b f_y}{\sqrt{f_c}}$$

Pero l_{dc} no puede ser menor que $0,04d_b f_y$

Los coeficientes de corrección serán:

$$l_{dc,real} = \psi l_{dc} \frac{A_{cálculo}}{A_{real}}$$

Donde:

- $\psi = 0,75$ Refuerzo encerrado con refuerzo en espiral con diámetro no menor que 10 mm y con un paso no mayor que 10 cm o encerrado por estribos con diámetro no menor que 12 mm a espaciamientos no mayores que 10 cm entre centros
- $\psi = 1$ Para los restantes casos

8,3 EMPALMES

En ocasiones las longitudes comerciales de las barras rectas son insuficientes para reforzar determinados elementos, y se requiere alcanzar determinada longitud mediante la unión de dos barras que deben ser debidamente empalmadas. Los empalmes yuxtapuestos se ven afectados por diversos factores entre los que pueden señalarse:

- El tamaño de las barras
- La tensión de fluencia del acero
- La calidad del hormigón
- La ubicación de las barras en el elemento
- La separación y recubrimiento de las barras a empalmar
- La presencia de armadura transversal de confinamiento
- La cantidad de barras que se empalman en una sección, etc.

Los tipos de empalmes y las restricciones según Medina y Ruiz son:

TIPOS DE EMPALMES

- Por solapo: en contacto
Barras separadas
- Soldados: a tope
En solapo

RESTRICCIONES

- Los empalmes no deben realizarse en las zonas de máximos momentos
- Se permiten en barras de diámetros entre 16 y 32mm
- Deben evitarse realizarlos en zonas donde se produzcan dobleces en las armaduras
- Los empalmes no deben realizarse todos en la misma sección sino desplazados, con esto se evita el fallo simultáneo al crear una zona potencialmente débil. Se pueden distanciar transversalmente, como máximo, hasta 1/5 de la longitud de empalme requerida, ó 150 mm.
- Para empalmes por solapo. Previendo un fallo por cortante se norma el refuerzo adicional con estribos.

Para **barras a tracción** la longitud a empalmar debe ser de $1,3l_d$, excepto en zonas en la que esté colocado el doble de acero del necesario y solo se empalmen la mitad de las barras de una vez, en que será l_d . Esta condición conduce a escoger la zona del empalme en los tramos de menores momentos.

Para el cálculo de l_d no se aplicará la modificación por área de refuerzo en exceso.

Para **barras a compresión** de columnas la longitud a empalmar será:

$$\begin{aligned} - l_d &= 0,07d_b f_y, & \text{para } f_y \leq 420 \text{MPa} \\ - l_d &= (0,13f_y - 2,4)d_b, & \text{para } f_y > 420 \text{MPa} \end{aligned}$$

Pero mayor de **30 cm**

Si f_c' es menor de 20 MPa la longitud de anclaje se incrementará en un tercio

En ambos casos para el cálculo de l_d no se toma en cuenta la corrección por exceso de refuerzo.

8,4 SEPARACIÓN ENTRE BARRAS Y RECUBRIMIENTO

En la distribución del refuerzo en la sección transversal hay que garantizar una adecuada adherencia hormigón – acero y esto se logra asegurando que cada barra o grupo de barras se encuentre debidamente rodeada de hormigón. En la figura 8,6 se muestran estas propiedades

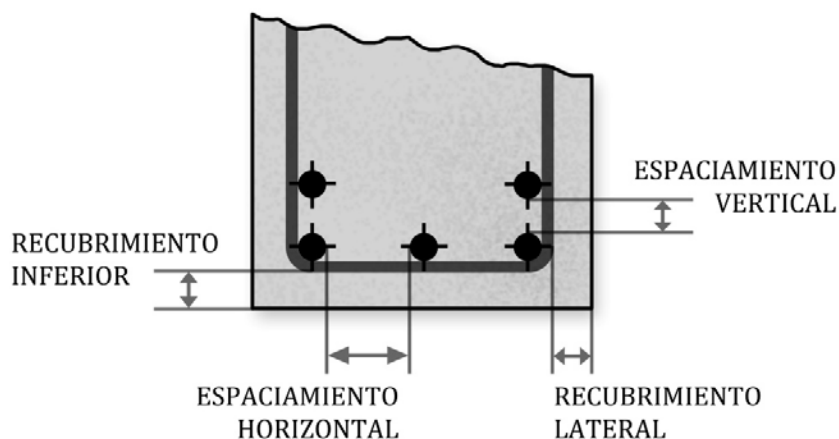


Figura 8,6 : Espaciamiento entre barras y recubrimiento en vigas

Por ejemplo en una viga continua altamente armada sobre los apoyos, en la parte superior de la sección se concentraran gran cantidad de barras, se dificulta el hormigonado y por lo tanto se requiere tomar en cuenta esto en el diseño

En resumen las **barras traccionadas** deben separarse entre si, tanto horizontal como verticalmente, como mínimo

- 2cm
- d_b
- 1.25 tamaño máximo del arido (TM)

Cuando **la armadura se ubica en dos o más capas paralelas**, la separación libre mínima entre dos capas consecutivas debe ser mayor o igual que 2,5cm, mientras que la separación horizontal pasa a ser:

- 2,5cm
- d_b
- 1.33 tamaño máximo del arido (TM)

En **elementos solicitados a compresión** con estribos cerrados o con zunchos, la separación libre mínima entre las barras que conforman la armadura longitudinal del elemento, debe cumplir con:

- 4cm
- $1,5d_b$
- 1.33 tamaño máximo del arido (TM)

En la búsqueda de la durabilidad de los elementos de hormigón armado y de evitar la corrosión del acero de refuerzo hay dos parámetros fundamentales a tomar en cuenta:

- La calidad del hormigón dada por su resistencia a compresión, en lo que influyen factores como la relación agua cemento, la cantidad de iones cloruro de la mezcla, su consistencia, compactación curado, el uso de aditivos, etc.
- El recubrimiento del acero.

Importante papel desempeña el RECUBRIMIENTO de las barras, que se selecciona siguiendo criterios de protección de estas ante la agresividad del medio. En resumen las funciones del recubrimiento son:

- Protección ante el intemperismo
- Protección ante el fuego
- Protección ante la corrosión
- Garantizar una adecuada adherencia hormigón – acero
- Evitar oquedades y grietas, al facilitar el hormigonado

Tomando en cuenta estos requerimientos los valores de recubrimiento dependerán de:

- Medio Ambiente
- Diámetro de las barras
- Características de las barras
- Tipo de elemento
- Características del hormigón (áridos, forma de hormigonar)

La NC 250-04 sobre Durabilidad de Obras y Edificaciones de Hormigón Estructural establece que *“El recubrimiento constituye un parámetro de gran importancia para proveer al acero de refuerzo de la protección requerida durante el período de vida útil considerado de la estructura, siendo decisivo para esta protección, la baja permeabilidad y el espesor del mismo. El recubrimiento tiene dos funciones, una química y otra física. La química es mantener la alcalinidad suficiente (pH por encima de 9) que mantenga el acero pasivado. La física es limitar la entrada de los agentes agresivos desde el exterior. Este espesor deberá estar acorde con el buen diseño estructural, la severidad de las condiciones ambientales y el costo total que conlleva, incluyendo los costos por mantenimiento”*.

Las condiciones ambientales son decisivas en la selección de los recubrimientos y se han definido cuatro tipos de ambiente en el país, que se detallan en la Tabla 8.2.

TABLA 8.2— Tipos generales de exposición relativos a la corrosión de las armaduras de refuerzo

AGRESIVIDAD	DESCRIPCIÓN	EJEMPLOS
MUY ALTA	<ul style="list-style-type: none"> • Elementos de estructuras marinas por encima del nivel de la marea alta y en zonas de recorridos de mareas. • Estructuras situadas en las proximidades de la línea costera hasta 500 m. del mar en la costa norte y hasta 100 m en la sur. • Estructuras no impermeabilizadas en contacto con aguas que presenten un contenido elevado de cloruros no necesariamente relacionados con el ambiente marino. 	<ul style="list-style-type: none"> • Edificaciones y otras estructuras situadas en las proximidades indicadas de las costas y cayos. • Puentes en las proximidades indicadas de la costa y pedraplenes. • Zonas aéreas de diques y otras obras de defensa del litoral. • Instalaciones de los puertos. • Piscinas, estanques de acuarios y tanques, con aguas de mar o salobres, etc. • Edificaciones y otras estructuras situadas en las proximidades de zonas con altos contenidos de iones cloruro como salineras, plantas de tratamientos, etc.
	<ul style="list-style-type: none"> • Elementos de estructuras marinas sumergidos permanentemente. • Estructuras situadas en la franja costera 	<ul style="list-style-type: none"> • Edificaciones y otras estructuras situadas en las proximidades indicadas de las costas. • Puentes en las proximidades indicadas de la costa.

ALTA	<ul style="list-style-type: none"> a más de 500 m y hasta 3 km del mar en la costa norte y a más de 100 m y hasta 1 km en la costa sur. Estructuras soterradas bajo la influencia total ó parcial de agua de mar o salobre. 	<ul style="list-style-type: none"> Zonas de diques y otras obras de defensa costera sumergidas permanentemente. Cimentaciones y zonas sumergidas de pilas de puentes en el mar. Cimentaciones y estructuras soterradas en general bajo las influencias agresivas indicadas.
MEDIA	<ul style="list-style-type: none"> Estructuras situadas en la franja costera a más de 3 km y hasta 20 km de la costa norte y a más de 1 km y hasta 20 km de la costa sur. Estructuras soterradas bajo la influencia total o parcial de aguas y suelos comunes. Depósitos de agua dulce. Interiores de edificaciones aisladas del medio exterior y sometidas a humedades altas ó condensaciones. Estructuras situadas en zonas de humedades relativas medias anuales mayores de 65%. 	<ul style="list-style-type: none"> Edificaciones y otras estructuras situadas en las proximidades indicadas de las costas. Cimentaciones en general bajo los requerimientos indicados. Piscinas, cisternas, tanques, conductoras y otros depósitos en general, que contienen agua dulce. Sótanos no ventilados. Locales destinados a saunas, lavanderías, fregados, etc. que posean altas humedades con altas frecuencias de ocurrencia. Todos los casos de estructuras situadas en las franjas costeras indicadas ó a mayores distancias pero sometidas a humedades relativas superiores al 65%.
BAJA	<ul style="list-style-type: none"> Estructuras situadas a más de 20 km de ambas costas. Interiores de edificaciones no sometidos a condensaciones. Estructuras soterradas no afectadas por las aguas subterráneas o freáticas en suelos comunes. Estructuras situadas en zonas de humedades relativas medias anuales iguales ó menores del 65%. 	<ul style="list-style-type: none"> Edificaciones y otras estructuras situadas en las franjas costeras y bajo las condiciones indicadas. Interiores de edificios protegidos de la intemperie. Sótanos y obras soterradas ventiladas o sometidas a humedades inferiores al 65%. Cimentaciones en general bajo los requerimientos indicados.
<ul style="list-style-type: none"> En caso de elementos o estructuras sometidas a diferentes tipos de agresividad, prevalecerá en el diseño, el criterio más exigente que le corresponda. Las categorías de agresividad que se dan en la tabla 8.4 corresponden a estructuras y elementos directamente expuestos al medio agresivo como por ejemplo las partes exteriores de una edificación. Para las estructuras y elementos menos expuestos al medio agresivo, como por ejemplo las partes interiores de una edificación, podrá tomarse una categoría de agresividad inmediata inferior a la de las partes exteriores. 		

Las categorías establecida tienen en cuenta la combinación desfavorable de iones cloruro, humedad ambiental y dióxido de carbono. Por las características del país (isla alargada y estrecha), los iones cloruros provenientes del aerosol marino tienen una gran influencia en el establecimiento de las categorías de agresividad. Los iones cloruros contribuyen fuertemente a una corrosión electroquímica muy peligrosa sobre el acero de refuerzo, conocida por corrosión localizada o por picadura que puede avanzar rápidamente provocando la pérdida de sección del acero, de forma puntual.

El recubrimiento de hormigón es la distancia entre la superficie exterior de la armadura más externa (incluyendo cercos y estribos) y la superficie exterior de hormigón más cercana, como se aprecia en la figura 8.6. Esta disposición modifica el uso común en Cuba de considerar el recubrimiento a la superficie de la armadura principal, buscando por tanto una protección de todo el refuerzo del

elemento, provocando un incremento del recubrimiento efectivo del acero longitudinal.

La NC 250-04 dispone los valores normativos de recubrimientos que se exponen en la Tabla 8,3

TABLA 8,3: Valores mínimos de recubrimiento por elementos estructurales (mm)

	CATEGORÍA DE AGRESIVIDAD			
	Muy Alta	Alta	Media	Baja
Pilotes hormigonados in situ contra el suelo	75	75	75	75
Pilotes prefabricados	50	50	50	50
Cimientos sin sello	70	70	70	70
Cimientos con sello	50	50	50	50
Muros (paredes) hormigonados contra terreno (**)	70	70	70	70
Muros (paredes) hormigonados contra cofre (**)	50	40	40	40
Muros (paredes) prefabricados (**)	40	35	35	35
Zapatas hormigonadas contra terreno (*)	50	50	40	40
Zapatas hormigonadas contra cofre (*)	45	45	35	35
Zapatas prefabricadas (*)	40	40	30	30
Columnas y vigas, hormigonadas in situ	50	40	40	30
Columnas y vigas, prefabricadas	40	35	35	25
Tímpanos y muros, hormigonados in situ	50	40	30	25
Tímpanos y muros, prefabricados	40	35	25	20
Losas, elementos laminares, nervios y viguetas, hormigonados in situ	40	35	30	25
Losas, elementos laminares, nervios y viguetas, prefabricados	35	30	25	20
Pilotes hormigonados in situ contra el suelo	75	75	75	75
(*) Cimientos que soportan elementos de cierre				
(**) Caras de muros contra el terreno				
<ul style="list-style-type: none"> - En ningún caso el recubrimiento podrá ser inferior al diámetro mayor de la barra longitudinal ni a 1,25 veces el tamaño máximo del árido. - En las estructuras expuestas a peligro de incendio, el recubrimiento vendrá fijado por la norma específica de protección de incendios, pero nunca menor que el señalado en la tabla 8,3 - La indicación de elementos prefabricados se refieren a elementos prefabricados en plantas especializadas únicamente. - En elementos (como viguetas o losas), prefabricados en instalación industrial fija, para entresijos unidireccionales de hormigón armado o pretensado, el proyectista podrá contar, además del recubrimiento de hormigón real del elemento, con el espesor del revestimiento del entresijo, siempre que dicho revestimiento sea compacto e impermeable y tenga carácter definitivo y permanente, y que se garantice con dicho revestimiento, una protección similar a la del recubrimiento de hormigón sustituido, todo ello correspondientemente documentado, al objeto de cumplir con los recubrimientos mínimos de la tabla 8,3. Sin embargo, en estos casos, el recubrimiento real de hormigón no podrá ser inferior a 15 mm. 				

Como ayudas de cálculo en los ANEXOS, en la Tabla A-7, aparecen la cantidad de barras que pueden colocarse en una viga de ancho b en condiciones de ambientes diversos, lo que implica diferentes valores de recubrimiento, y en la Tabla A-8 los recubrimientos mecánicos en función del diámetro de las barras, el número de camadas y los recubrimientos requeridos.

8,5 PAQUETES O MAZOS DE BARRAS.

Los paquetes de barras, siempre que fuera posible, deben evitarse, pues con ellos se reduce la superficie relativa acero-hormigón en la interfase entre ambos materiales, se afecta la adherencia y la pieza pierde aptitud para el anclaje. Cuando se recurra al empleo de paquetes de barras, se deben limitar a un máximo de 4 barras, y a los efectos del cálculo de los estados límites, el paquete debe ser interpretado como una única barra virtual de un diámetro d_{be} equivalente al área total de las barras del paquete.

Sea, por ejemplo, un paquete de barras de diámetro d_b cada una. El diámetro equivalente del paquete d_{be} , puede determinarse de la siguiente manera (ver figura 8,7):

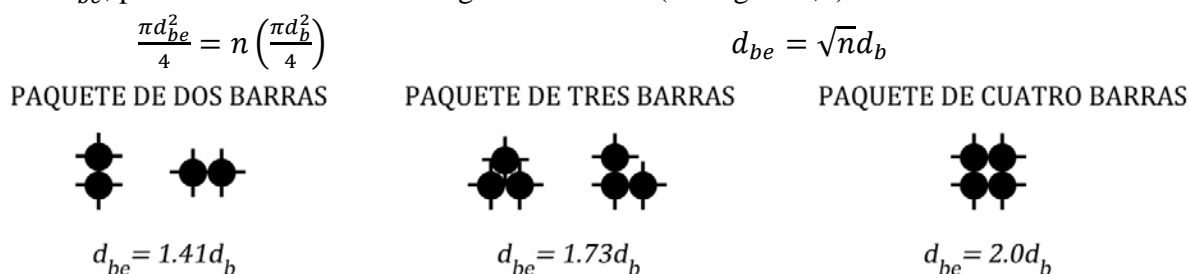


Figura 8,7: Paquetes de barras

Como regla, los paquetes de barras deben ser tratados cumpliendo con lo siguiente:

- Se debe procurar que los paquetes de barras sean contenidos por estribos preferiblemente cerrados.
- En caso de vigas no se deben agrupar barras cuyo diámetro supere los **32mm**. ($d_b \leq 32mm$)
- Dos o más barras de un mismo paquete no pueden ser interrumpidas simultáneamente en una misma sección, es más, entre dos secciones continuas en que se interrumpa al menos una barra del paquete, debe existir una separación de $40d_b$.

8,6 BARRAS LEVANTADAS O DOBLADAS

En elementos en que se producen cambios en la fibra fraccionada y por tanto del refuerzo principal a tracción se pueden emplear barras dobladas. Por ejemplo en una viga continua se pueden emplear las variantes que se muestran en la figura 8,8

La solución de barra recta es la más empleada en Cuba para eludir las dificultades en la fabricación de la armadura, colocación y doblado

Sin embargo al ajustarse mejor a la forma del gráfico de Momento Flector la solución con barras levantadas es más económica y racional. Por otra parte las barras inclinadas se convierten en un elemento resistente al cortante y poseen un anclaje muy superior

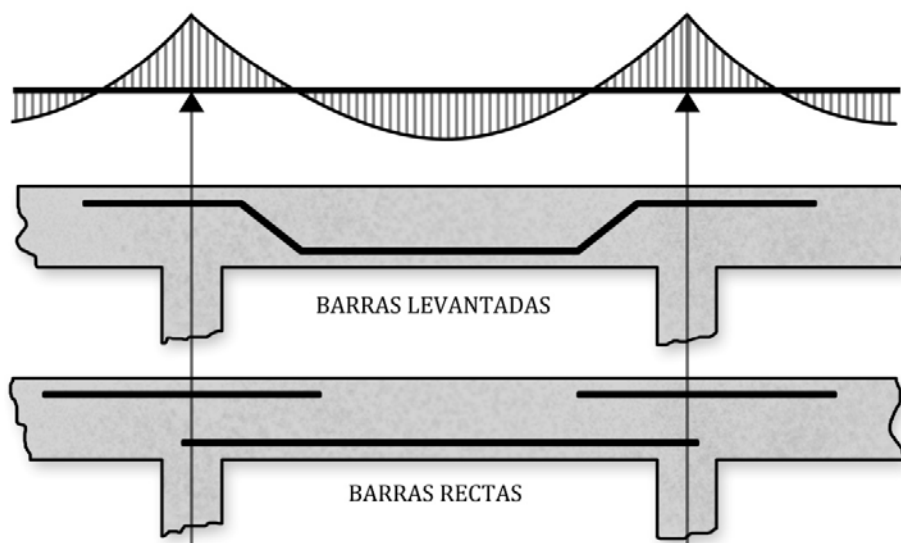


Figura 8,8: Barras levantadas

8,7 CORTE DE BARRAS

La inmensa mayoría de los gráficos de momento flector no son constantes por lo que el refuerzo obtenido para la sección crítica resulta excesivo para el resto.

Por ejemplo en una viga simplemente apoyada, podemos, en el plano práctico, sustituir el gráfico de momento verdadero por uno quebrado por zonas resistentes como se muestra en la figura 8,9, a partir de la realización de cortes de barras

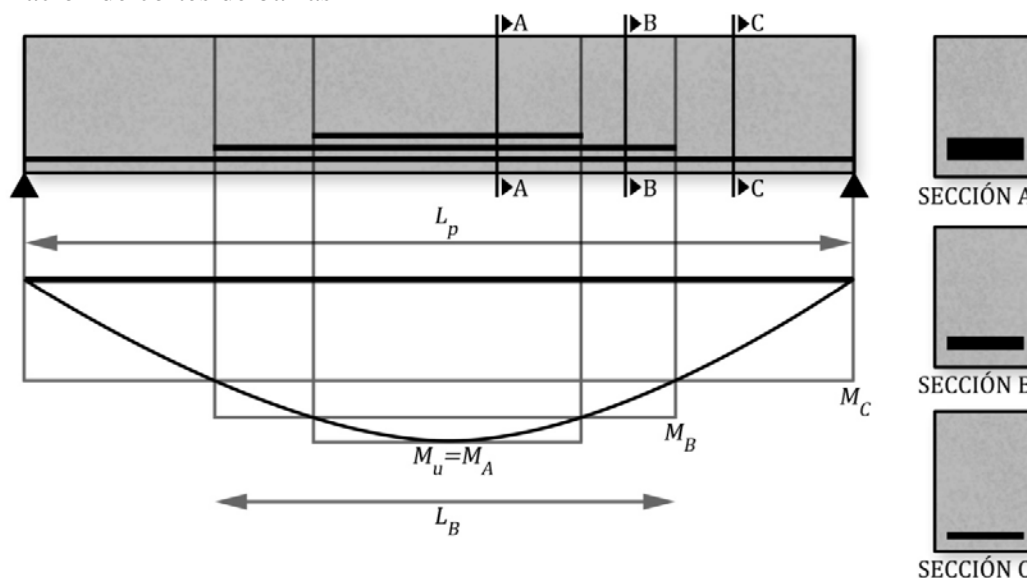


Figura 8,9: Corte de barras

Donde en la zona A, para el momento máximo se colocaría el acero total (6 barras, por ejemplo), en la zona B 4 barras y en la zona C solo 2 barras cumpliendo los requerimientos de barras que llegan al apoyo. Como puede apreciarse aunque más racional la distribución del refuerzo todavía no es “ideal”

En el caso del gráfico anterior puede realizarse la siguiente equivalencia, propuesta por Medina y Ruiz.

$$M_A = M_u = \frac{1}{8}qL^2 \quad \text{Y se corresponde con un área de acero } A_A$$

$$M_B = M_u = \frac{1}{8}qL_B^2 \quad \text{Y se corresponde con un área de acero } A$$

Entonces se puede establecer la relación aproximada:

$$\frac{M_A}{M_B} = \frac{A_A}{A_B} = \frac{\frac{1}{8}qL_p^2}{\frac{1}{8}qL_B^2} = \frac{L_p^2}{L_B^2}$$

Si se trabaja en número de barras

$$\frac{n_A}{n_B} = \frac{L_p^2}{L_B^2}$$

Y para determina L_B

$$L_B = L_p \sqrt{\frac{n_B}{n_A}}$$

Donde n_B son las barras cortadas

Ante gráficos más complejos en vigas continuas se requiere:

- Obtener los puntos de momento cero, para determinar las longitudes L_p
- Evaluar de forma diferente el caso de los momentos negativos, sobre todo en los voladizos

Por ejemplo, con el apoyo de la figura 8,10

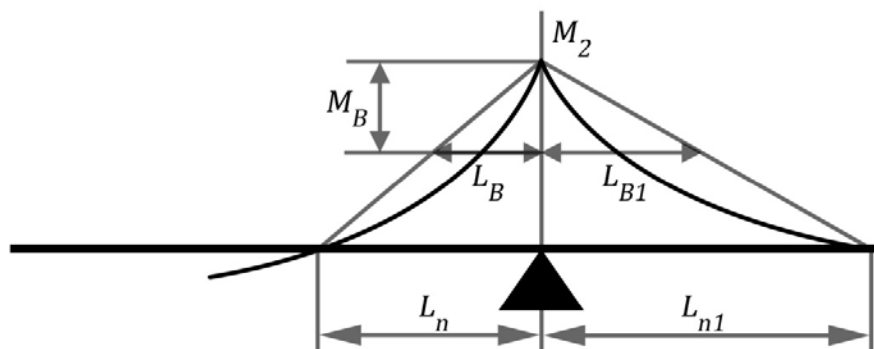


Figura 8,10: Longitudes para el corte de barras

- Para el momento positivo: el corte se realiza partiendo de L_p y M_1
- Para el momento negativo: a la izquierda se parte de L_n y M_2 y se hace una simplificación del gráfico a lineal. Entonces la relación sería:

$$\frac{M_2}{M_B} = \frac{L_n}{L_B} = \frac{n_2}{n_B}$$

$$L_B = L_p \frac{n_B}{n_2}$$

- Para el momento negativo en el voladizo se puede plantear la relación en función del gráfico donde:

$$M_B = \frac{1}{8}q(L_{n1} - L_{B1})^2$$

$$\frac{M_B}{M_{B2}} = \frac{\frac{1}{8}q(L_{n1} - L_{B1})^2}{\frac{1}{8}qL_{n1}^2} = \frac{n_{B3}}{n_2}$$

Finalmente

$$L_B = L_{n1} \left(1 - \sqrt{\frac{n_{B3}}{n_2}} \right)$$

Donde n_{B3} son las barras que quedan

Una vez delimitada las longitudes de los cortes que condicionan el gráfico quebrado ¿son estas las longitudes que tendrán las barras?

Es necesario tomar en cuenta otros factores:

- Longitudes de anclaje de las barras. Por lo que debe sumarse l_d a partir del punto considerado para el corte
- El efecto del decalaje del gráfico de momento tomando en cuenta la acción del cortante. Por lo que entonces debe sumarse a cada extremo un valor de $\frac{3}{4}d$.

Finalmente como resumen en el gráfico 8,11 se ejemplifica este proceso de colocación del refuerzo en una viga continua, esquema muy empleado por los autores norteamericanos

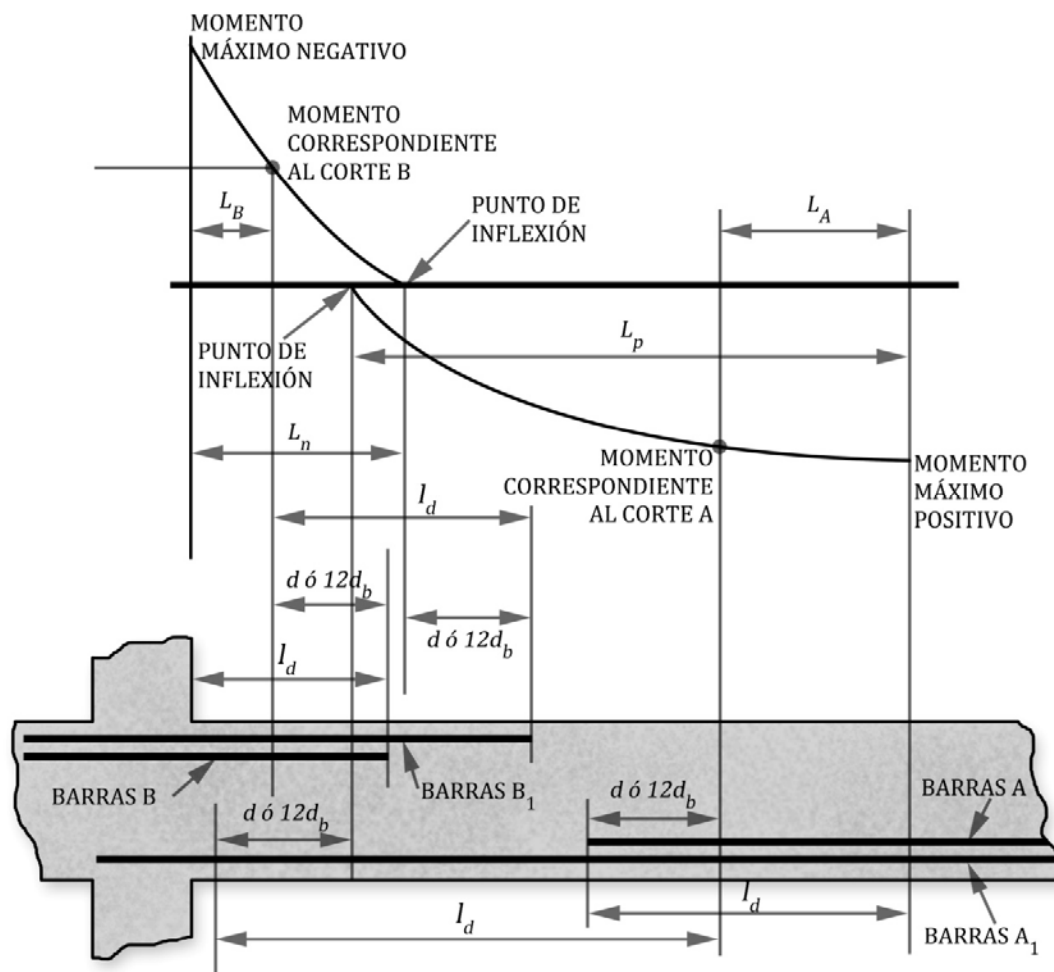


Figura 8,11: Requisitos generales para el corte de barras

Para el **Momento Negativo**, por ejemplo, se ha decidido hacer un corte de barras, por lo que en la zona de máximo momento se colocarán las barras B y B_I y al producirse el corte solo continuarán las B_I , cortándose las B , destacándose en el gráfico las distancias L_n (hasta momento cero) y L_B (hasta el corte de barras)

- Las barras B deben anclarse la mayor de las siguientes magnitudes:
 l_d a partir del punto de momento máximo
 d ó $12d_b$ a partir del punto de corte $(L_B + d \text{ ó } 12d_b)$
- Las barras B_I deben anclarse la mayor de las siguientes longitudes:
 l_d a partir del punto de corte de las barras B $(L_B + l_d)$
 d ó $12d_b$ a partir del punto de inflexión o momento cero $(L_n + d \text{ ó } 12d_b)$

Como regla para contribuir a la conformación de la armadura se extienden como mínimo 2 barras en toda la zona superior de la viga, lo que contribuye adicionalmente al anclaje de estas.

Para el **Momento Positivo**, también se ha decidido hacer un corte de barras, por lo que en la zona de máximo momento se colocarán las barras A y A_I y al producirse el corte solo se colocarán las A_I , cortándose las A . las distancias básicas serán L_p (hasta momento cero) y L_A (hasta el corte de barras)

- Las barras A deben anclarse la mayor de las siguientes magnitudes:
 l_d a partir del punto de momento máximo
 d ó $12d_b$ a partir del punto de corte $(L_A + d \text{ ó } 12d_b)$
- Las barras A_I deben anclarse la mayor de las siguientes longitudes:
 l_d a partir del punto de corte de las barras A $(L_A + l_d)$
 d ó $12d_b$ a partir del punto de inflexión o momento cero $(L_p + d \text{ ó } 12d_b)$

Los requerimientos de cortante obligan a que se extiendan como mínimo un tercio del máximo de las barras en los apoyos externos y la mitad en los interiores.

Nilson hace hincapié en la situación que se ilustra en la figura 8,12 donde puede ocurrir que en la zona de momentos positivos no se garantice, al realizar anclajes siguiendo una relación lineal con M , que en zonas cercanas al punto de inflexión este resulta insuficiente pues el M no sigue esta relación.

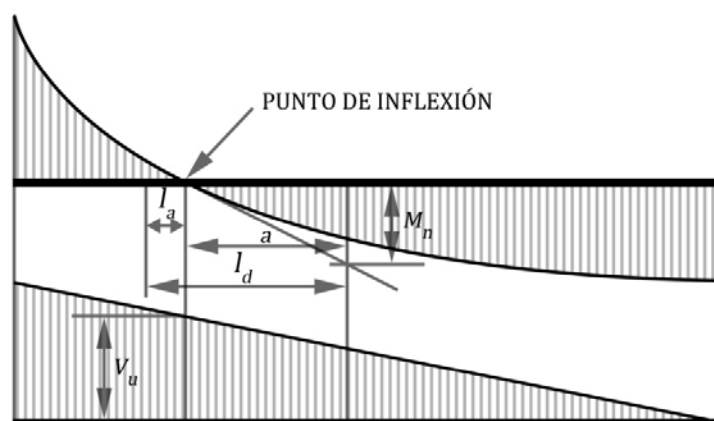


Figura 8,12: Longitud de anclaje requerida en el punto de inflexión

Para prever esta problemática se chequea el anclaje en el punto de inflexión, recomendándose el siguiente procedimiento:

La fuerza de adherencia U es:

$$U = \frac{dT}{dx}$$

$$U = \frac{dM}{z \cdot dx}$$

Sabiendo que la situación más desfavorable de $\frac{dM}{dx} = V_u$, tangente del gráfico de momento, se presenta en el punto de inflexión; se calcula la distancia a para la cual se cumple la condición:

$$a = \frac{M_n}{V_u}$$

Que como se muestra en el gráfico se obtiene conservadoramente prolongando la pendiente del punto de inflexión. Donde M_n es el momento nominal aportado por el refuerzo en este punto.

Entonces se garantiza un adecuado anclaje si se cumple que:

$$l_d \leq \frac{M_u}{V_u} + l_a$$

Donde l_a será d ó $12d_b$

8,8 ARMADURA EN REFUERZO EN ÁNGULO

En los ángulos de las estructuras se requiere una distribución del refuerzo que garantice que no se produzcan fallos locales.

Esto se logra evitando que en estas zonas se concentren tensiones transmitidas por las barras. Medina y Ruiz han seleccionado los casos que se ilustran en la figura 8,13 para explicar esta problemática.

- Para esquina (con tracciones borde interior)
- Para ángulos (vigas quebradas, es calera)

Soluciones

- Anclando en la zona superior cada barra por separado
- Tomando R con estribos anclados al borde superior

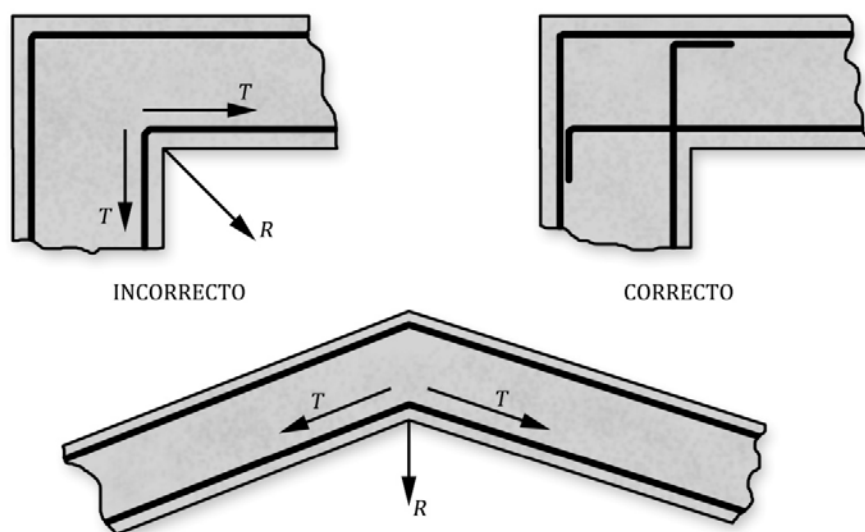


Figura 8,13: Armaduras con refuerzos en ángulo

Ejercicio 8,1

Para la viga que se muestra en la figura 8,14, se obtuvo la envolvente y los valores de momentos máximos en el apoyo y el centro de las luces.

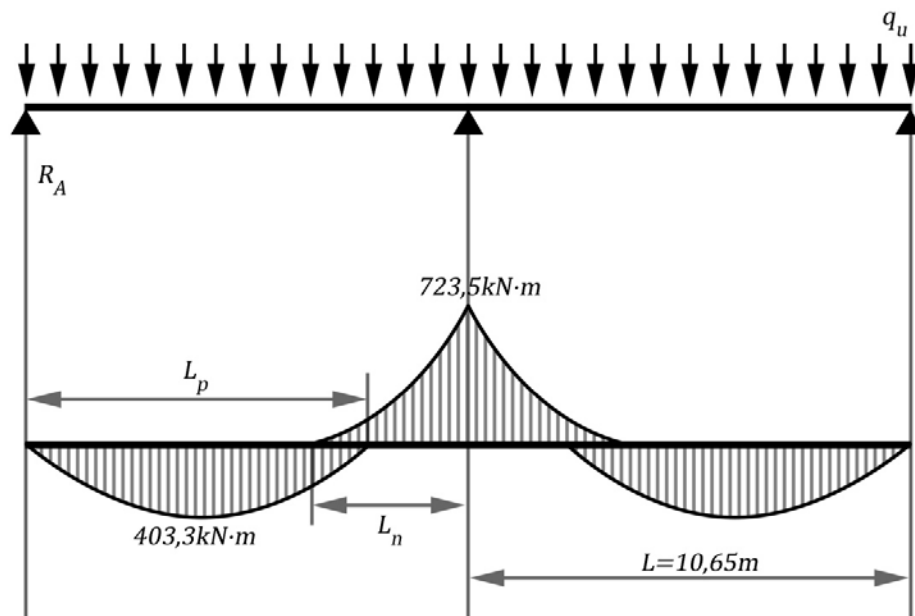


Figura 8,14: Envolvente de momentos más desfavorables

Cálculos y Discusión**a) Longitudes que marcan el momento cero en cada tramo**

- Momento negativo

$$q_u = q_{CP} + q_{CU} = 38,7 + 18 = 56,7 \text{ kN/m}$$

Para la combinación de cargas que produce el mayor momento negativo se calcula la reacción en el apoyo A, R_A :

$$R_A = 0,375 q_u L = 226,45 \text{ kN}$$

Calculando el punto de momento cero para esta condición.

$$M = R_A \cdot x - \frac{1}{2} q_u x^2 = 0$$

$$226,45 \cdot x - \frac{1}{2} 56,7 x^2 = 0$$

$$x = \frac{2 \cdot 226,45}{56,7} = 7,98 \approx 8 \text{ m}$$

$$L_n = 2,65 \text{ m}$$

- Momento positivo

Para la combinación de cargas que produce el mayor momento positivo se calcula la reacción en el apoyo A, R_A :

$$R_A = (0,4 q_{CP} + 0,45 q_{CU}) L = 251,13 \text{ kN}$$

$$251,13 \cdot x - \frac{1}{2} 56,7 x^2 = 0$$

$$L_p = x = \frac{2 \cdot 251,13}{56,7} = 8,85m$$

b) Cálculo estructural

$$f'_c = 20MPa$$

$$b = 30cm$$

$$\omega_b = 0,482$$

$$f_y = 300MPa$$

$$h = 80cm$$

$$d_s = 9cm$$

$$d = 71cm$$

SECCIONES	$M_u (kN \cdot m)$	A_s'		$\frac{M_u}{\phi b h^2 f'_c}$	ω_r	A_s	
		ω'	A_s'			ω	$A_s (cm^2)$
Central	430,3	0,0718	$2 \phi 16$	0,1581	0,1764*	0,1764	25,05 $5 \phi 25$
Apoyo	723,5	0,0718	$2 \phi 25$	0,2658	0,2331	0,3049	43,30 $4 \phi 36$ $2 \phi 16$

* En este caso el refuerzo comprimido no fluye, por lo que no está considerado en los cálculos

c) Cálculo de la separación entre barras y recubrimientos.

Aunque este es un paso que se realiza simultáneamente con el diseño, se analizará detalladamente como recurso demostrativo de estas características de la sección.

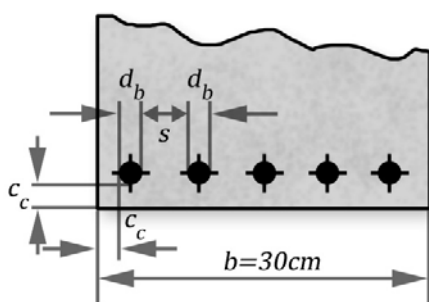
La viga está situada en el interior de un edificio en una zona de baja agresividad, por lo que el recubrimiento será de 30mm. Además se utilizarán estribos de 10mm y el tamaño máximo del árido (TM) es 2 cm

Refuerzo positivo (5 barras N° 25)

$$\text{Recubrimiento (r)} \quad 3 \text{ cm}$$

$$\text{Espaciamiento máximo (s}_{max}) \quad 1,25 \text{ TM} = 2,5 \text{ cm} = d_b$$

Con el apoyo de la figura 8.15 se calcula el número máximo de barras en una camada, que es menor de 5, por lo que deben situarse en dos, 3 en la primera y 2 en la segunda camada



$$c_c = r + d_{be}$$

$$c_c = 3 + 1 = 4cm$$

$$b = 2 \cdot c_c + n \cdot d_b + (n-1) \cdot s_{max}$$

$$n = (30 - 8 + 2,5) / 5$$

$$n = 4,9$$

Figura 8,15: Número de barras en 1 camada, para el momento positivo

Resultado semejante se obtiene empleando la **Tabla A-7** de los anexos, considerando el recubrimiento de 30mm y el estribo de 10mm, proceso mucho más sencillo.

Para estas 2 camadas debe obtenerse el recubrimiento efectivo de las barras d_s lo que se ejemplifica en la figura 8,16.

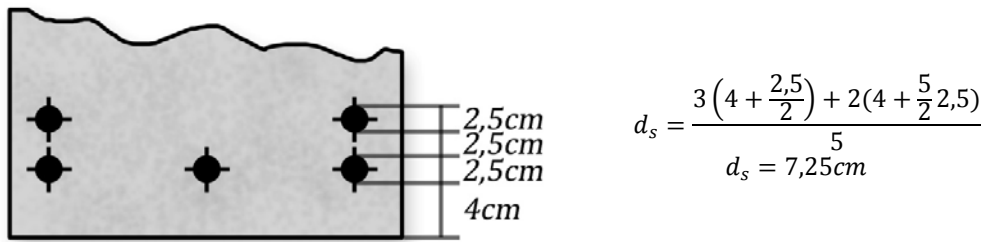


Figura 8,16: Recubrimiento real de las barras, para el momento positivo

Inferior a los 9 cm considerados como especificación para dos camadas y a los 7,78cm que se obtienen por la **tabla A-8**

Refuerzo Negativos (9 barras N° 25)

En este caso se colocarán 3 barras en cada camada, las N° 16 mas cercanas al borde pues son las que continúan a lo largo de toda la viga, el resto serán cortadas.

Entonces, con el apoyo de la figura 8,17:

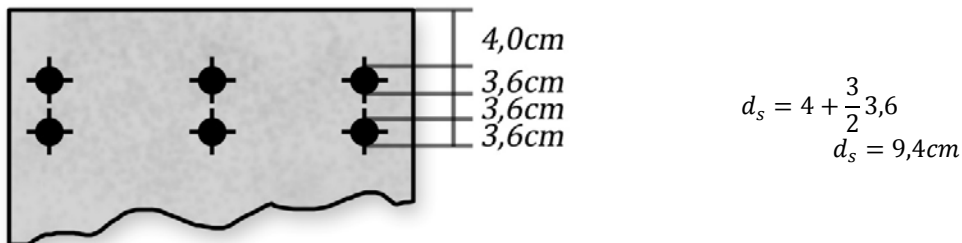


Figura 8,17: Recubrimiento real de las barras, para el momento negativo

d) Corte de barras

Analizando los cortes por separado

Refuerzo positivo

Como existen solo 5 barras, por razones constructivas, buscamos que 2 lleguen al apoyo, por lo que solo se aplicará un corte

Entonces

$$L_1 = L_p \sqrt{\frac{n_1}{n_p}}$$

$$L_1 = 9,3 \sqrt{\frac{3}{5}} = 7,2m$$

¿Es esta la longitud de estas barras? Resulta necesario el cálculo de la longitud de anclaje. Entonces.

$$l_{db} = \frac{0,9f_y}{\sqrt{f_c}} d_b$$

$$l_{db} = \frac{0,9 \cdot 300}{\sqrt{20}} 2,5 = 152,46cm$$

Pero analizando las correcciones introducidas por diferentes factores:

$$l_d = \left[\frac{\psi_t \psi_e \psi_s \lambda}{\left(\frac{c_b + K_{tr}}{d_b} \right)} \right] 152,46 \frac{A_{calc}}{A_{real}}$$

- $\psi_t = 1$ por estar ubicadas las barras en zona de alta adherencia
- $\psi_s = 1$ por ser el diámetro N° 25
- $\lambda = 1$ por ser hormigón común
- $\psi_e = 1$ por no tener revestimiento las barras
- $\frac{A_{calc}}{A_{real}} = \frac{25,05}{25,5} = 0,98$
- Por el recubrimiento y espaciamiento de las barras

Calculando el valor de c

$$\text{La separación de las barras será: } s = \frac{30-8-3 \cdot 2,5}{2} = 7,25 \text{ cm}$$

$$\text{El recubrimiento al centro de la barra: } d_c = 4 + \frac{2,5}{2} = 5,25 \text{ cm}$$

$$\text{Tomando como } c \text{ el menor entre } d_c \text{ y } \frac{s+d_b}{2}, c = 4,875 \text{ cm}$$

$$\text{Además considerando } K_{tr} = 0, \text{ podrá calcularse el término } \frac{c+K_{tr}}{d_b} = 1,95$$

Finalmente:

$$l_d = 152,46 \frac{1 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 0,98}{1,95} = 152,46 \cdot 0,503 = 76,62 \text{ cm}$$

Utilizando la **Tabla A-6** para la CONDICIÓN 1, separación entre barras mayor de $2d_b$, y para:

$$\psi_t = 1, \frac{A_{calc}}{A_{real}} = 0,98$$

$$l_d = 41d_b \cdot 0,98 = 100,45 \text{ cm}$$

Entonces las longitudes reales de los cortes de barras serán:

Como el valor de l_d es pequeño y cercano a d , predominará este como prolongación a partir del punto del corte de barras, entonces:

$$L_{11} = L_1 + 2 \cdot d$$

$$L_{11} = 7,2 + 2 \cdot 0,71 = 8,62 \text{ m}$$

Las dos barras que llegan al apoyo están debidamente ancladas pues la longitud de anclaje necesaria es menor que la distancia desde el punto del corte de barras al apoyo.

Refuerzo negativo

Como se emplean barras de diferentes diámetros, para el corte es útil manejar el concepto de número de barras equivalente. Entonces el total de barras será:

$$n_e = \frac{A_{real}}{A_b} = \frac{44,02}{10,06} = 4,4$$

Es decir que las 2 barras N° 16 equivalen a 0,4 N° 36. Entonces realizando un solo corte, de las 4 barras N° 36:

$$L_{B1} = L_n \frac{n_1}{n_e} = 2,65 \frac{4}{4,4} = 2,41 \text{ m}$$

Colocadas a cada lado del apoyo

Calculando la longitud de anclaje:

$$l_{db} = \frac{0,9f_y}{\sqrt{f_c}} d_b$$

$$l_{db} = \frac{0,9 \cdot 300}{\sqrt{20}} 3,6 = 219,54m$$

Pero analizando las correcciones introducidas por diferentes factores:

$$l_d = \left[\frac{\psi_t \psi_e \psi_s \lambda}{\left(\frac{c_b + K_{tr}}{d_b} \right)} \right] 219,54 \frac{A_{calc}}{A_{real}}$$

- $\psi_t = 1,3$ por estar ubicadas las barras en zona de baja adherencia
- $\psi_s = 1$ por ser el diámetro N° 36
- $\lambda = 1$ por ser hormigón común
- $\psi_e = 1$ por no tener revestimiento las barras
- $\frac{A_{calc}}{A_{real}} = \frac{43,3}{44,22} = 0,98$
- Por el recubrimiento y espaciamiento de las barras

Calculando el valor de c

La separación de las barras será: $s = \frac{30-8-3 \cdot 3,6}{2} = 5,6cm$

El recubrimiento al centro de la barra: $d_c = 4 + \frac{3,6}{2} = 5,8cm$

Tomando como c el menor entre d_c y $\frac{s+d_b}{2}$, $c = 3,6cm$

Además considerando $K_{tr} = 0$, podrá calcularse el término $\frac{c+K_{tr}}{d_b} = 1,28$

Finalmente:

$$l_d = 219,54 \frac{1,3 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 0,98}{1,28} = 219,54 \cdot 0,99 = 218,89cm$$

Utilizando la **Tabla A-6** para la CONDICIÓN 2, separación entre barras menor de $2d_b$, y para:

$$\psi_t = 1,3, \quad \frac{A_{calc}}{A_{real}} = 0,98$$

$$l_d = 61d_b \cdot 1,3 \cdot 0,98 = 279,77cm$$

Entonces las longitudes reales de los cortes de barras serán:

Conociendo que $L_{B1} = 2,41m$, se escoge el mayor de los siguientes valores:

$$L_{21} = L_{B1} + d = 3,12m$$

$$L_{21} = l_d = 2,8m$$

Predominando la primera condición

En la figura 8,18 se representa la longitud y posición de cada refuerzo.

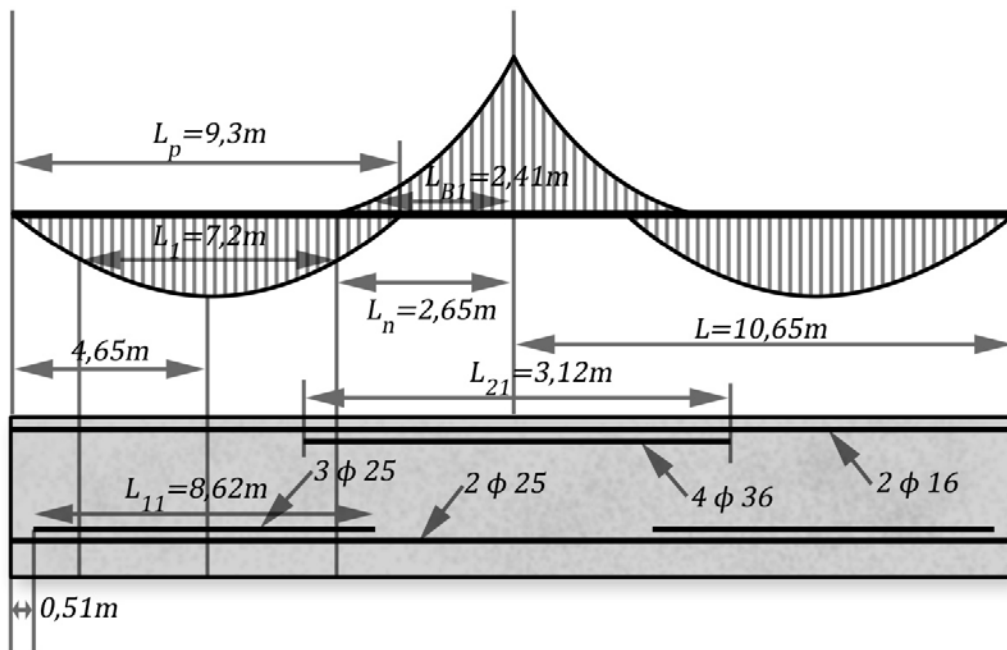
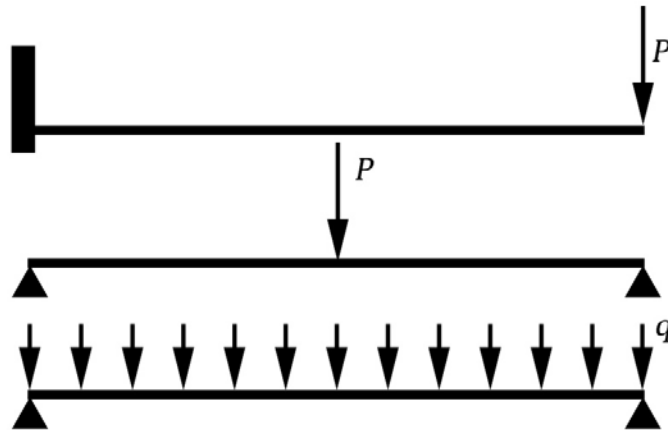


Figura 8,18: Corte de barras

EJERCICIOS PROPUESTOS

- 1) Para una viga continua de 3 luces, con sección rectangular; $b = 40\text{cm}$, $h = 80\text{cm}$ se obtuvieron las siguientes áreas de acero de cálculo
 - $A_s = 22\text{cm}^2$ Momento positivo en la luz central
 - $A_s = 33\text{cm}^2$ Momento positivo en las luces externas
 - $A_s = 46\text{cm}^2$ Momento negativo en los apoyos
 - a) Calcule las áreas de refuerzo a colocar
 - b) Obtenga el recubrimiento real y el espaciamiento entre barras si la viga es prefabricada y será colocada en una zona con agresividad ALTA
 - c) Calcule la longitud de anclaje necesaria en cada caso, utilizando la expresión más detallada y las tablas simplificadas si $f_c' = 25\text{MPa}$ y $f_y = 420\text{MPa}$
- 2) Resuelva el ejercicio anterior para $b = 30\text{cm}$, $f_c' = 30\text{MPa}$ y $f_y = 300\text{MPa}$
- 3) Obtenga las expresiones para obtener los largos teóricos para realizar el corte de barras en las vigas mostradas en la figura 8,19

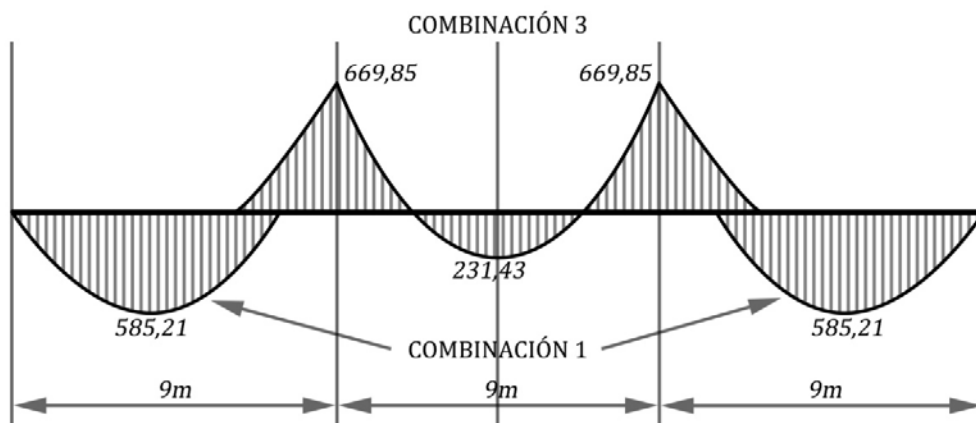
**Figura 8,19 Ejercicio propuesto 3**

- 4) Para una viga continua, se muestran en la figura 8,20 los gráficos de momentos redistribuidos

Si las cargas de cálculo son

$$q_{CU} = 22,44\text{kN/m}$$

$$q_{CP} = 65,63\text{kN/m}$$

**Figura 8,20 Ejercicio propuesto 4**

La sección de $b = 30\text{cm}$ y $h = 90\text{cm}$ y las áreas de refuerzo obtenido en los cálculos son

$$A_s = 10,13\text{cm}^2 \quad \text{Momento positivo en la luz central}$$

$$A_s = 26,52\text{cm}^2 \quad \text{Momento positivo en las luces externas}$$

$$A_s = 32,41\text{cm}^2 \quad \text{Momento negativo en los apoyos}$$

- a) Obtenga los puntos de momento cero
 - b) Calcule, para cada sección, las áreas de refuerzos reales y su distribución en la sección. Obtenga para cada caso del recubrimiento real y el espaciamiento entre barras conociendo que la viga fue fabricada “in situ” y está en una zona con agresividad MEDIA
 - c) Calcule el valor de l_d necesario en cada caso, si $f_c' = 20\text{MPa}$ y $f_y = 300\text{MPa}$
- 5) En una viga de 20m de luz se dispone de barras de 9m de longitud. Si la sección tiene el refuerzo indicado en la figura 8, 21, realice el empalme de las barras por solape y por soldadura. Consulte las especificaciones en este caso.

$$f_c' = 25\text{MPa}$$

$$f_y = 420\text{MPa}$$

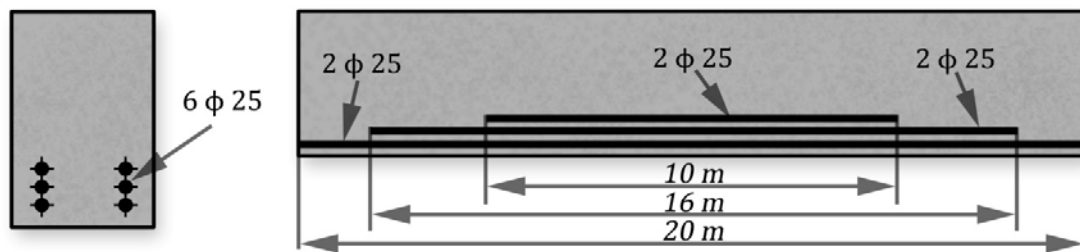


Figura 8,21 Ejercicio propuesto 5

- 6) Para condiciones similares realice el empalme de las barras del ejercicio 3
- 7) Para la siguiente viga empotrada en la columna
 - a) Si $f_y = 420\text{MPa}$ y $f_c' = 20\text{MPa}$, compruebe si es posible anclar las barras dentro de la columna
 - b) De no ser posible proponga la solución acudiendo a ganchos de anclaje

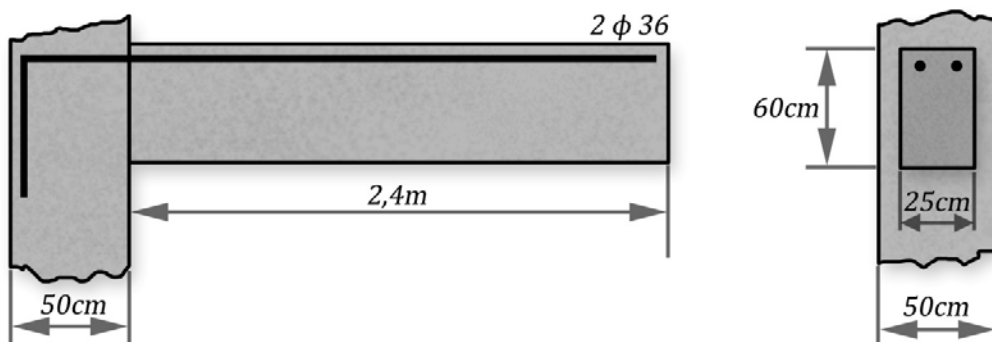


Figura 8,22: Ejercicio propuesto 7

- 8) Para la viga prefabricada y simplemente apoyada que se muestra en el esquema de la figura 8,23, situada en una zona con BAJA agresividad
 - a) Realice la distribución de las barras en la sección

- b) Obtenga los cortes de barras que considere, calculando los largos teóricos
 - c) Calcule la longitud de anclaje necesaria
 - d) Calcule las longitudes reales de las barras y realice el esquema final de la solución
- Si $f_y = 420\text{MPa}$ y $f'_c = 25\text{MPa}$

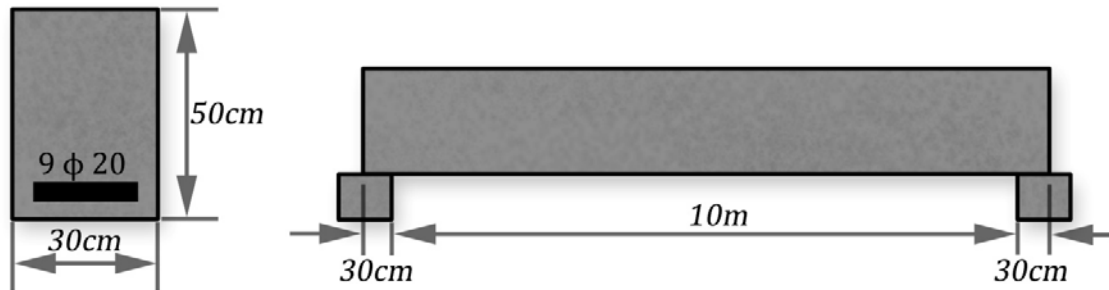


Figura 8,23: Ejercicio propuesto 8

BIBLIOGRAFÍA CONSULTADA

1. American Concrete Institute. Building Code Requirements for Reinforced Concrete, ACI 318 – 02, Detroit, Michigan. 2005
2. ACI 318 02 Requisitos para Hormigón Estructural. PCA 2002.
3. Babe Ruano M. “Elementos de Estructura de Hormigón Armado”. Tomo I. Editorial Pueblo y Educación 1978. la Habana. Cuba. 1978
4. Babe Ruano M. “Hormigón Armado para Arquitectos. Editorial ISPJAE 1986
5. Baykov, V. y E. Sigalov. Estructuras de Hormigón Armado. Moscú: Ed. Mir, 1986
6. Medina Torri F.; Ruiz Alejo L. “Hormigón Estructural 1” Editorial Pueblo y Educación. La Habana. Cuba. 1991
7. ---- “Hormigón Estructural II” Editorial Pueblo y Educación. La Habana. Cuba. 1987
8. N.C. 250–2004. Requisitos de durabilidad para el diseño y construcción de Edificaciones y Obras Civiles de hormigón estructural. 2004
9. N.C. 053–039–1997. Obras de Hormigón Armado. Principios Generales y Métodos de Cálculo. 1997
10. Nilson, H. A. Diseño de Estructuras de Concreto Presforzado. México: Ed. Limusa, 1999
11. Park, R. y T, Paulay. Estructuras de Concreto Reforzado. México: Ed. Limusa, 1979

CAPÍTULO 9

Vigas Continuas

9,1 INTRODUCCIÓN

Las vigas son elementos casi indispensables en los edificios y en las estructuras, siempre están presentes, su característica fundamental es el predominio de la flexión (M y V) sobre otras solicitaciones, como carga axial o momento torsor

En este capítulo se sobrepasará el análisis de la flexión a nivel de sección y se profundizará en la evaluación de la viga como elemento, particularmente en las vigas continuas que son las que ofrecen el mayor grado de complejidad.

El problema general de diseño de vigas adquiere otra connotación en el caso de vigas continuas, donde no se habla tan solo de una combinación crítica de cargas, sino de una envolvente crítica producto de la actuación o no de cargas temporales en partes de la estructura

De lo estudiado en este sentido hay que cuestionarse: ¿cómo definir la solicitación con la que se ha de diseñar las diferentes secciones en la estructura mostrada?

Otros conceptos aplicables al Hormigón en su comportamiento variarán totalmente las condiciones de diseño de tales estructuras, fundamentalmente en la capacidad de este material de comportarse plásticamente, en su conjunto o cada uno de sus componentes (hormigón, acero).

9,2 FUNCIONES Y CLASIFICACIÓN

Las vigas pueden clasificarse de diversas formas en función de:

- Comportamiento estructural: Rectangulares, T, con A' etc.
- Como transmiten los cargos: Principales, Secundarias
- Papel en la estructura: Intermedias, cerramientos, arriostre, asentamiento, puente – grúa.
- Método constructivo: In-situ, Prefabricado, Mixtas

9,3 LUZ DE CÁLCULO

La **luz de cálculo** de los elementos que no estén contruidos monolíticamente con sus apoyos, se define como la **luz libre entre los apoyos (L_n) más la altura del elemento**, y en ningún caso debe superar el valor de la distancia entre los centros de apoyo (L_c)

Para la determinación de los **momentos en pórticos o en elementos continuos**, la luz de cálculo se debe adoptar igual a la distancia entre ejes de apoyos.

Para las **vigas construidas monolíticamente con sus apoyos**, se permite realizar el diseño en base a los momentos en las caras de los apoyos.

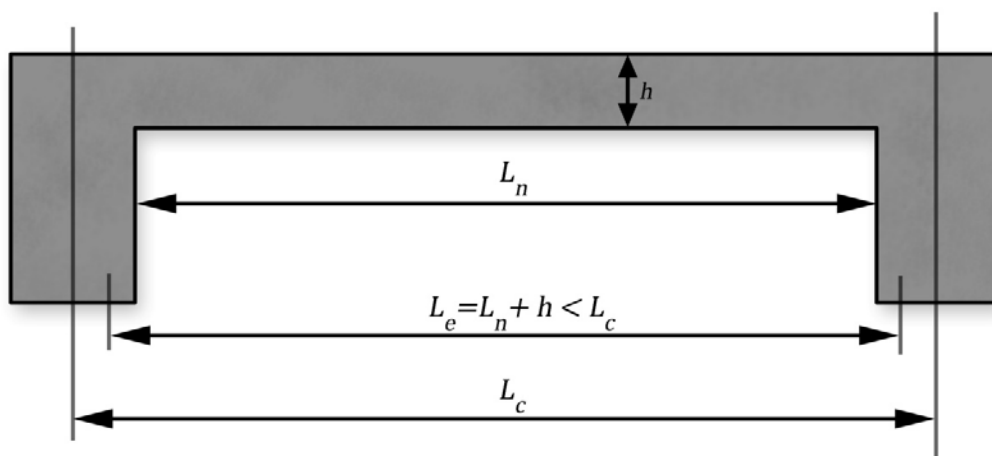


Figura 9.1: Luces de cálculo

9.4 DETERMINACIÓN DE LAS CARGAS

En la determinación de las cargas que transmiten las losas sobre vigas, a lo conocido anteriormente de aplicar la carga tributaria, es importante diferenciar el caso de una losa continua de la que no lo es.

Para una losa isostática la carga sobre B es la que se tributa estáticamente de las losas colindantes

Sin embargo para una losa continua, como se muestra en la figura 9.2, Medina y Ruiz plantean el cálculo de la carga en B como el resultado del cortante a ambos lados del mismo:

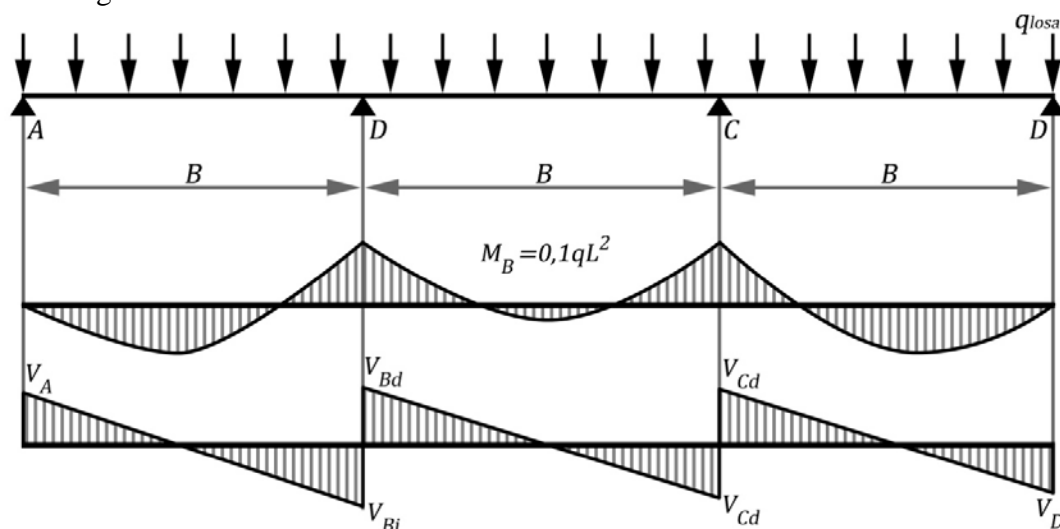


Figura 9.2: Cortante sobre las vigas por el efecto de la continuidad de la losa

Donde

$$V_{BA} = \frac{q \cdot L}{2} + \frac{M_{izq} - M_{der}}{2} = \frac{q \cdot L}{2} - \frac{M_B}{L}$$

$$V_{BA} = \frac{q \cdot L}{2} + \frac{0 - M_B}{2} = \frac{q \cdot L}{2} - \frac{M_B}{L}$$

$$V_{BC} = \frac{q \cdot L}{2} + \frac{M_B - M_C}{L}$$

y finalmente

$$V_B = V_{BA} + V_{BC} = q \cdot L + \frac{2M_B}{L} - \frac{M_C}{L} \geq q \cdot L$$

Con lo que se demuestra que en la primera viga la carga será mayor que la carga tributaria debido a la hiperestaticidad del conjunto

9,5 DETERMINACIÓN DE LAS SOLICITACIONES

El cálculo de las solicitaciones puede obtenerse por cualquier método elástico de los estudiados en Resistencia de Materiales y aparecen como coeficientes en cualquier manual. En los anexos, la Tabla A-9, se exponen la propuesta del Baykov y Sigalov, que puede servir de referencia para cálculos manuales.

Sin embargo la acción de las cargas de uso pueden provocar efectos de carga – descarga que introducen importantes cambios en la determinación las solicitaciones pésimas. En el siguiente ejemplo puede apreciarse esta situación, donde las cargas de uso se colocan en la posición más desfavorable para el voladizo o la luz central, lo que se plasma en la figura 9,3.

¿Cuál será la combinación de M_u y V_u más desfavorable para la viga?

Finalmente obtenemos la envolvente de momentos y cortante sumando CP + CU para ambas combinaciones, como se muestra en la figura 9,4

9,6 LA FLUENCIA PLÁSTICA EN EL HORMIGÓN ARMADO.

Ha sido costumbre analizar las estructuras en régimen lineal recurriendo a procedimientos sustentados en hipótesis que presuponen, pequeñas deformaciones y comportamiento elástico del material

Es cierto que estas hipótesis resultan aceptables en no pocas de las estructuras que se analizan y recurriendo a los materiales que con mayor frecuencia se emplean, incluso cuando se trata del hormigón que presenta un comportamiento sensiblemente elástico para niveles de tensiones por debajo del 45% aproximadamente de su resistencia, valores tales que se reproducen generalmente para cargas de servicio.

Sin embargo, ya hoy es una realidad el cálculo de secciones en condiciones límites de resistencia y para entonces las hipótesis de comportamiento elástico del material deja de ser consistente. Si además se tiene en cuenta que en determinadas tipologías estructurales los corrimientos empiezan a ser significativos producto de la mayor esbeltez que se logra con la ingeniería actual, parece ser que los análisis lineales no son lo suficientemente precisos como para continuar abusando de su empleo.

Las fuentes fundamentales de no linealidad son:

- Los cambios sensibles de geometría bajo el efecto de las cargas (agudizados en algunas tipologías estructurales como, por ejemplo, las estructuras colgantes).
- Las inherentes a la no linealidad de las leyes tensodeformacionales del material.

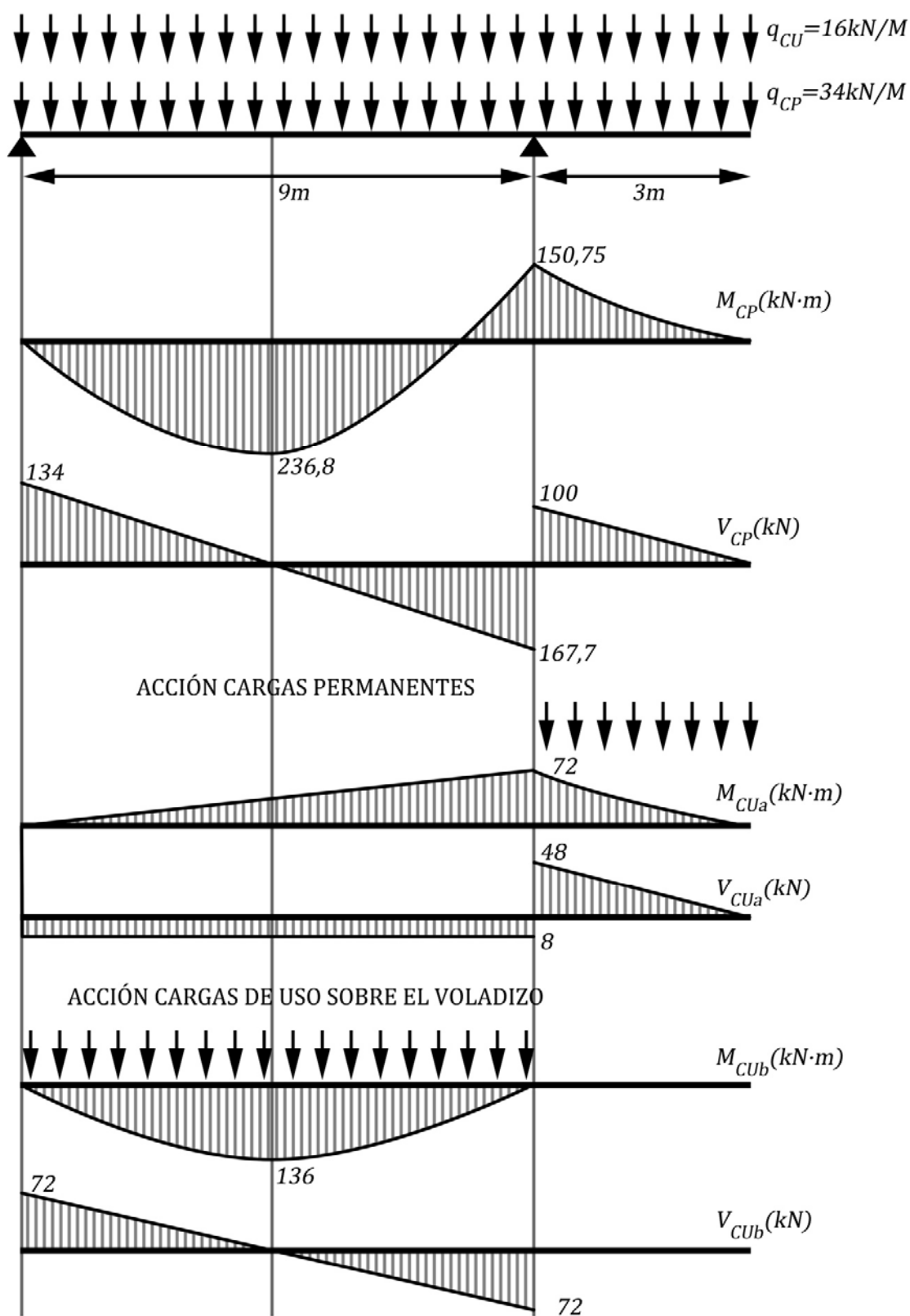


Figura 9,3: Combinación pésima para viga con voladizo

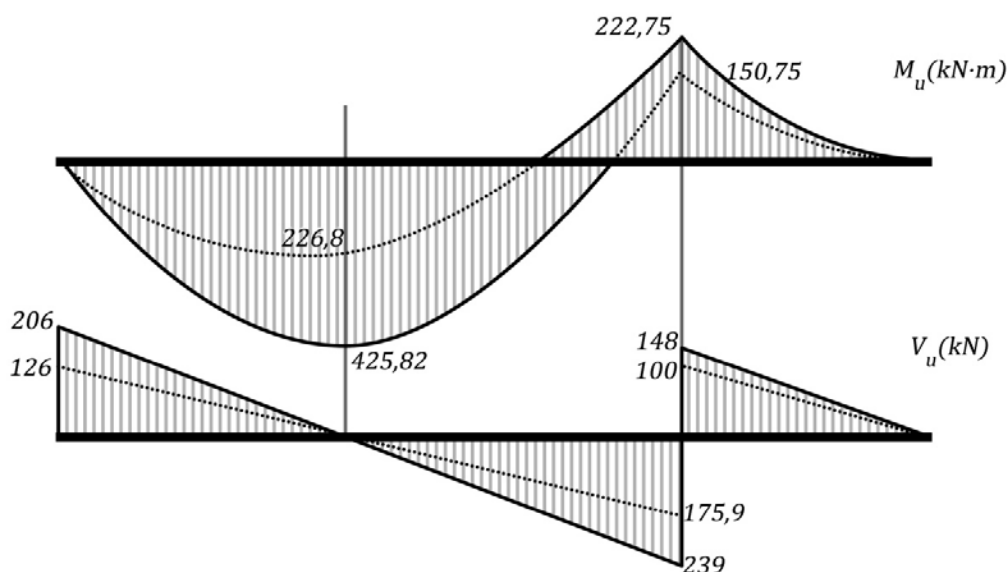


Figura 9,4: Envolvente de momento y cortante

Cuando se trata de estructuras isostáticas un análisis lineal conduce a leyes de esfuerzos que en realidad no se modifican puesto que la distribución de fuerzas interiores está regida sólo por el equilibrio, no así las deformaciones que varían respecto de las elásticas cuando se evalúan con procedimientos de no linealidad.

Ya para las estructuras hiperestáticas la situación es bien diferente puesto que la distribución de las fuerzas internas no sólo depende del equilibrio, sino también de las rigideces relativas de los elementos que conforman la estructura. Esto significa que cuando se degrada la rigidez de un elemento en particular, por ejemplo, a causa de la fisuración que tiene lugar en el hormigón o porque entre en una etapa de comportamiento inelástico, se tiene que modificar la distribución de fuerzas interiores en función de las rigideces relativas de los elementos que se conectan al que ha perdido rigidez, disminuyendo el nivel de esfuerzo que este último puede cargar. Es como si el elemento que ha perdido rigidez pidiera a aquellos otros a los que se conecta, y se hallen en mejor estado: ***“por favor, comiencen a tomar cualquier incremento de fuerza a partir de ahora pues yo no puedo hacerlo, y háganlo respetando la rigidez que cada uno tenga, es decir, tomando más cuanto mayor sea su rigidez”***

A esta modificación de las fuerzas interiores dentro de la estructura se le llama ***redistribución por comportamiento inelástico***.

Los niveles de redistribución se incrementan si tratándose de diseños dúctiles, en alguna sección del elemento el acero comienza a fluir. A partir del momento que originó la entrada en fluencia del refuerzo, llamado momento de fluencia, la sección se ve prácticamente incapacitada de tomar momentos mayores aunque si estará en condiciones de sostener aquel, a pesar de que la deformación de la armadura se vaya incrementando progresivamente (recuérdese que si se trata de un acero dúctil, al alcanzar la deformación de fluencia ϵ_y la tensión se considera constante, e igual a f_y , y en consecuencia la fuerza que entrega la armadura al equilibrio de la sección no varía prácticamente la fuerza $T = A_s f_y$).

Ese incremento de deformación que va teniendo lugar en la armadura traccionada hace que la sección acreciente su giro para comenzar a comportarse como una articulación, llamada articulación plástica, que a diferencia de la articulación elástica perfecta sí es capaz de admitir momento.

En la sección de Hormigón Armado de una viga el fenómeno de la fluencia se presenta de forma muy clara, como se muestra en la curva de comportamiento M vs φ de la figura 9,5, para una sección dúctil, como está reglamentado en las normativas vigentes

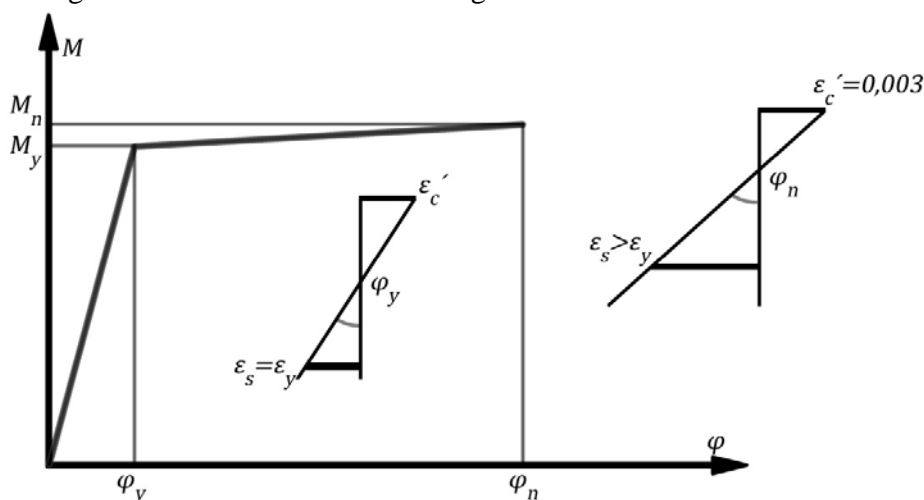


Figura 9, 5: Curva de comportamiento de una viga de HA

Donde se expresa con claridad como para M_n (momento máximo) se produce una curvatura φ_n superior a la que ocurre al producirse el momento de fluencia M_y , curvatura llamada φ_y .

Obviamente en el momento del fallo $M_n - \varphi_n$ la sección ha girado y se convierte prácticamente en una articulación, llamada plástica.

La diferencia que existe entre una articulación plástica y una real, está dada por el comportamiento de la primera en dos etapas:

- **1ra ETAPA** para $M < M_u$ se comporta como una sección rígida, un empotramiento
- **2da ETAPA** para $M \geq M_u$ la sección falla y se transforma en una articulación plástica

Pero toda sección no tiene la capacidad de convertirse en una articulación plástica. Esta capacidad está estrechamente vinculada con la ductilidad de la sección, como se esquematiza en la figura 9,6. Una sección con un fallo FRAGIL al alcanzar la rotura solo ha sufrido pequeñísimas deformaciones y por tanto no llega a girar lo suficiente que lo convierta en una articulación plástica.

Es evidente que la formación de una rótula plástica en un elemento isostático lo transformaría en un mecanismo y hay que evitarlo.

Sin embargo, en el caso de las estructuras hiperestáticas cuando en una sección se forma una articulación plástica ella estará en condiciones de mantener constante la capacidad de momento, precisamente el momento que originó la entrada en fluencia de la armadura, y a partir de aquí transformar su esquema de trabajo para nuevos incrementos de la carga, al comenzar a funcionar la sección como una articulación y modificando en consecuencia la manera cómo se distribuyen las fuerzas interiores a nivel de sección. Es como si la sección no admitiera más carga porque la armadura ha entrado en fluencia y le pidiera a otras secciones del propio elemento *“por favor, comiencen a*

tomar cualquier incremento de fuerza a partir de ahora pues yo no puedo hacerlo, y háganlo mientras su armadura no fluya pues cuando esto ocurra sentirán mi misma incapacidad y deberán Uds. pedir mi misma ayuda.”

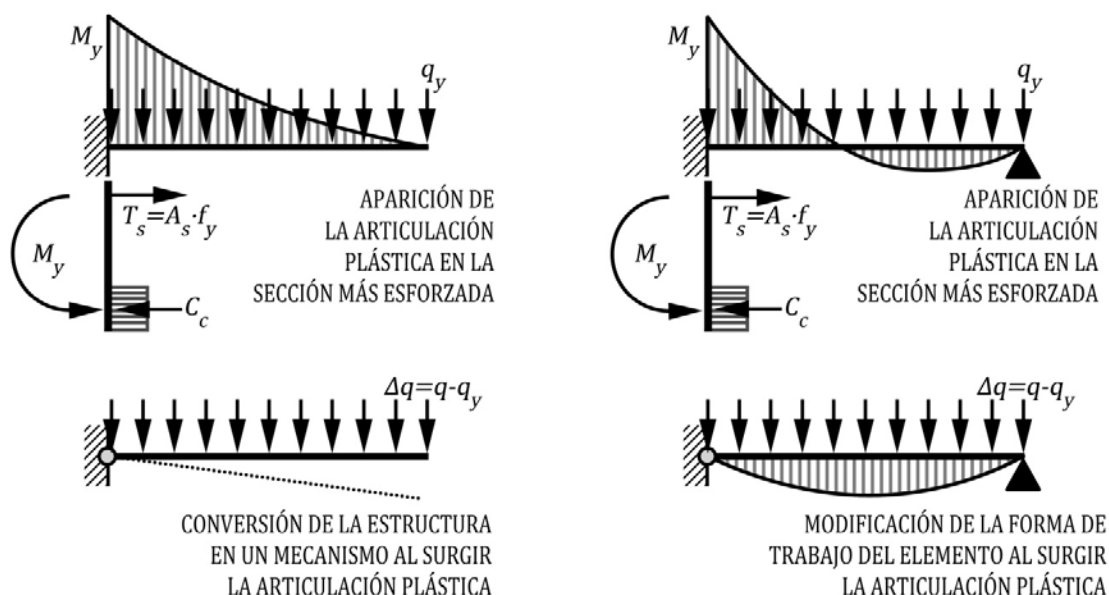


Figura 9.6: Consecuencias del surgimiento de la articulación plástica en el caso de elementos isostáticos e hiperestáticos.

En el caso de las estructuras hiperestáticas el colapso sobreviene entonces cuando se hayan formado tal cantidad de articulaciones plásticas hasta convertir la estructura en un mecanismo. Si el grado de hiperestaticidad es n , al formarse $n + 1$ articulaciones plásticas la estructura se transforma en un mecanismo. En ocasiones el fallo puede sobrevenir también si el giro que experimenta la sección en la que aparece la articulación es de tal magnitud que impida mantener el momento resistente.

9.7 LA REDISTRIBUCIÓN DE MOMENTOS

La formación de articulaciones plásticas es un recurso de diseño que permite un aprovechamiento mayor de la capacidad resistente en vigas continuas.

Puede analizarse este fenómeno utilizando un ejemplo desarrollado por Meli para una viga continua con dos luces iguales, como se muestra en la figura 9.7, donde en toda la viga las secciones tienen una capacidad resistente M_u

En el gráfico de momentos isostáticos se aprecia como $M_u > M_C = M_B$, por tanto el fallo se alcanzará inicialmente para el apoyo intermedio C cuando $M_C = M_u$, quedando en las restantes capacidad resistente

Por tanto el fallo a la sección se producirá a un valor de P que responde a:

$$M_C = M_u = 0,188P \cdot L$$

$$P = 5,32 \frac{M_u}{L}$$

Cuando $M \geq M_u$ se produce una articulación plástica en C y el momento se redistribuye hacia B y D . El incremento ΔM se muestra en la figura 9.7 para el gráfico de momento redistribuido.

Siendo el valor máximo de la redistribución:

$$\Delta M = M_C - M_B$$

$$\Delta M = 0,188P \cdot L - 0,125P \cdot L = 0,063P \cdot L$$

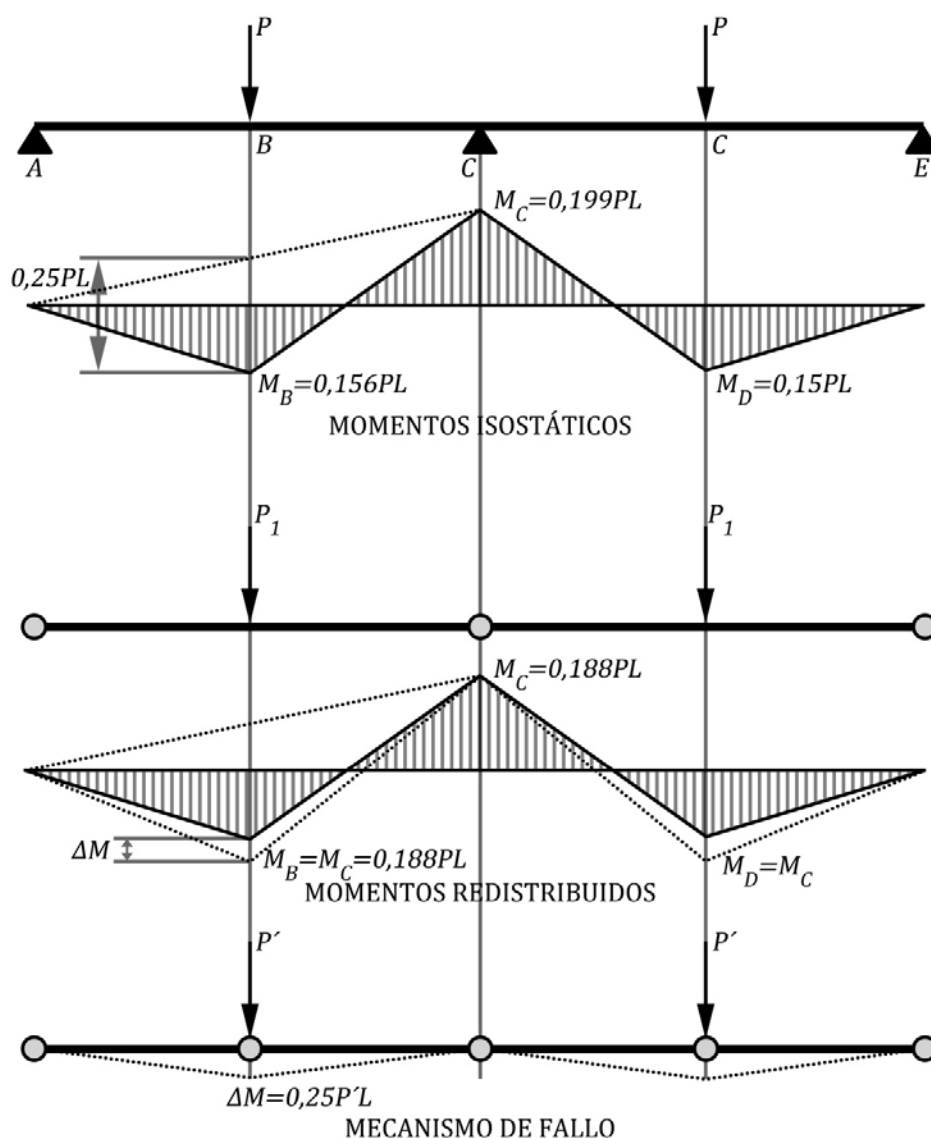


Figura 9.1: Formación de articulaciones plásticas

Si llamamos P' al incremento de carga producto de la redistribución

$$\Delta M = 0,25P' \cdot L = 0,032P \cdot L$$

$$P' = 0,128P$$

Por lo tanto la carga final que es capaz de resistir la viga será

$$P_1 = P + P' = 1,128P$$

Produciéndose un incremento de la capacidad portante de un 13%. Este ejemplo demuestra la capacidad residual de los elementos hiperestáticos y su comportamiento ante el fallo.

En el diseño se aprovecha esta propiedad para lograr elementos más económicos buscando redistribuciones que reduzca los momentos más grandes

Aprovechando la propiedad del momento isostático, se puede lograr redistribución geométrica. Por ejemplo para disminuir el momento M_C en valor ΔM , se incrementa M_B en $\frac{\Delta M}{2}$ como se muestra en la figura 9,8

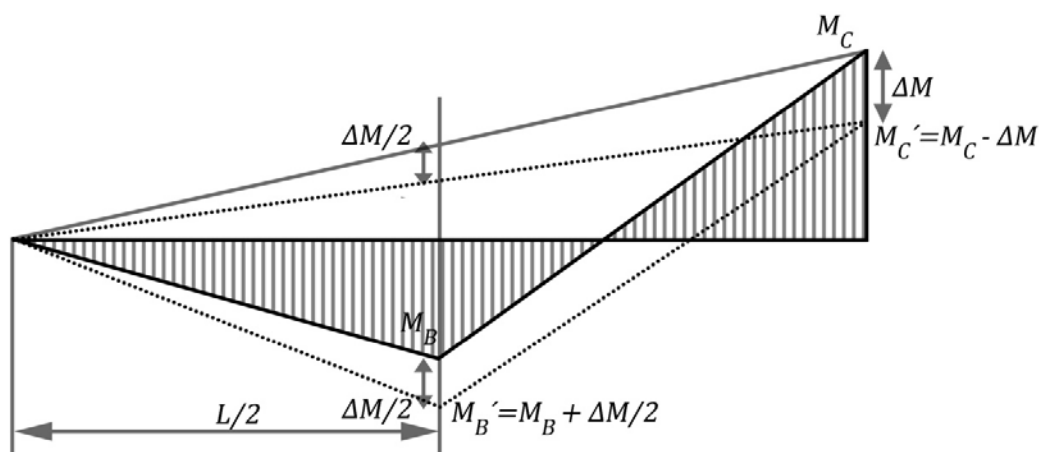


Figura 9,8: Redistribución de momentos

Procedimiento semejante se utiliza para gráficos provocados por cargas distribuidas

La redistribución de momentos es un fenómeno común en estructuras hiperestáticas, que pueden ser previstas y provocadas en el diseño o que surge sin que se prevea por el constructor.

Es muy frecuente en la construcción de losas para viviendas una ejecución continua y no colocar acero negativo sobre los apoyos. En esta zona la capacidad de resistir momentos es prácticamente nula y para cargas de servicio se produce una articulación plástica, como se muestra en la figura 9,9. La estructura no falla por los sobre diseños de estos elementos entre apoyos y por tanto pueden producirse redistribuciones de hasta un 100%. No obstante estas estructuras sufren grandes grietas y deformaciones que las invalidan en su funcionamiento. Por tanto el % de redistribución tiene que controlarse en función de estos problemas

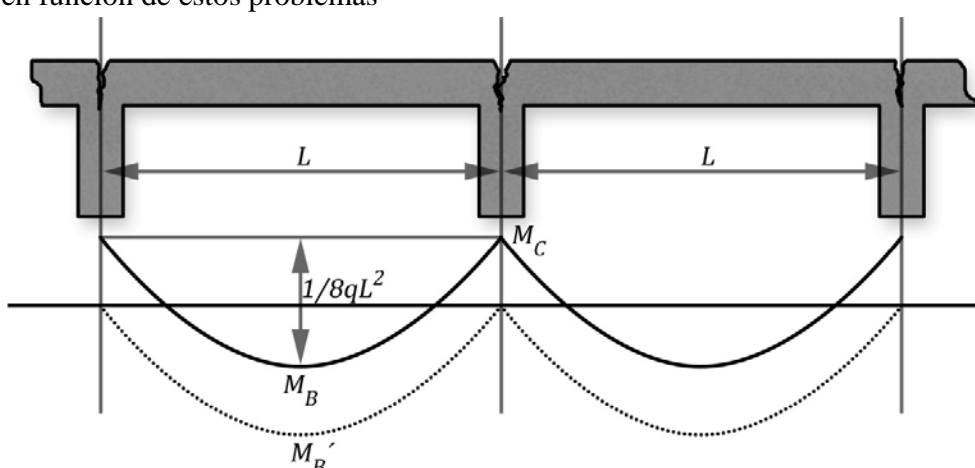


Figura 9,9: Redistribuciones de momentos del 100% en losas

9,8 LIMITACIONES EN LAS REDISTRIBUCIONES DE MOMENTO

Los límites de aplicación de la redistribución de momentos en articulaciones plásticas son resumidas por el PCA, en interpretación de las disposiciones del ACI, de la siguiente manera:

1. Es aplicable a elementos continuos solicitados a flexión.
2. Los momentos flectores se deben determinar mediante métodos analíticos. No está permitido redistribuir momentos calculados mediante métodos aproximados.
3. **Sólo se permite redistribuir los momentos cuando la deformación específica neta de tracción, ϵ_t , no es menor que 0,0075 .**

Esta restricción es semejante, en su sentido práctico por la adoptada en las normativas anteriores a las del ACI 318-02 y que relaciona estas restricciones con la cuantía balanceada. Por tanto las normas cubanas proponen como límite de la ductilidad de una sección para admitir redistribuciones cuando:

$$\omega - \omega' = 0,5\omega_b$$

4. **El máximo porcentaje de disminución o aumento admisible para el momento negativo es igual a $1000\epsilon_t$, pero nunca puede ser mayor que 20 por ciento.**

O en función de la cuantía balanceada, el porcentaje se obtendrá por:

$$\%RM = 20 \left(1 - \frac{\omega - \omega'}{\omega_b} \right)$$

5. El ajuste de los momentos negativos se realiza para cada configuración de cargas considerada. Luego los elementos se dimensionan para los máximos momentos ajustados obtenidos de todas las condiciones de carga.
6. El ajuste de los momentos negativos en los apoyos de cualquier tramo requiere ajustar los momentos positivos de dicho tramo. Para mantener el equilibrio, una disminución de un momento negativo en un apoyo requiere un aumento del momento positivo del tramo.
7. Se debe mantener el equilibrio estático en todas las uniones, antes y después de la redistribución de los momentos.
8. En el caso de momentos negativos desiguales actuando a ambos lados de un apoyo fijo (es decir, cuando los tramos adyacentes son desiguales), la diferencia entre estos dos momentos se toma hacia el apoyo. Si se ajustan uno o ambos momentos negativos, la diferencia resultante entre los momentos ajustados se toma hacia el apoyo.

9,9 MÉTODO DIRECTO DE REDISTRIBUCIÓN. COEFICIENTES PLÁSTICOS PARA VIGAS CONTINUAS

Como una simplificación en el diseño de vigas continuas y losas en una dirección se brindan al proyectista coeficientes para el cálculo de las solicitaciones que admiten un cierto grado de redistribuciones de momento. Se admite su aplicación siempre que:

- a) Elementos prismáticos
- b) Elementos continuos de dos o más luces.
- c) Luces iguales o al menos con una diferencia entre luces adyacentes no mayor del 20%.
- d) Cargas uniformemente distribuidas.
- e) La carga viva no debe exceder en tres veces la carga muerta

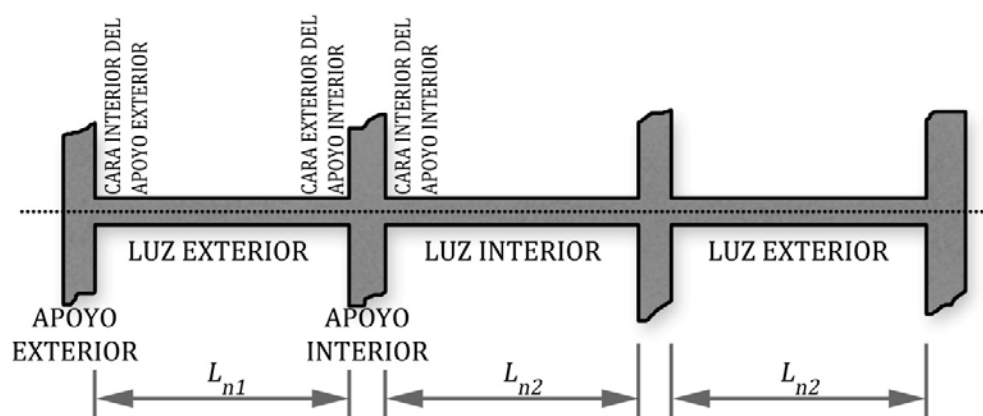


Figura: 9,10 Descripción de los términos que describe el método.

MOMENTO POSITIVO

LUCES EXTERIORES

- Si el extremo discontinuo no está restringido $\frac{q_u L_n^2}{11}$
- Si el extremo discontinuo se construye integral con el apoyo $\frac{q_u L_n^2}{14}$

LUCES INTERIORES

$$\frac{q_u L_n^2}{16}$$

MOMENTO NEGATIVO

APOYOS EXTERIORES:

Cuando el apoyo del elemento que se analiza no ofrece restricción al giro: 0

Cuando el elemento que se analiza se construye integralmente con el que le sirve de apoyo:

- Cuando el apoyo es una viga de borde o una viga principal $\frac{q_u L_n^2}{24}$
- Cuando el apoyo es una columna $\frac{q_u L_n^2}{16}$

APOYOS INTERIORES:

En la cara exterior del primer apoyo interior

- Dos Luces $\frac{q_u L_n^2}{9}$
- Más de dos Luces $\frac{q_u L_n^2}{10}$

En otras caras de apoyos interiores

$$\frac{q_u L_n^2}{11}$$

Estos coeficientes se pueden apreciar en las figura 9,11 y 9,12

Ejercicio 9,1

Obtenga los momentos flectores redistribuidos de la viga continua de la figura 9,13, donde las cargas permanentes y de uso están mayoradas son:

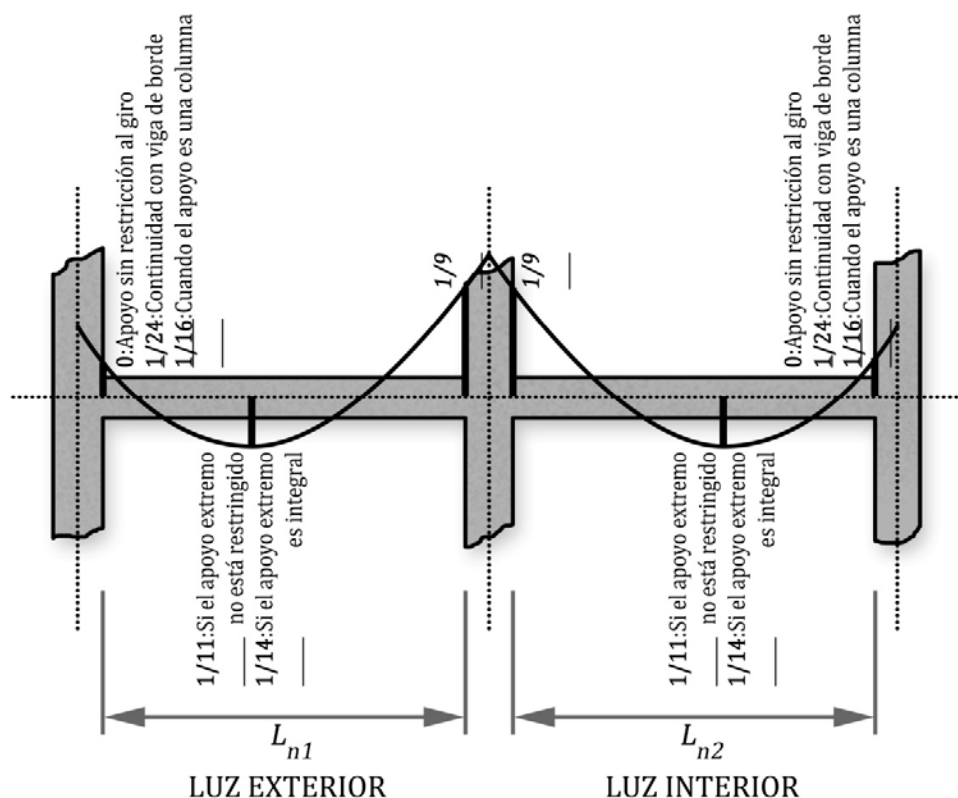


Figura: 9,11 Coeficientes de redistribución para el caso de vigas de dos claros.

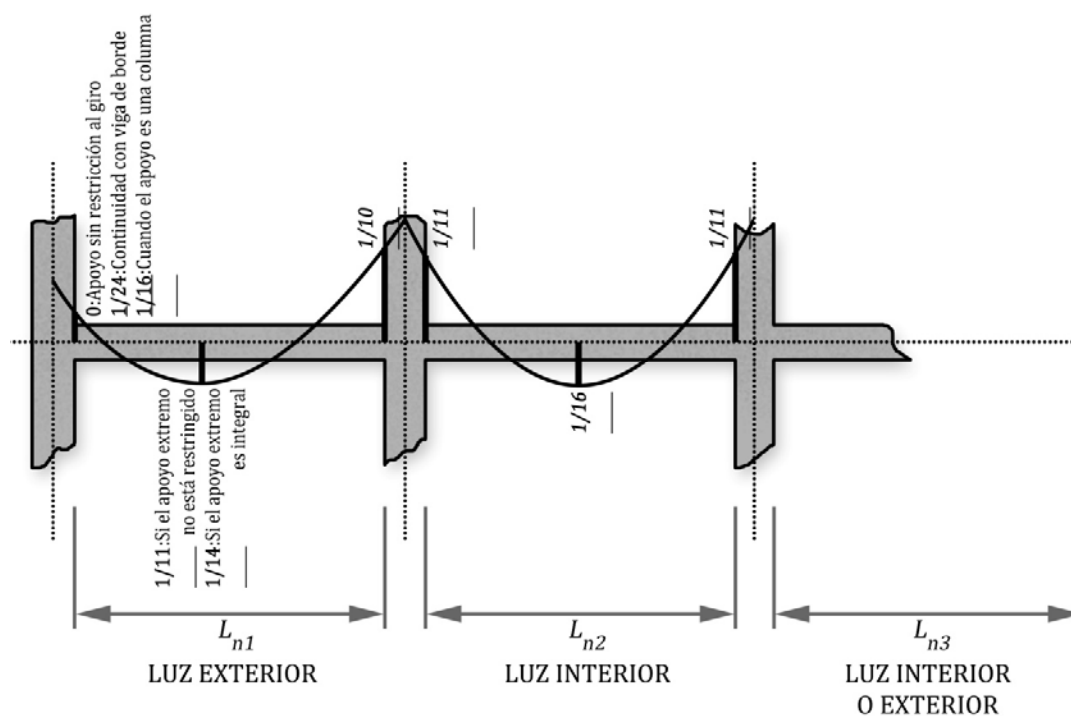


Figura: 9,12 Coeficientes de redistribución para el caso de vigas de tres o más claros.

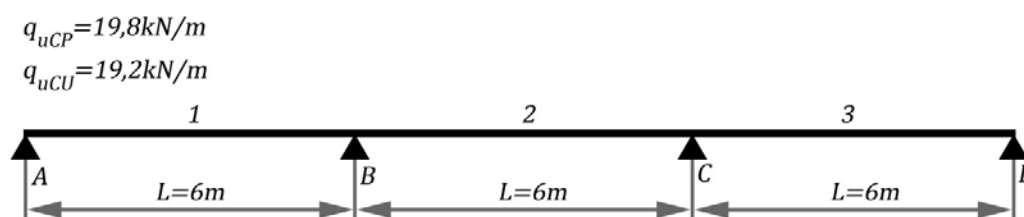


Figura 9,13: Ejercicio 9,1

Cálculos y discusión

a) Cálculo de las solicitaciones elásticas

Considerando que las luces son iguales podemos utilizar las tablas clásicas para el cálculo de los momentos elásticos recogidas en la **Tabla A-9**:

$$M = COEF \cdot qL^2$$

Momentos que se calculan para diferentes variantes de CARGA DE USO, como se muestra en las Tabla 9,1 y en la figura 9,14

- (A) Momento positivo mayor en primera y tercera luz
- (B) Momento negativo mayor segunda luz
- (C) Momento positivo mayor segunda luz
- (D) Momentos negativos mayores sobre los apoyos

TABLA 9.1. Momentos flectores para diferentes combinaciones de CP y CU

		<i>I</i>	<i>B</i>	<i>2</i>	<i>C</i>	<i>3</i>
<i>x (m)</i>		3	6	9	12	15
CP $q_{CP} = 19,8 \text{ kN/m}$	coef	0.08	-0.1	0.025	-0.1	0.08
	<i>M (kN.m)</i>	57.02	-71.28	17.82	-71.28	57.02
CU₁ $q_{CU} = 19,2 \text{ kN/m}$	coef	0.101	-0.05	-0.05	-0.05	0.101
	<i>M (kN.m)</i>	69.81	-34.56	-34.56	-34.56	69.81
CU₂ $q_{CU} = 19,2 \text{ kN/m}$	coef	-0.025	-0.05	0.075	-0.05	-0.025
	<i>M (kN.m)</i>	-17.28	-34.56	51.84	-34.56	-17.28
CU₃ $q_{CU} = 19,2 \text{ kN/m}$	coef	0.0665	-0.117	0.05	-0.033	-0.0165
	<i>M (kN.m)</i>	45.96	-80.87	34.56	-22.81	-11.40

TABLA 9.2. Momentos flectores mayorados mas desfavorables.

COMBINACIONES	MOMENTOS FLECTORES (kN.m)				
	M_I	M_B	M_2	M_C	M_3
<i>1</i>	126.84	-105.84	-16.74	-105.84	126.84
<i>2</i>	39.74	-105.84	69.66	-105.84	39.74
<i>3</i>	102.99	-152.15	52.38	-94.09	45.62

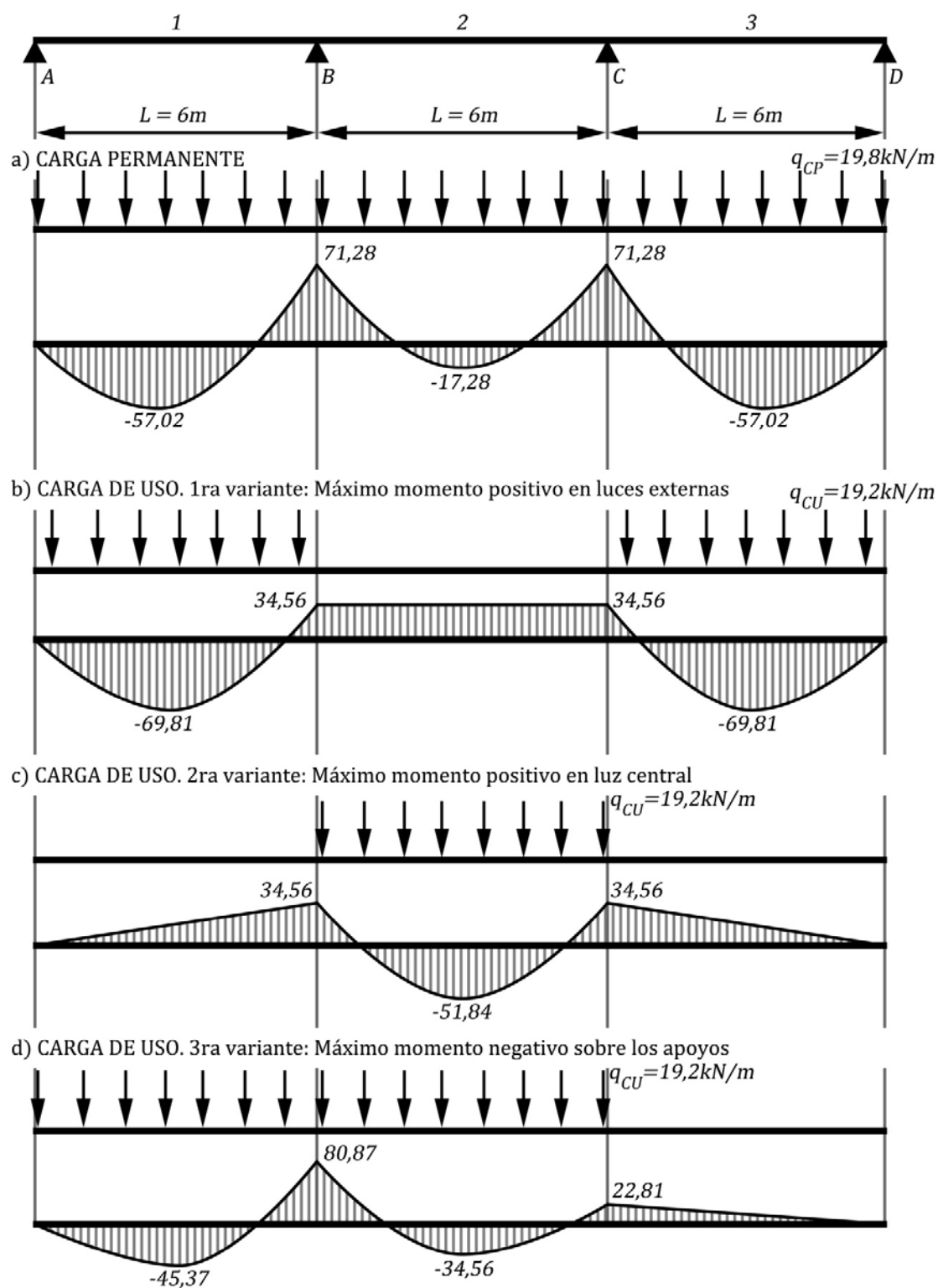


Figura 9,14: Combinaciones de carga para momentos flectores

b) Envolvente de momentos

Finalmente superponiendo estos tres combinaciones de carga obtenemos los gráficos de momentos para cada una de estas variantes, como se muestra en la figura 9,15 y en la Tabla 9,2.

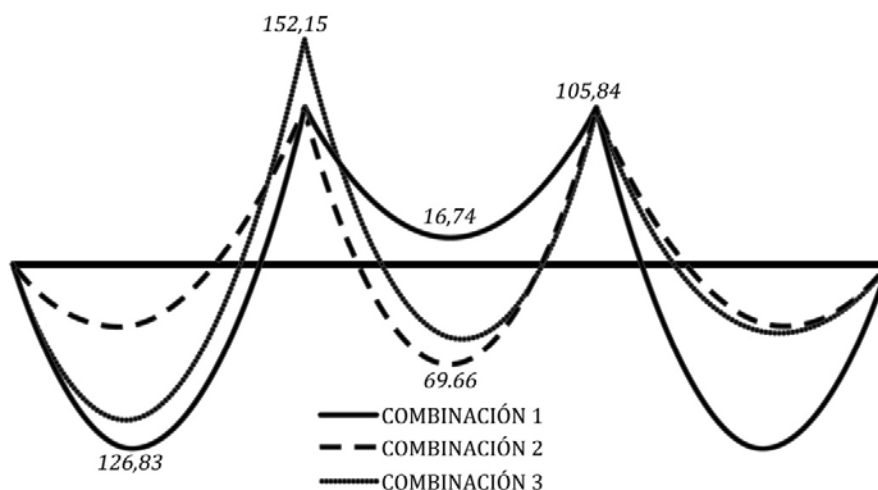


Figura 9,15: Combinaciones pésimas para momentos flectores

c) Redistribución de momentos

Evaluando la envolvente elástica se plantea cual es el procedimiento a desarrollar:

- Disminuir los momentos negativos en B y C
- Disminuir los momentos positivos en los tramos 1, 2 y 3
- Impedir un incremento del momento negativo en el tramo central

Considerando una redistribución máxima de momento del 10% planteada para $\omega = 0,5\omega_b$ y $\omega' = 0$

$$\%RM = 20 \left(1 - \frac{\omega - \omega'}{\omega_b} \right)$$

- Para disminuir M_B y M_C se trabaja en la combinación 3 de CP+CU disminuyendo 10% M_B , (15,21) y geoméricamente se incrementa la mitad (15,21/2) en el tramo 1.

Además se incrementa 10% M_C , (9,41), entonces en el tramo 2 se produce un incremento de

$$\frac{15,21-9,41}{2} = 2,9$$

En el tramo 3 se produce un incremento de (9,41/2)

Todo este procedimiento se muestra en la figura 9,16.

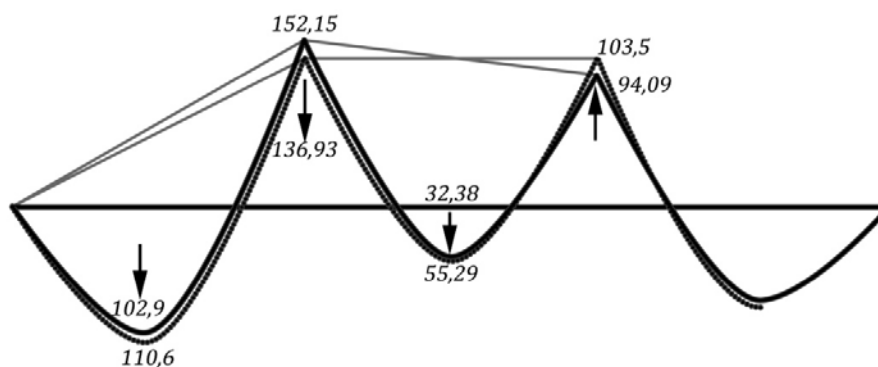


Figura 9,16: Redistribución de momentos para la Combinación 3

Pero se produce un incremento de 10,58 en el momento negativo M_2 en el tramo 2. Todo este procedimiento se muestra en la figura 9,17

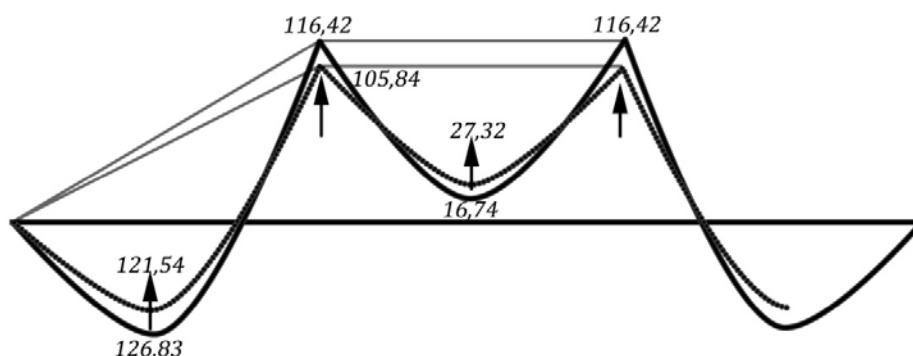


Figura 9,17: Redistribución de momentos para la Combinación 1

Para disminuir el momento positivo M_2 en el tramo 2 se trabaja en la combinación 2, aumentando 10% M_B y M_C (10,58), disminuye esta misma cantidad el momento positivo M_2 en 2. Todo este procedimiento se muestra en la figura 9,18.

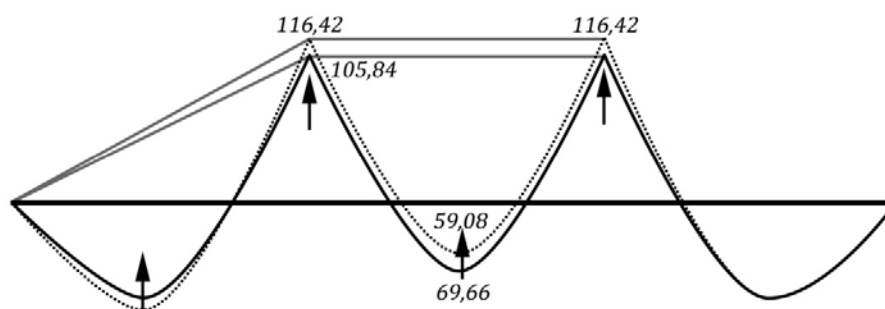


Figura 9,18: Redistribución de momentos para la Combinación 2

d) *Envolvente plástica*

En un gráfico resumen, figura 9,19, se exponen los momentos redistribuidos más desfavorables para cada tramo como resultado de la superposición de los tres anteriores.

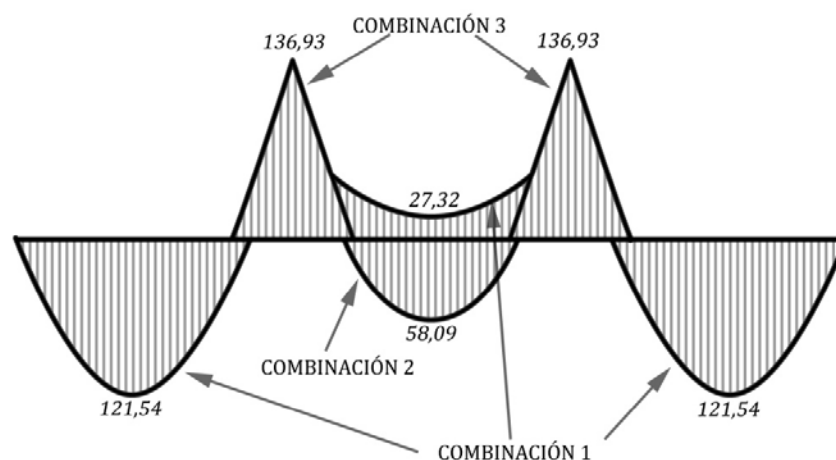


Figura 9,19: Combinaciones pésimas de Momentos Redistribuidos

Para la COMBINACIÓN 1

$$M_1 = M_3 = 121,54 \text{ kN} \cdot \text{m}$$

$$M_2^- = 27,32 \text{ kN} \cdot \text{m}$$

Para la COMBINACIÓN 3

$$M_B = M_C = 136,93 \text{ kN} \cdot \text{m}$$

Para la COMBINACIÓN 1

$$M_2^+ = 59,08 \text{ kN} \cdot \text{m}$$

Una comparación elemental demuestra los ahorros que se introduzcan en todos los casos a partir de las reducciones de los momentos de diseño.

Ejercicio 9,2

En este ejercicio se desarrolla de forma integral el diseño de una viga continua, desde el cálculo de las cargas hasta la representación de los resultados. Pretende mostrar los procedimientos a seguir en estos casos, de una forma coherente y relacionada, ofreciendo al lector una secuencia lógica en los cálculos y las implicaciones que tienen las decisiones en las diferentes partes del procedimiento de diseño.

Diseñe la viga continua que se muestra en la figura 9,20.

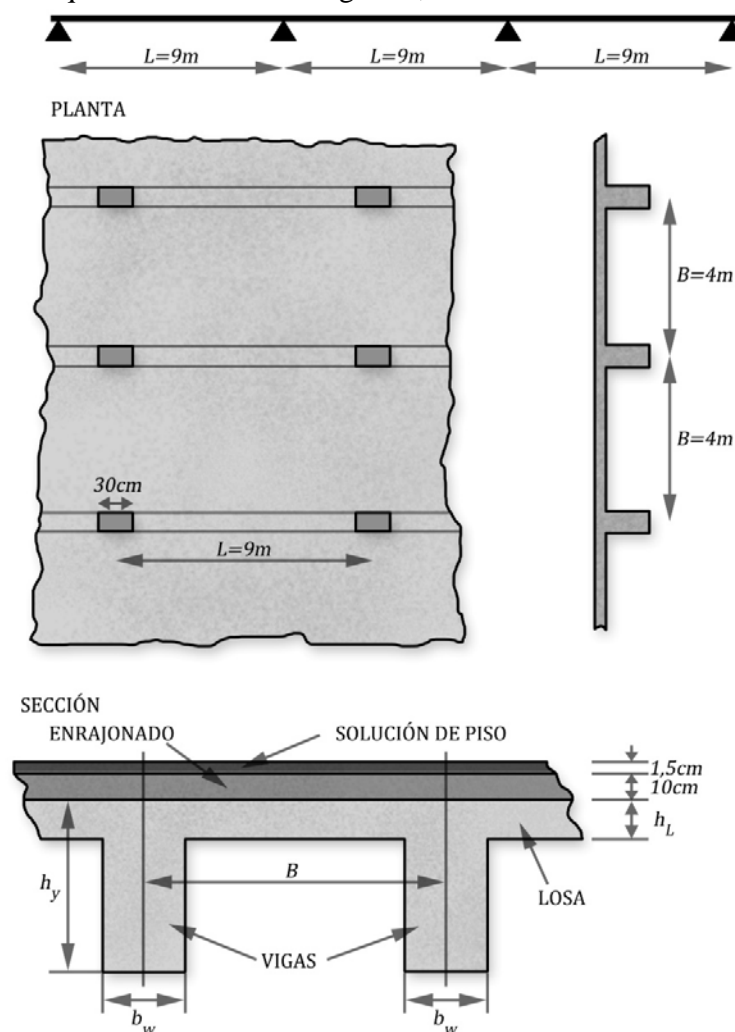


Figura 9,20: Diseño de viga continua

Cálculos y discusión

1. Cálculo de los cargas

a) Cargas permanentes

- Sobre la losa

Considerando un espesor de la losa de 10 cm:

Mosaicos	$0,23 \text{ kN/m}^2/\text{cm} \cdot 1,5$	$= 0,345 \text{ kN/m}^2$
Enrajonado	$0,18 \text{ kN/m}^2/\text{cm} \cdot 10$	$= 1,8 \text{ kN/m}^2$
Hormigón	$24 \text{ kN/m}^3 \cdot 0,1 \text{ m}$	$= 2,4 \text{ kN/m}^2$
TOTAL		$4,545 \text{ kN/m}^2$

Y como están distribuidos en un área tributaria en 4 m sobre cada viga

$$q_L = 4,545 \cdot 4 = 18,18 \text{ kN/m}$$

- Peso propio de la viga

La sección de la viga se dimensiona como $0,3 \times 0,6 \text{ m}$, garantizando un peralte total de esta de 70 cm, por lo que:

$$q_v = 24 \text{ kN/m}^3 \cdot 0,3 \cdot 0,6 = 4,32 \text{ kN/m}$$

b) Cargas de uso

Para el empleo de los locales que sostienen las vigas, que serán salas de lecturas de una biblioteca, la carga de uso será de 3 kN/m^2 . Entonces: $q_{CU} = 3 \cdot 4 = 12 \text{ kN/m}$

Pero como la losa es continua, para las vigas intermedias, la carga actuante podrá calcularse como sigue, con el apoyo de la figura 9,21:

$$q = q \cdot B + 2 \frac{M_B}{B} - \frac{M_C}{B}$$

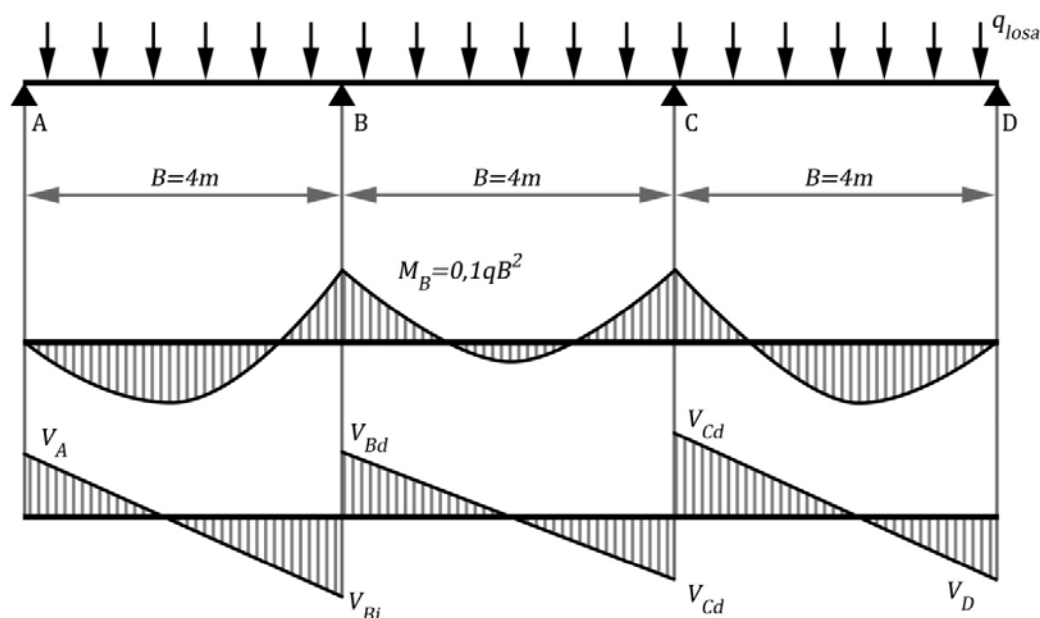


Figura 9,21: Cortante sobre las vigas por el efecto de la continuidad de la losa

Si: $M_B = M_C = 0,1qB^2$

Entonces

$$q = q \cdot B + 0,1q \cdot B = 1,1q \cdot B$$

Apreciándose que se produce un crecimiento de un 10% del valor de la carga actuante por el efecto de la hiperestaticidad de la losa

Entonces la carga permanente total sobre las vigas intermedias será:

$$q_{CP} = 1,1q_L + q_v$$

$$q_{CP} = 1,1 \cdot 18,18 + 4,32 = 24,318 \text{ kN} \cdot \text{m}$$

y la carga de uso

$$q_{CU} = 1,1q_{CU}$$

$$q_{CU} = 1,1 \cdot 12 = 13,2 \text{ kN} \cdot \text{m}$$

2. Cálculo de las solicitaciones

a) Momento flectores

Como las luces son iguales, pueden emplearse los coeficientes para vigas continuas expuestas en los anexos, **Tabla A-9**

– Carga permanente

Considerando la acción de q_{CP} en las tres luces, como se aprecia en la figura 9.22

– Carga de uso

Se evalúan tres variantes de distribución de la carga dentro de las luces, que se muestran en la TABLA 9,3 y la figura 9,22

- **1ra variante** combinación que provoca el mayor momento positivo para las primeras y terceras luces, obteniéndose cargando solo estos tramos
- **2da variante** combinación que provoca el mayor momento positivo en la luz central, cuando solo está cargado este tramo
- **3ra variante** combinación que provoca el mayor momento sobre los apoyos, cuando están cargadas las luces aledañas a estos

TABLA 9,3. Momentos flectores para diferentes combinaciones de CP y CU

		1	B	2	C	3
x (m)		4.5	9	13.5	18	22.5
CP $q_{CP} = 24,32 \text{ kN/m}$	coef	0.08	-0.1	0.025	-0.1	0.08
	M (kN.m)	157.59	-196.99	49.25	-196.99	157.59
CU₁ $q_{CU} = 13,2 \text{ kN/m}$	coef	0.101	-0.05	-0.05	-0.05	0.101
	M (kN.m)	107.99	-53.46	-53.46	-53.46	107.99
CU₂ $q_{CU} = 13,2 \text{ kN/m}$	coef	-0.025	-0.05	0.075	-0.05	-0.025
	M (kN.m)	-26.73	-53.46	80.19	-53.46	-26.73
CU₃ $q_{CU} = 13,2 \text{ kN/m}$	coef	0.0665	-0.117	0.05	-0.033	-0.0165
	M (kN.m)	71.10	-125.10	53.46	-35.28	-17.64

Y finalmente los momentos flectores para las tres combinaciones se resumen en la tabla 9,4

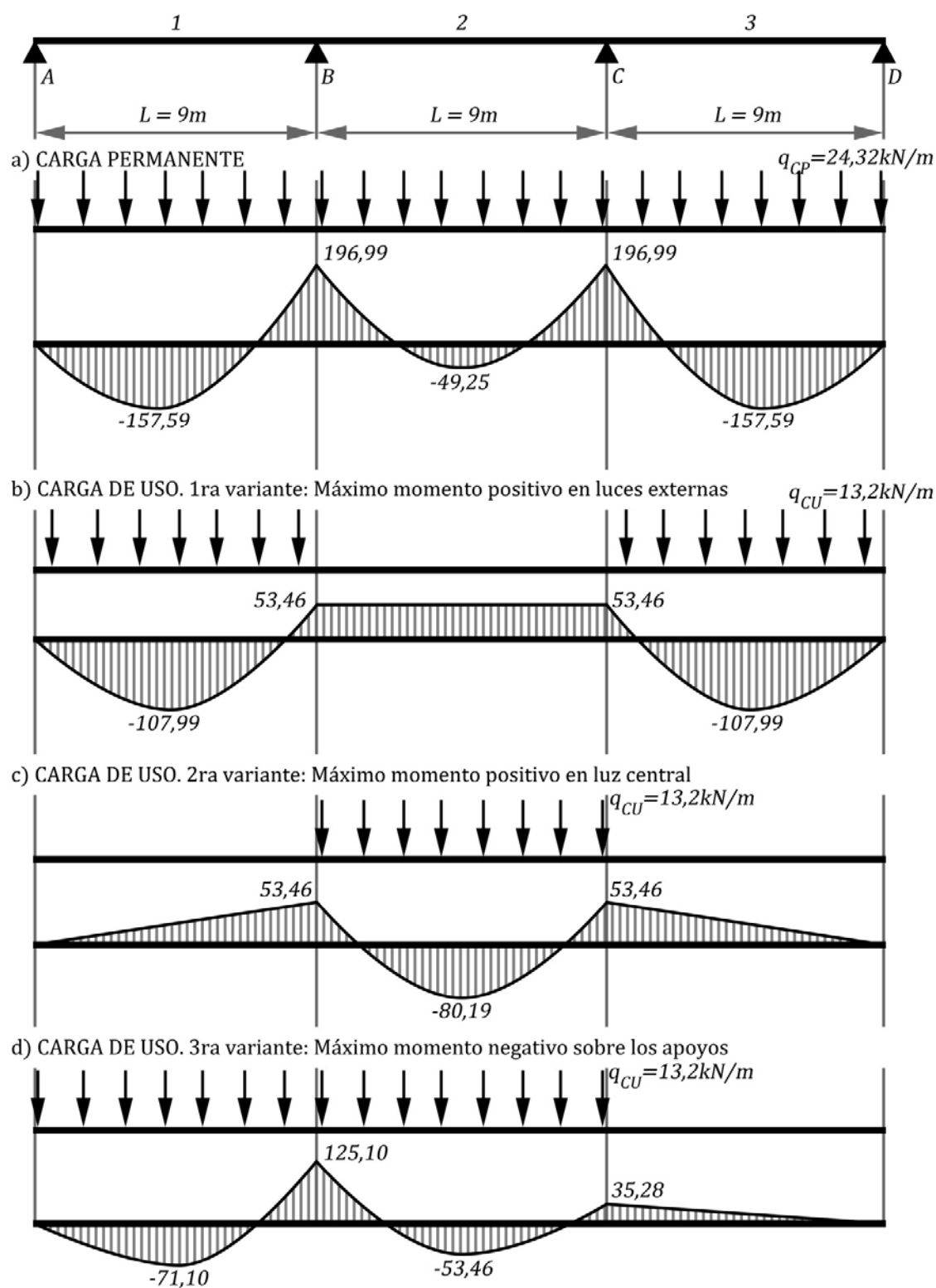


Figura 9,22: Combinaciones de carga para momentos flectores

TABLA 9.4. Momentos flectores de servicio más desfavorables.

COMBINACIONES	MOMENTOS FLECTORES (kN.m)				
	M_1	M_B	M_2	M_C	M_3
1	265.58	-250.45	-4.21	-250.45	265.58
2	130.86	-250.45	129.44	-250.45	130.86
3	228.70	-322.09	102.71	-232.28	139.95

Resaltando los valores más desfavorables que provocan las diferentes variantes en cada tramo

b) Fuerza cortante

Siguiendo un procedimiento semejante al anterior para obtener las combinaciones más desfavorables

Cargas permanentes. Aplicando la carga en toda las luces

Carga de uso. Aplicando dos variante

- **1ra variante** con la 1ra y 3ra luz cargada provoca los mayores cortantes sobre el apoyo A
- **3ra variante** con la 1ra y 2da luz cargada provoca los mayores cortantes sobre el apoyo B

Ofreciéndose los resultados en la tabla 9,5 y en la figura 9,23

TABLA 9.5. Fuerzas cortantes diferentes combinaciones de CP y CU

		A	B1	B2	C1	C2	D
	x (m)	4.5	9	13.5	18	22.5	27
CP	coef	0.4	-0.6	0.5	-0.5	0.6	-0.4
$q_{CP}=24,32$ kN/m	V (kN)	87.55	-131.33	109.44	-109.44	131.33	-87.55
CU ₁	coef	0.45	-0.55			0.55	-0.45
$q_{CU}=13,2$ kN/m	V (kN)	53.46	-65.34	0.00	0.00	65.34	-53.46
CU ₃	coef	0.383	-0.6174	0.5834	-0.4165	0.0329	0.0329
$q_{CU}=13,2$ kN/m	V (kN)	45.50	-73.35	69.31	-49.48	3.91	3.91

Y finalmente las combinaciones para las combinaciones se resumen en la tabla 9,6:

TABLA 9.6. Fuerzas cortantes de servicio más desfavorables.

COMBINACIONES	FUERZAS CORTANTES (kN)					
	V_A	V_{Bi}	V_{Bd}	V_{Ci}	V_{Cd}	V_D
1	141.01	-196.67	109.44	-109.44	196.67	-141.01
3	133.05	-204.68	178.75	-158.92	135.24	-83.64

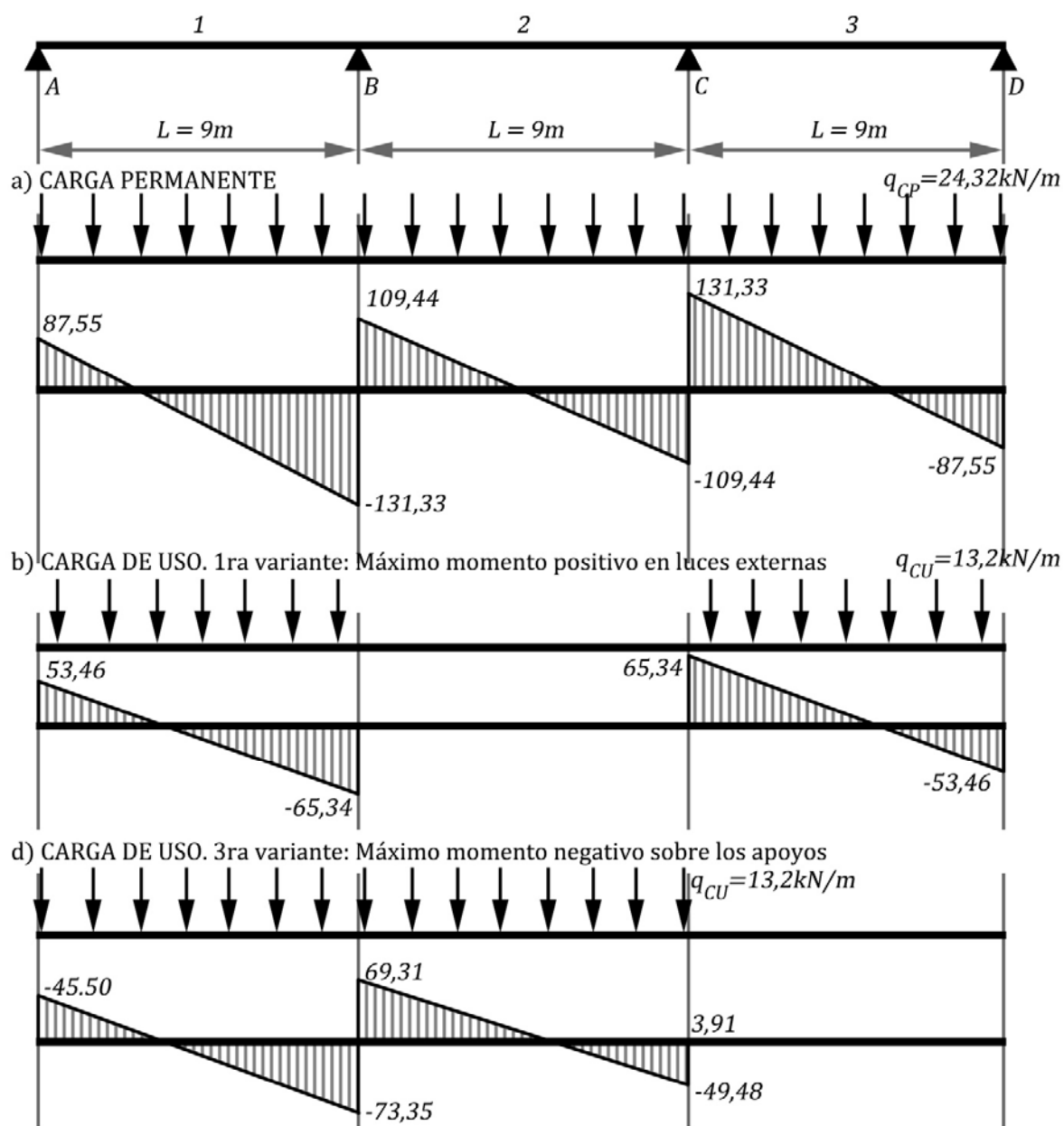


Figura 9,25: Combinaciones de carga para fuerzas cortantes

3. Solicitaciones mayoradas

Con vistas al cálculo de las secciones a flexión y cortante en el Estado Límite Último, o de agotamiento de la sección se deben obtener las solicitaciones mayoradas. En este caso:

$$\begin{aligned}
 q_u &= 1,2q_{CP} + 1,6q_{CU} \\
 M_u &= 1,2M_{CP} + 1,6M_{CU} \\
 V_u &= 1,2V_{CP} + 1,6V_{CU}
 \end{aligned}$$

A continuación se tabulan los valores de M_u y V_u para las combinaciones más desfavorables, obtenidas anteriormente y se muestran en las tablas 9,7 y 9,8 y figuras 9,24 y 9,25 las envolventes de momento y cortante para éstas:

TABLA 9,7. Momentos flectores mayorados mas desfavorables.

COMBINACIONES	MOMENTOS FLECTORES (kN.m)				
	M_I	M_B	M_2	M_C	M_3
1	361.90	-321.93	-26.44	-321.93	361.90
2	146.34	-321.93	187.40	-321.93	146.34
3	302.88	-436.54	144.63	-292.84	160.89

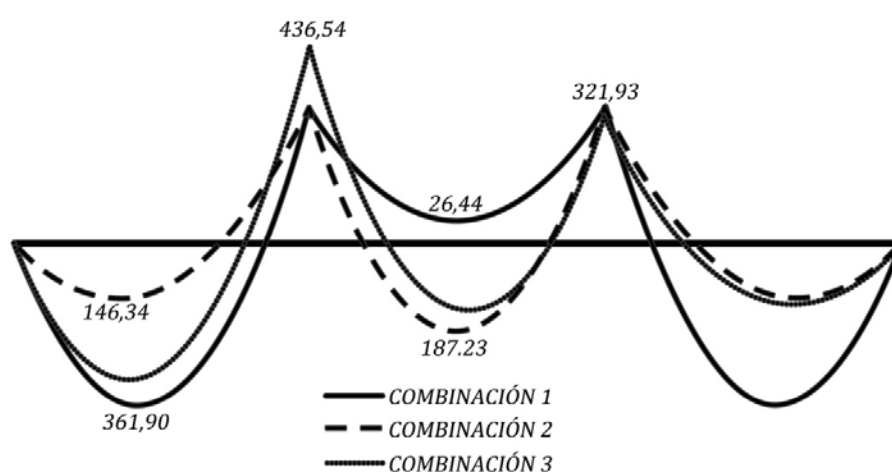


Figura 9,24: Momentos Mayorados, combinaciones pésimas

TABLA 9,8. Fuerzas cortantes mayoradas más desfavorables.

COMBINACIONES	FUERZAS CORTANTES (kN)					
	V_A	V_{Bi}	V_{Bd}	V_{Ci}	V_{Cd}	V_D
1	190.60	-262.14	131.33	-131.33	262.14	-190.60
3	177.86	-274.95	242.22	-210.50	163.85	-98.81

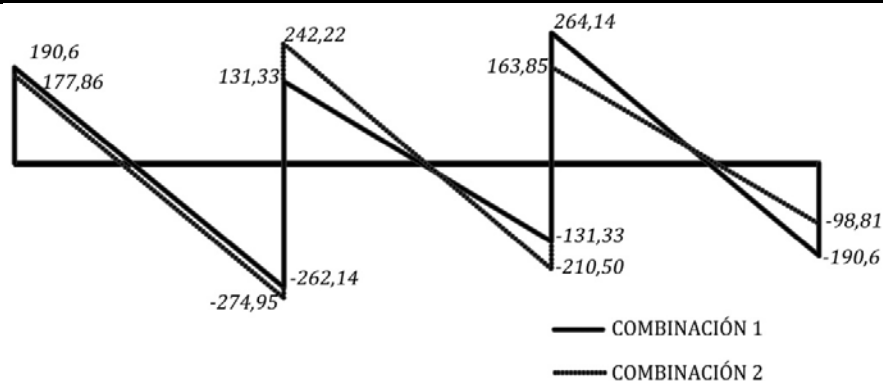


Figura 9,25: Fuerzas cortantes mayoradas, combinaciones pésimas

4. Redistribución de momentos

En la búsqueda de un diseño más racional, se provocan la aparición de articulaciones plásticas en los puntos de máximos momentos.

Previendo que la sección tendrá un valor de $\omega - \omega' = 0,5\omega_b$, puede calcularse el porcentaje máximo de redistribución de momento permisible por:

$$\%RM = 20 \left(1 - \frac{\omega - \omega'}{\omega_b} \right)$$

$$\%RM = 20 \left(1 - \frac{0,5\omega_b}{\omega_b} \right) = 10\%$$

a) Redistribución de momentos sobre los apoyos

Se trabaja con la combinación 3, donde se reducirá M_B en un 10%

$$0,1M_B = 43,65 \text{ kN} \cdot \text{m}$$

$$M_B' = 0,9M_B = 0,9 \cdot 436,64 = 396,98 \text{ kN} \cdot \text{m}$$

En la zona central de la 1ra luz, el valor de M_1 se incrementará en la mitad de lo que se reduce M_B

$$M_1' = M_1 + \frac{0,1M_B}{2}$$

$$M_1' = 302,88 + \frac{0,1 \cdot 436,64}{2} = 324,71 \text{ kN} \cdot \text{m}$$

En la zona central de la 2da luz el efecto de la redistribución es menos significativo, pues existe sobre el apoyo capacidad resistente suficiente, que permite que esta sección absorba un momento superior al actuante. Si consideramos que tomará un 10% de momento superior al actuante, entonces la redistribución en M_2 será:

$$M_2' = M_2 + \frac{0,1M_B - 0,1M_C}{2}$$

$$M_2' = 144,63 + \frac{0,1 \cdot 436,64 - 0,1 \cdot 29,28}{2} = 151,82 \text{ kN} \cdot \text{m}$$

Todo lo anterior se aprecia en la figura 9,26:

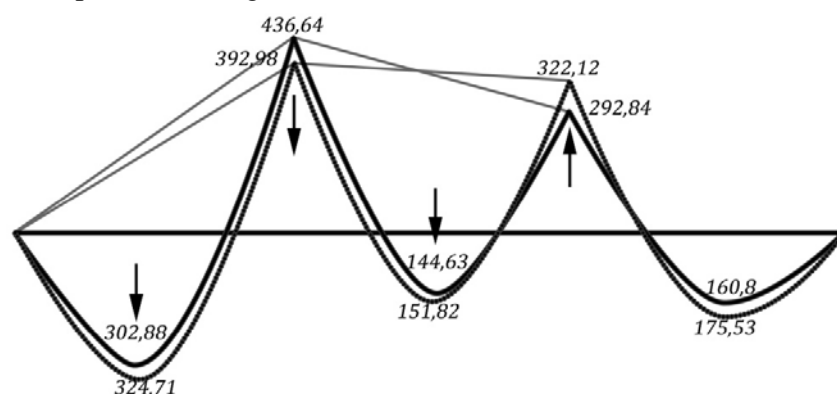


Figura 9,26: Redistribución de momentos para la Combinación 3

b) Redistribución de momento para las luces externas. (figura 9,27)

Tomando como base la distribución más desfavorable en este caso, la combinación 1, que es la que provoca el mayor momento M_1

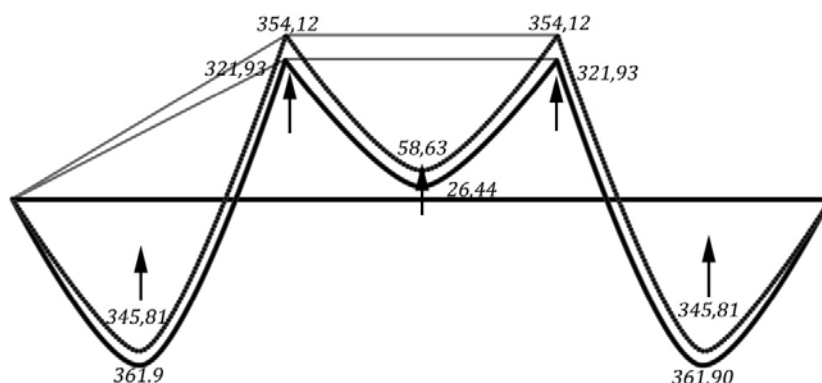


Figura 9,27: Redistribución de momentos para la Combinación 1

La máxima redistribución que pueden provocarse sobre los apoyos B y C marcan los límites en la operación a realizar, que es de $0,1M_1 = 32,19 \text{ kN.m}$. El valor de M_B será de $354,12 \text{ kN.m}$ menor que la redistribución anterior. Entonces la redistribución en M_1 será

$$M_1' = M_1 + \frac{0,1M_B}{2}$$

$$M_1' = 361,98 + \frac{0,1 \cdot 321,19}{2} = 345,81 \text{ kN} \cdot \text{m}$$

Y para el M_2 :

$$M_2' = M_2 - 0,1M_B$$

$$M_2' = 26,44 + 0,1 \cdot 321,19 = 58,63 \text{ kN} \cdot \text{m}$$

c) Redistribución de momentos para la luz central. (figura 9,28)

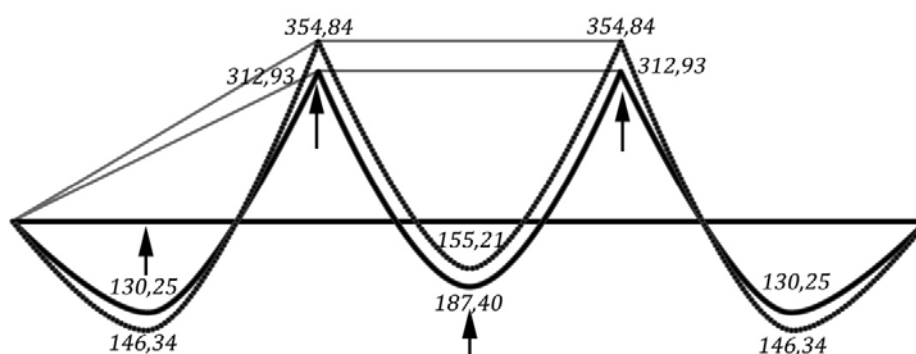


Figura 9,28: Redistribución de momentos para la Combinación 2

Buscando una disminución del momento M_2 en la luz central, incrementamos, para la combinación 2, los momentos M_B y M_C $32,19 \text{ kN.m}$, hasta el límite de $354,12 \text{ kN.m}$ lo que provocará una reducción de M_B de:

$$M_2' = M_2 - 0,1M_B$$

$$M_2' = 187,4 + 0,1 \cdot 321,19 = 155,21 \text{ kN} \cdot \text{m}$$

Valor que resulta menor que el obtenido para la primera redistribución por lo que será aquel quien determine el diseño

Finalmente la envolvente resumen de momento para el cálculo de la viga, se muestra en la figura 9,29

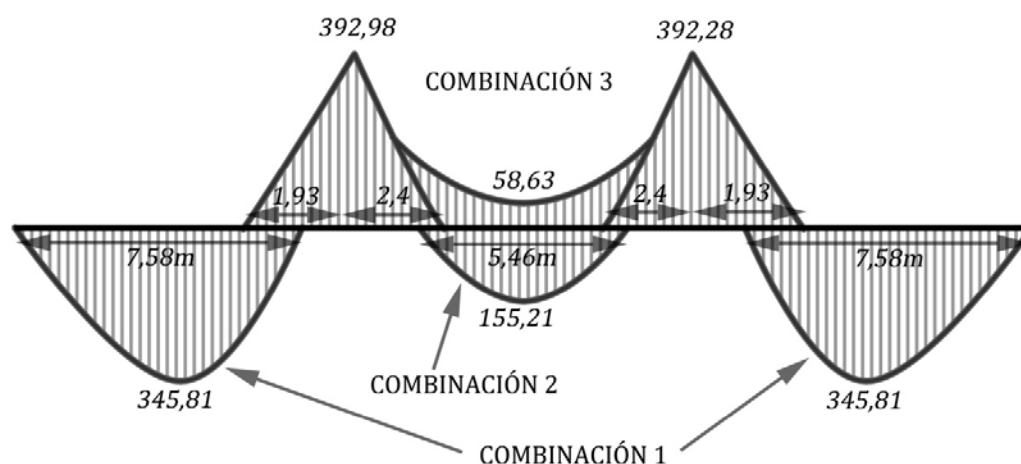


Figura 9,29: Combinaciones pésimas de momentos redistribuidos

5. Diseño de la sección a flexión

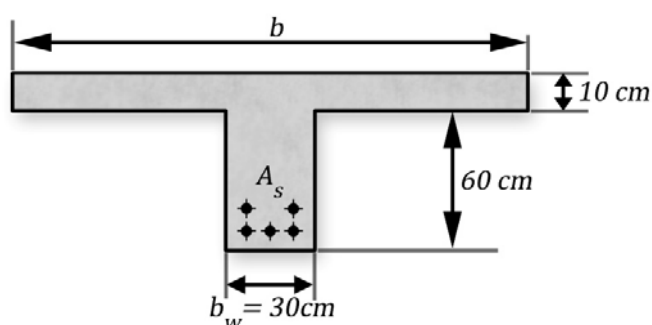
Se Diseñarán tres secciones

- Sección para el momento positivo en las luces externas
- Sección para el momento positivo en la luz central
- Sección para el momento positivo sobre los apoyos

Tomando en cuenta que las secciones más desfavorables son los apoyos, ya que están sometidos al mayor momento y además ser secciones rectangulares, se comenzará a calcular las otras para considerar el refuerzo a compresión en estas.

a) Sección para el momento positivo en las luces externas

Se está en presencia de una sección T, cuya ala superior está conformada por la losa, como se aprecia en la figura 9,30



$$\begin{aligned} f_y &= 300 \text{ MPa} \\ f'_c &= 20 \text{ MPa} \\ M_u &= 345,81 \text{ kN.m} \end{aligned}$$

Figura 9,30: Características geométricas de la sección T

Calculando las dimensiones mecánicas de la sección

- Ancho efectivo b , será el menor de las siguientes valores

$$\frac{L}{4} = \frac{900}{4} = 225 \text{ cm}$$

$$16h_f + b_w = 16 \cdot 10 + 30 = 190cm$$

$$\frac{B}{2} = \frac{400}{2} = 200cm$$

Por tanto se adopta $b = 190cm$

- Peralto efectivo

$$h = 60 + 10 = 70cm$$

Y considerando un recubrimiento de $9cm$ para 2 camadas

$$d = 70 - 9 = 61cm$$

Considerando que la sección tiene comportamiento rectangular y despreciando el aporte del refuerzo comprimido A_s' la ecuación de momentos será:

$$M_u = \phi \omega_r (1 - 0,59 \omega_r) b d^2 f_c'$$

$$0,59 \omega_r^2 - \omega_r + \frac{M_u}{\phi b d^2 f_c'} = 0$$

$$0,59 \omega_r^2 - \omega_r + \frac{34581}{0,9 \cdot 190 \cdot 61^2 \cdot 2} = 0$$

$$\omega_r = \omega = 0,0286$$

Aunque se sabe que es una sección muy dúctil, no obstante debe comprobarse si tiene comportamiento rectangular calculando el valor de a

$$\frac{a}{d} = \frac{\omega_r}{0,85}$$

$$a = \frac{0,0286 \cdot 61}{0,85} = 2,02cm < h_f$$

Y como

$$\omega_{ra} = 0,3188 \beta_1$$

$$\omega_{ra} = 0,3188 \cdot 0,85 = 0,27$$

$$\omega_r < \omega_{ra} < 0,5 \omega_b$$

Lo que ratifica lo planteado anteriormente y justifica la suposición realizada para la redistribución de momentos, ya que la sección admite una redistribución mucho mayor que el 10% considerando en el epígrafe anterior

$$A_s = \frac{\omega \cdot b \cdot d \cdot f_c'}{f_y}$$

$$A_s = \frac{0,0286 \cdot 190 \cdot 61 \cdot 20}{300} = 21,71cm^2$$

b) Sección para el momento positivo en la luz central

Tomando en cuenta los cálculos realizados en la sección anterior se sabe que la sección T tendrá también comportamiento rectangular y una mayor ductilidad. Suponiendo que el refuerzo se colocará en una sola camada por lo que $d_s = 7cm$ y sabiendo que $M_u = 155,21kN \cdot m$

Entonces:

$$M_u = \phi \omega_r (1 - 0,59 \omega_r) b d^2 f_c'$$

$$0,59 \omega_r^2 - \omega_r + \frac{M_u}{\phi b d^2 f_c'} = 0$$

$$0,59 \omega_r^2 - \omega_r + \frac{15521}{0,9 \cdot 190 \cdot 63^2 \cdot 2} = 0$$

$$\omega_r = \omega = 0,0115$$

$$\omega_r < \omega_{ra} < 0,5\omega_b$$

$$A_s = \frac{\omega \cdot b \cdot d \cdot f_c'}{f_y}$$

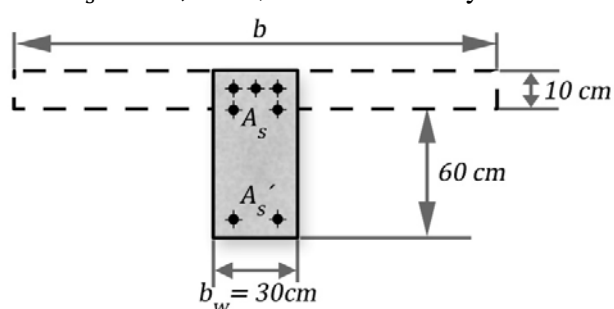
$$A_s = \frac{0,0115 \cdot 190 \cdot 63 \cdot 20}{300} = 9,19 \text{ cm}^2$$

Buscando los diámetros de acero más adecuados se colocará 2 barras N° 25, $A_s = 10,2 \text{ cm}^2$ para toda la luz central y en la zona de momento máximo, en las luces externas, colocará 2 barras N° 25 y 3 N° 22 que hacen un $A_s = 21,8 \text{ cm}^2$

c) Secciones para el momento negativo sobre los apoyos

Esta es la sección más desfavorable pues se reduce la zona comprimida del hormigón.

Tomando en cuenta los cálculos anteriores se considerará el aporte del refuerzo situado en la zona comprimida $A_s' = 10,2 \text{ cm}^2$, 2 barras N° 25 y con el auxilio de la figura 9,31



$$f_y = 300 \text{ MPa}$$

$$f_c' = 20 \text{ MPa}$$

$$M_u = 392,98 \text{ kN.m}$$

$$d' = 7 \text{ cm}$$

$$d_s = 9 \text{ cm}$$

Figura 9,31: Sección sobre el apoyo.

$$M_u = \phi [\omega_r (1 - 0,59\omega_r) b d^2 f_c' + A_{real}' f_y (d - d')]$$

$$0,59\omega_r^2 - \omega_r + \frac{M_u}{\phi b d^2 f_c'} - \omega' (1 - \frac{d'}{d}) = 0$$

$$\omega' = \frac{A_s' f_y}{b d f_c'}$$

$$\omega' = \frac{10,2 \cdot 300}{30 \cdot 61 \cdot 20} = 0,0836$$

$$0,59\omega_r^2 - \omega_r + 0,1243 = 0$$

$$\omega_r = \omega = 0,0135$$

$$\frac{a}{d} = \frac{\omega_r}{0,85}$$

$$a = \frac{0,135 \cdot 61}{0,85} = 9,66 \text{ cm}$$

$$c = \frac{a}{\beta_1}$$

$$c = \frac{9,66}{0,85} = 11,4 \text{ cm}$$

Comprobando que $f_s' = f_y'$

$$\varepsilon_s' = 0,003 \frac{c - d'}{c} = 0,00116 < \varepsilon_y$$

Por lo que es preferible despreciar el aporte de este refuerzo y recalcular la sección

$$M_u = \phi \omega_r (1 - 0,59\omega_r) b d^2 f_c'$$

$$\begin{aligned}
0,59\omega_r^2 - \omega_r + \frac{M_u}{\phi b d^2 f_c'} &= 0 \\
0,59\omega_r^2 - \omega_r + \frac{39298}{0,9 \cdot 30 \cdot 61^2 \cdot 2} &= 0 \\
\omega_r = \omega &= 0,2256 \\
\omega_r < \omega_{ra} < 0,5\omega_b \\
A_s &= \frac{\omega \cdot b \cdot d \cdot f_c'}{f_y} \\
A_s &= \frac{0,2256 \cdot 30 \cdot 63 \cdot 20}{300} = 27,52 \text{ cm}^2 \\
\frac{a}{d} &= \frac{\omega_r}{0,85} \\
a &= \frac{0,2256 \cdot 61}{0,85} = 16,19 \text{ cm} \\
c &= \frac{a}{\beta_1} \\
c &= \frac{16,19}{0,85} = 19,05 \text{ cm}
\end{aligned}$$

Finalmente se colocarán 4 barras N° 25 y 2 N° 22 que hacen un $A_s = 28,14 \text{ cm}^2$

d) Sección para el momento negativo en la luz central

Comprobando esta sección para el momento negativo provocado por la combinación 1, de 58,63 kN.m, y considerando nulo el aporte del refuerzo comprimido.

Entonces:

$$\begin{aligned}
\omega &= \frac{A_s f_y}{b d f_c'} \\
\omega &= \frac{10,2 \cdot 300}{30 \cdot 63 \cdot 20} = 0,081 \\
M_u &= \phi \omega_r (1 - 0,59\omega_r) b d^2 f_c' \\
M_u &= 0,9 \cdot 0,081 (1 - 0,59 \cdot 0,081) 30 \cdot 63^2 \cdot 2 = 16521 \text{ kN} \cdot \text{cm} \\
M_u &= 165,21 \text{ kN} \cdot \text{m} > 58,63 \text{ kN} \cdot \text{m}
\end{aligned}$$

Por tanto la sección resiste.

6. Comprobación de los EL de Utilización

CALCULO DE LAS CARACTERÍSTICAS GEOMÉTRICAS DE LAS SECCIONES

a) Sección para el momento positivo en la luz central

Para la sección T no fisurada, despreciando el aporte del refuerzo comprimido y conociendo que el recubrimiento del acero principal es $d_s = 6,22 \text{ cm}$ y el peralte efectivo real $d = 63,78 \text{ cm}$:

$$\begin{aligned}
n &= \frac{E_s}{E_c} \\
E_s &= 2 \cdot 10^5 \text{ MPa} \\
E_c &= 4700 \sqrt{f_c'} = 21019 \text{ MPa} \\
n &= 9,52 \\
A_h &= b_w h + (b - b_w) h_f + (n - 1) A_s \\
A_h &= 30 \cdot 70 + (190 - 30) 10 + (9,52 - 1) 10,2 = 3786,85 \text{ cm}^2
\end{aligned}$$

Para obtener la posición del centroide:

$$S_h = \frac{b_w h^2}{2} + (b - b_w) h_f \left(h - \frac{h_f}{2} \right) + (n - 1) A_s d_s$$

$$S_h = \frac{30 \cdot 70^2}{2} + (190 - 30) 10 \left(70 - \frac{10}{2} \right) + (9,52 - 1) 10,2 \cdot 6,22 = 178040,24 \text{ cm}^3$$

$$V_2 = \frac{A_h}{S_h}$$

$$V_2 = \frac{178040,24}{3786,85} = 47,02 \text{ cm}$$

Pudiéndose calcular I_h por:

$$I_h = \frac{b_w h^3}{12} + b_w h \left(V_2 - \frac{h}{2} \right)^2 + \frac{(b - b_w) h_f^3}{12} + (b - b_w) h_f \left(V_2 - h - \frac{h_f}{2} \right) + (n - 1) A_s (V_2 - d_s)^2$$

$$I_h = \frac{30 \cdot 70^3}{12} + 30 \cdot 70 \left(47,02 - \frac{70}{2} \right)^2 + \frac{(190 - 30) 10^3}{12} + (190 - 30) 10 \left(47,02 - 70 - \frac{10}{2} \right) + (9,521) 10,2 (47,02 - 6,22)^2 = 1836072,81 \text{ cm}^4$$

Calculando el momento de fisuración

$$M_{cr} = \frac{f_r}{V_2} I_h$$

$$f_r = 0,62 \sqrt{f_c'} = 2,77 \text{ MPa}$$

$$M_{cr} = \frac{0,277}{47,02} 1836072,81 = 108,28 \text{ kN} \cdot \text{m}$$

Y para la sección fisurada, ya que M_{cr} es menor que el momento de servicio actuante $M_k = 129,44 \text{ kN} \cdot \text{m}$

$$\frac{1}{2} b x^2 + n A_s x - n A_s d = 0$$

$$x = \frac{-9,52 \cdot 10,2 + \sqrt{(9,52 \cdot 10,2)^2 + 4 \cdot \frac{190}{2} \cdot (9,52 \cdot 10,2 \cdot 63,78)}}{2 \cdot \frac{190}{2}} = 7,58 \text{ cm}$$

calculando I_{cr}

$$I_{cr} = \frac{1}{3} b x^3 + n \cdot A_s (d - x)^2$$

$$I_{cr} = \frac{1}{3} 190 \cdot 7,58^3 + 9,52 \cdot 10,2 (63,78 - 7,58)^2 = 334124,9 \text{ cm}^4$$

b) *Sección para el momento positivo en las luces externas*

La sección es la misma que la anterior solo aumenta el refuerzo $A_s = 21,81 \text{ cm}^2$ y por tanto disminuye el peralte efectivo a $d = 61,24 \text{ cm}$

Repitiendo los cálculos, se obtiene:

$$d_s = 8,76 \text{ cm} \quad d = 61,24 \text{ cm}$$

$$A_h = 3885,72 \text{ cm}^2$$

$$S_h = 179126,87 \text{ cm}^3$$

$$V_2 = 46,1 \text{ cm}$$

$$I_h = 1960049,81 \text{ cm}^4$$

$$M_{cr} = 117,89 \text{ kN} \cdot \text{m}$$

Como el M_{cr} es menor que el momento de servicio actuante $M_k = 265,58 \text{ kN} \cdot \text{m}$ la sección se fisurará. Para la sección fisurada, considerando que la sección tiene comportamiento rectangular bajo las cargas de servicio, se calcula la posición de la línea neutra

$$\frac{1}{2}bx^2 + nA_sx - nA_sd = 0$$

$$x = \frac{-9,52 \cdot 21,81 + \sqrt{(9,52 \cdot 21,81)^2 + 4 \cdot \frac{190}{2} \cdot (9,52 \cdot 21,81 \cdot 61,24)}}{2 \cdot \frac{190}{2}} = 10,525 \text{ cm}$$

Como $x > h_f$, por tanto no es válida la suposición anterior y la sección tendrá comportamiento T. Planteándose la solución por la ecuación de fuerzas y con el apoyo en la figura 9,32:

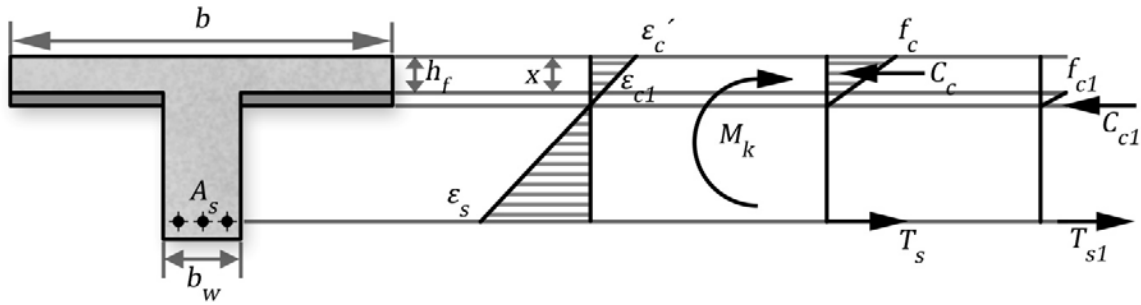


Figura 9,32: Sección T bajo cargas de servicio

$$\frac{1}{2}f_cbx^2 - \frac{1}{2}f_{c1}(b - b_w)(x - h_f) = A_sf_s$$

donde:

$$f_c = \varepsilon'_c E_c$$

$$f_{c1} = \varepsilon_{c1} E_c$$

$$f_s = \varepsilon_s E_s$$

y como:

$$\frac{\varepsilon'_c}{x} = \frac{\varepsilon_{c1}}{x - h_f} = \frac{\varepsilon_s}{d - x}$$

entonces:

$$\frac{1}{2}\varepsilon'_c E_c bx^2 - \frac{1}{2} \frac{x - h_f}{x} \varepsilon'_c E_c (b - b_w)(x - h_f) = \frac{d - x}{x} \varepsilon'_c E_s A_s$$

quedando finalmente.

$$\frac{1}{2}b_w x^2 - [(b - b_w)h_f + nA_s]x - \frac{(b - b_w)h_f^2}{2} - nA_sd = 0$$

resolviendo esta ecuación:

$$\frac{1}{2}30x^2 - [(190 - 30)10 + 9,52 \cdot 21,81]x - \frac{(190 - 30)10^2}{2} - 9,52 \cdot 21,81 \cdot 61,24 = 0$$

$$x = 10,536 \text{ cm}$$

y calculando el I_{cr}

$$I_{cr} = \frac{1}{3}bx^3 - \frac{1}{3}(b - b_w)(x - h_f)^2 + n \cdot A_s(d - x)^2$$

$$I_{cr} = \frac{1}{3}190 \cdot 10,536^3 - \frac{1}{3}(190 - 30)(10,536 - 10)^2 + 9,52 \cdot 21,81(61,24 - 10,536)^2$$

$$I_{cr} = 607593 \text{ cm}^4$$

c) Sección para momento negativo sobre los apoyos

En este caso si se considera el aporte del refuerzo A_s' , que es más significativo, en esta sección que tiene comportamiento rectangular

$$A_s' = 10,2 \text{ cm}^2$$

$$A_s = 28,14 \text{ cm}^2$$

$$d = 61,24 \text{ cm}$$

Para la sección no fisurada:

$$A_h = b_w h + (n - 1)A_s + (n - 1)A_s'$$

$$A_h = 30 \cdot 70 + (9,52 - 1)28,14 + (9,52 - 1)10,2 = 2426,47 \text{ cm}^2$$

Para obtener la posición del centroide:

$$S_h = \frac{b_w h^2}{2} + (n - 1)A_s d_s + (n - 1)A_s' (h - d')$$

$$S_h = \frac{30 \cdot 70^2}{2} + (9,52 - 1)28,14 \cdot 8,76 + (9,52 - 1)10,2 \cdot (70 - 6,22) = 81138,65 \text{ cm}^3$$

$$V_2 = \frac{A_h}{S_h}$$

$$V_2 = \frac{81138,65}{2426,47} = 33,44 \text{ cm}$$

Pudiéndose calcular I_h por:

$$I_h = \frac{b h^3}{12} + b h \left(V_2 - \frac{h}{2} \right)^2 + (n - 1)A_s (V_2 - d_s)^2 + (n - 1)A_s' (h - d' - V_2)^2$$

$$I_h = \frac{30 \cdot 70^3}{12} + 30 \cdot 70 \left(33,44 - \frac{70}{2} \right)^2 + (9,52 - 1)28,14 (33,44 - 8,76)^2 + (9,52 - 1)10,2 (70 - 6,22 - 33,44)^2 = 1088513,3 \text{ cm}^4$$

Calculando el momento de fisuración

$$M_{cr} = \frac{f_r}{V_2} I_h$$

$$M_{cr} = \frac{0,277}{33,44} 1088513,3 = 90,26 \text{ kN} \cdot \text{m}$$

Menor que el momento de servicio actuante $M_k = 322,09 \text{ kN} \cdot \text{m}$

$$\frac{1}{2} b x^2 + n A_s x - n A_s d = 0$$

$$x = \frac{-9,52 \cdot 28,14 + \sqrt{(9,52 \cdot 28,14)^2 + 4 \cdot \frac{30}{2} (9,52 \cdot 28,14 \cdot 61,24)}}{2 \cdot \frac{30}{2}} = 25,32 \text{ cm}$$

calculando I_{cr}

$$I_{cr} = \frac{1}{3} b x^3 + n \cdot A_s (d - x)^2 + (n - 1)A_s' (x - d')^2$$

$$I_{cr} = \frac{1}{3} 30 \cdot 25,32^3 + 9,52 \cdot 28,14 (61,24 - 25,32)^2 + (9,52 - 1)10,2 (25,32 - 6,22)^2$$

$$I_{cr} = 334124,9 \text{ cm}^4$$

CHEQUEO DE LA FISURACIÓN

El edificio está situado en una zona de agresividad alta, por lo que la abertura de fisura máxima permisible será de $0,25 \text{ mm}$, el recubrimiento es de 40 mm y el estribo tendrá un diámetro de $9,5 \text{ mm}$

a) Sección para el momento positivo en la luz central

En este caso son 2 barras $N^{\circ}25$ con $A_s = 10,2 \text{ cm}^2$ por lo que deben comprobarse el valor de espaciamiento máximo permitido

$$s_{max} = 380 \left(\frac{280}{f_s} \right) - 2,5 c_c$$

Donde:

$$f_s = \frac{M_k}{A_s(d - \frac{x}{3})}$$

$$f_s = \frac{12944}{10,2(63,78 - \frac{7,58}{3})} = 207,17 MPa$$

$$c_c = r + d_{be}$$

$$c_c = 40 + 9,5 = 49,5 mm$$

$$s_{max} = 380 \left(\frac{280}{207,27} \right) - 2,5 \cdot 49,5 = 389,8 mm = 38,89 cm$$

Pero no debe ser mayor que: $s_{max} = 300 \left(\frac{280}{f_s} \right)$

$$s_{max} = 300 \left(\frac{280}{207,27} \right) = 405,5 mm = 40,55 cm$$

Predominando el 1er cálculo, por lo que $s_{max} = 38,89 cm$

A continuación se calcula el espaciamiento real entre las barras:

$$s_{real} = \frac{b - 2c_c - n_b d_b}{n_b - 1}$$

$$s_{real} = \frac{30 - 2 \cdot 4,95 - 2 \cdot 2,54}{2 - 1} = 15,02 cm$$

Valor que está por debajo del máximo permitido,

Si se emplearan las expresiones propuestas para las condiciones cubanas, que restringen el ancho de fisura a $0,35 mm$ el espaciamiento máximo será:

$$s_{max} = 300 \left(\frac{280}{f_s} \right) - 2,5 c_c$$

$$s_{max} = 300 \left(\frac{280}{2702,7} \right) - 2,5 \cdot 49,5 = 281,7 mm = 28,17 cm$$

Que como se aprecia es también mayor que el real, pero mucho mas exigente

Si se calcula las aberturas de fisura, primero por las expresiones de Gergely Lutz:

$$d_c = d_s + \frac{d_b}{2} + 40 + 10 = 62,2 mm$$

$$A_k = \frac{2d_s b}{n_b} = \frac{2 \cdot 62,2 \cdot 300}{2} = 18660 mm^2$$

$$\beta = \frac{h_2}{h_1} = \frac{h - x}{d - x} = \frac{70 - 7,58}{63,78 - 7,58} = 1,111$$

finalmente:

$$a_f = 1,1 \cdot 10^{-5} \beta f_s^3 \sqrt{d_c A_k}$$

$$a_f = 1,1 \cdot 10^{-5} \cdot 1,111 \cdot 207,17^3 \sqrt{62,2 \cdot 18660} = 0,266 mm > 0,25 mm$$

Utilizando la expresión menos conservadora de Frosch

$$a_f = 2 \frac{f_s}{E_s} \beta \sqrt{d_c^2 + \left(\frac{s}{2} \right)^2}$$

$$a_f = 2 \frac{207,17}{200000} 1,111 \sqrt{62,2^2 + \left(\frac{150,2}{2} \right)^2} = 0,224 mm$$

Por lo que, pese a sobrepasar la abertura de la grieta calculada por GL, puede considerarse que la sección satisface los requerimientos de fisuración.

b) Sección para el momento positivo en las luces extremas

En este caso son 2 barras N°25 y 3 N°22 situadas en dos camadas, con $A_s = 21,81\text{cm}^2$

Chequando las expresiones normativas:

$$s_{max} = 380 \left(\frac{280}{f_s} \right) - 2,5c_c$$

Donde:

$$f_s = \frac{M_k}{A_s(d - \frac{x}{3})} = 210,65\text{MPa}$$

$$s_{max} = 380 \left(\frac{280}{210,65} \right) - 2,5 \cdot 49,5 = 380,7\text{mm} = 38,07\text{cm}$$

Pero no debe ser mayor que: $s_{max} = 300 \left(\frac{280}{f_s} \right) = 39,82\text{cm}$

Predominando el 1er cálculo, por lo que $s_{max} = 38,07\text{cm}$

Si se emplearan las expresiones propuestas para las condiciones cubanas $s_{max} = 27,45\text{cm}$, como se aprecia la sección cumple estas regulaciones holgadamente pues la separación entre las barras es de 6,24 cm

Calculando la abertura de fisuras

$$a_f = 0,24\text{mm} \quad \text{por Gergely Lutz y considerando 4,28 barras equivalentes}$$

$$a_f = 0,172\text{mm} \quad \text{por Frosch}$$

Menores que el límite de 0,25mm

c) Sección para el momento negativo sobre los apoyos

En este caso son 4 barras N°25 y 2 N°22 situadas en dos camadas, con $A_s = 28,14\text{cm}^2$

Chequando las expresiones normativas:

$$s_{max} = 380 \left(\frac{280}{f_s} \right) - 2,5c_c$$

Donde:

$$f_s = \frac{M_k}{A_s(d - \frac{x}{3})} = 216,78\text{MPa}$$

$$s_{max} = 380 \left(\frac{280}{216,78} \right) - 2,5 \cdot 49,5 = 367,1\text{mm} = 36,71\text{cm}$$

Pero no debe ser mayor que: $s_{max} = 300 \left(\frac{280}{f_s} \right) = 38,75\text{cm}$

Predominando el 1er cálculo, por lo que $s_{max} = 36,71\text{cm}$

Si se emplearan las expresiones propuestas para las condiciones cubanas $s_{max} = 26,37\text{cm}$, como se aprecia la sección cumple estas regulaciones holgadamente pues la separación entre las barras es de 6,24 cm

Calculando la abertura de fisuras

$$a_f = 0,249\text{mm} \quad \text{por Gergely Lutz}$$

$$a_f = 0,1876\text{mm} \quad \text{por Frosch}$$

Menores que el límite de 0,25mm

CHEQUEO DE LAS FECHAS MÁXIMAS

Considerando que la fecha permisible es $\frac{L}{480}$ según las características funcionales del entrepiso, calculemos las flechas para las vigas externas que resultan las más desfavorables por la magnitud del momento flector y las características de los apoyos

Para esta sección las características son:

$$M_{CP} = 157,59 \text{ kN} \cdot \text{m}$$

$$M_{CU} = 107,99 \text{ kN} \cdot \text{m}$$

De ellas el 60% de larga duración

$$M_{CUld} = 43,2 \text{ kN} \cdot \text{m}$$

$$M_{CUcd} = 64,8 \text{ kN} \cdot \text{m}$$

Y las características geométricas son:

$$I_h = 1960049,81 \text{ cm}^4$$

$$M_{cr} = 117,89 \text{ kN} \cdot \text{m}$$

$$x = 10,536 \text{ cm}$$

$$I_{cr} = 607596 \text{ cm}^4$$

Calculando la inercia efectiva de la sección, para $M_2 = M_{CP} + M_{CU} = 265,58 \text{ kN} \cdot \text{m}$

$$I_{e2} = I_{cr} + \left(\frac{M_{cr}}{M_2} \right)^3 (I_h - I_{cr})$$

$$I_{e2} = 607593 + \left(\frac{117,89}{265,58} \right)^3 (1960049,81 - 607593) = 725894,14 \text{ cm}^4 < I_h$$

Como la sección del apoyo, al ser rectangular, no tiene más inercia que la central, no resulta conveniente buscar una inercia promedio entre ambos, por lo que se adopta el valor calculado

A continuación se calcula la fecha instantánea para el siguiente gráfico de momento provocado por la combinación más desfavorable para este caso, como se aprecia en la figura 9.33

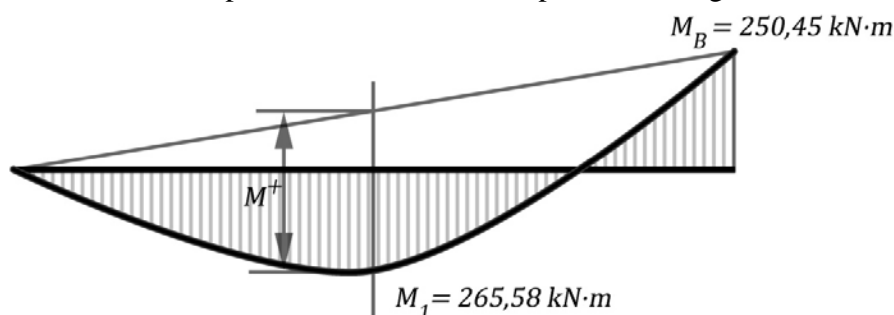


Figura 9,33: Combinación 1 para cargas de servicio, en las vigas extremas.

Donde:

M^+ momento isostático

$$M^+ = 265,58 + \frac{250,45}{2} = 390,81 \text{ kN} \cdot \text{m}$$

$$\Delta_{pt} = \rho_1 \frac{M^+ L^2}{E_c I_{e2}} + \rho_2 \frac{M^- L^2}{E_c I_{e2}}$$

Siendo $\rho_1 = \frac{5}{48}$, para vigas simplemente apoyada y cargas distribuidas y $\rho_2 = \frac{1}{12}$, para vigas simplemente apoyada y momento en un extremo

$$\Delta_{pt} = \frac{900^2}{2101,9 \cdot 725894,14} \left(\frac{5}{48} 39081 - \frac{1}{12} 25045 \right) = 1,05 \text{ cm}$$

$$\Delta_{ptld} = \Delta_{pt} \frac{M_{ld}}{M_2}, \quad \text{siendo } M_{ld} = M_{CP} + M_{CUI d} = 172,79 \text{ kN} \cdot \text{m}$$

$$\Delta_{ptld} = 1,05 \frac{172,79}{265,58} = 0,69 \text{ cm}$$

$$\Delta_{te} = \Delta_{pt} \frac{M_{CUI d}}{M_2}$$

$$\Delta_{ptld} = 1,05 \frac{43,2}{265,58} = 0,17 \text{ cm}$$

$$\Delta_{tot} = \Delta_{te} + \lambda_{\infty} \Delta_{ptld}$$

donde:

$$\lambda = \frac{T}{1 + 50\rho'}$$

$$\rho' = \frac{A_s'}{bd}$$

$$\rho' = \frac{10,2}{30 \cdot 61,24} = 0,0056$$

$$\lambda = \frac{2}{1 + 50 \cdot 0,0056} = 1,56$$

$$\Delta_{tot} = 0,173 + 1,56 \cdot 0,69 = 1,25 \text{ cm}$$

y como $\Delta_{per} = \frac{L}{480} = 1,875 \text{ cm}$ la viga cumple con los requisitos de flechas máximas.

7. Corte de barras

Para las barras situadas para resistir el **momento positivo en las luces externas**, 2 barras N°25 y 3 N°22, se procede a obtener el número de cortes y su respectiva longitud. Debe tomarse en cuenta que:

- En la zona central se colocarán 2 barras N°22
- Deben colocarse en los apoyos extremos al menos un tercio de A_s , por tanto 2 barras
- Deben colocarse en los apoyos centrales al menos un cuarto de A_s , por tanto 2 barras

Las distribuciones de los refuerzos es la sección se muestran en la figura 9,34

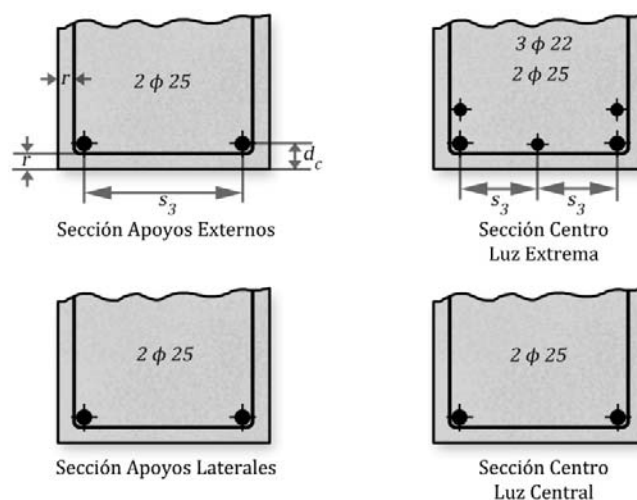


Figura 9,34: Distribución del refuerzo para momento positivo

Como existen solo 5 barras, por razones de calculo se busca que 2 lleguen al apoyo externo y 2 al central, solo se aplicará un solo corte. Al tratarse de barras con diferentes diámetros se realizan los cálculos con 4,28 barras equivalentes.

Entonces, obteniendo el valor de L_p de la figura 9,35

$$L_1 = L_p \sqrt{\frac{n_1}{n_p}}$$

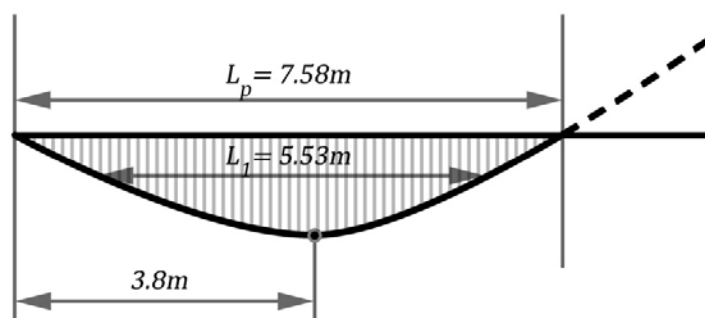


Figura 9,35: Viga extrema. Longitudes para el corte de barras

Para las barras que llegan al apoyo extremo

$$L_1 = 7,58 \sqrt{\frac{2,28}{4,28}} = 5,53m$$

Calculando la longitud de anclaje:

$$l_{db} = \frac{0,9f_y}{\sqrt{f_c'}} d_b$$

$$l_{db} = \frac{0,9 \cdot 300}{\sqrt{20}} 2,5 = 152,46cm$$

Pero analizando las correcciones introducidas por diferentes factores:

$$l_d = \left[\frac{\psi_t \psi_e \psi_s \lambda}{\left(\frac{c_b + K_{tr}}{d_b} \right)} \right] 152,46 \frac{A_{calc}}{A_{real}}$$

- $\psi_t = 1$ por estar ubicadas las barras en zona de alta adherencia
- $\psi_s = 1$ por ser el diámetro N° 25
- $\lambda = 1$ por ser hormigón común
- $\psi_e = 1$ por no tener revestimiento las barras
- $\frac{A_{calc}}{A_{real}} = \frac{21,71}{21,81} = 1$
- Por el recubrimiento y espaciamiento de las barras, conociendo que para las condiciones del ambiente y del elemento el recubrimiento es $r = 40mm$, medido de la cara de la sección al estribo

Calculando el valor de c

La separación de los centros de las barras considerando que en la camada más cercana al borde, con tres barras, el diámetro mayor es de $2,54\text{cm}$, será: $s_3 = \frac{30 - 2 \cdot 5 - 3 \cdot 2,54}{2} = 6,19\text{cm}$

El recubrimiento al centro de la barra: $d_c = 6,22\text{cm}$

Tomando como c el menor entre d_c y $\frac{s_3 + d_b}{2}$, $c = 4,37\text{cm}$

Además considerando $K_{tr} = 0$, podrá calcularse el término $\frac{c + K_{tr}}{d_b} = 1,72$

Finalmente:

$$l_d = 152,46 \frac{1 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 1}{1,72} = 152,46 \cdot 0,581 = 88,64\text{cm}$$

Entonces las longitudes reales de los cortes de barras serán:

Como el valor de l_d es cercano al peralte d , predominará este como prolongación a partir del punto del corte de barras, entonces:

- Para el corte realizado de 3 barras

$$L_{11} = L_1 + 2 \cdot d$$

$$L_{11} = 5,53 + 2 \cdot 0,61 = 6,75\text{m}$$

Esta longitud tendrá su centro coincidiendo con el momento máximo de la zona, situado a 3,8m del apoyo como se muestra en la figura 9,35. Entonces el corte se realizará a 42cm del apoyo exterior y a 183cm del interior.

Las barras situadas para resistir el **momento positivo en la luz central**, son 4 barras N°25 y 2 N°22, que representan 5,52 barras equivalentes N° 25, por lo que se realizarán solo 2 cortes, que se representan en la figura 9,36:

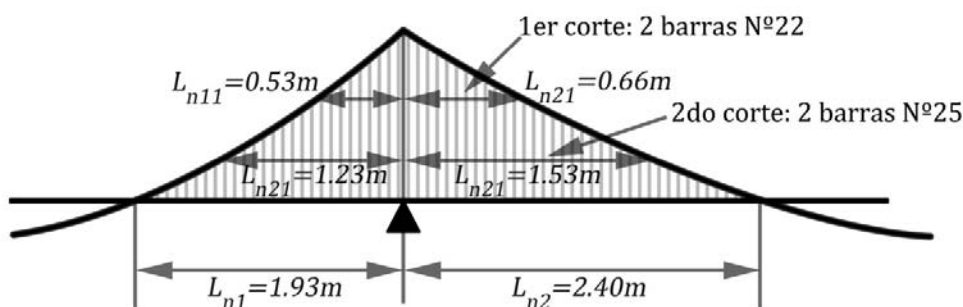


Figura 9,36: Momento negativo sobre los apoyos. Longitudes para el corte de barras

A LA DERECHA DEL APOYO

$$L_{n11} = L_{n1} \frac{n_1}{n_e} = 1,93 \frac{1,52}{5,52} = 0,53\text{m}$$

$$L_{n12} = L_{n1} \frac{n_2}{n_e} = 1,93 \frac{3,52}{5,52} = 1,23\text{m}$$

A LA IZQUIERDA DEL APOYO

$$L_{n21} = L_{n2} \frac{n_1}{n_e} = 2,4 \frac{1,52}{5,52} = 0,66\text{m}$$

$$L_{n22} = L_{n2} \frac{n_2}{n_e} = 2,4 \frac{3,52}{5,52} = 1,53\text{m}$$

Calculando la longitud de anclaje:

$$l_{db} = \frac{0,9f_y}{\sqrt{f_c'}} d_b$$

$$l_{db} = \frac{0,9 \cdot 300}{\sqrt{20}} 2,5 = 152,46\text{cm}$$

Pero analizando las correcciones introducidas por diferentes factores:

- $\psi_t = 1,3$ por estar ubicadas las barras en zona de baja adherencia
- $\frac{A_{calc}}{A_{real}} = \frac{27,52}{28,14} = 0,98$
- Por el recubrimiento y espaciamiento de las barras, con el auxilio de la figura 9,37

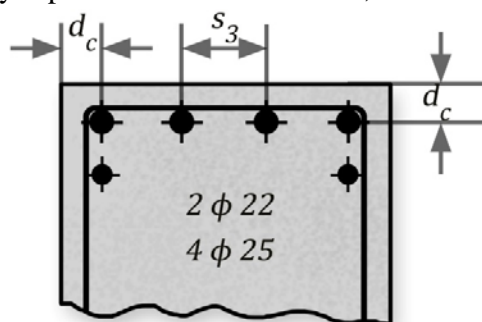


Figura 9,37 Distribución del refuerzo para momento negativo

Calculando el valor de c

La separación de los centros de las barras considerando que en la camada más cercana al borde, con tres barras, el diámetro mayor es de $2,54\text{cm}$, será: $s_3 = \frac{30 - 2 \cdot 5 - 4 \cdot 2,54}{3} = 3,28\text{cm}$

El recubrimiento al centro de la barra: $d_c = 6,22\text{cm}$

Tomando como c el menor entre d_c y $\frac{s_3 + d_b}{2}$, $c = 2,91\text{cm}$

Además considerando $K_{tr} = 0$, podrá calcularse el término $\frac{c + K_{tr}}{d_b} = 1,15$

Finalmente:

$$l_d = 152,46 \frac{1,3 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 0,98}{1,15} = 152,46 \cdot 1,11 = 168,9\text{cm}$$

Entonces las longitudes reales de los cortes de barras serán:

Para el primer corte, a la izquierda, $L_{n11} = 0,53\text{m}$ escogemos el mayor de los siguientes valores:

$$L_{n11} = L_{n11} + d = 1,11\text{m}$$

$$L_{n11} = l_d = 1,69\text{m}$$

Predominando la segunda condición

Para el primer corte, a la derecha, $L_{n21} = 0,66\text{m}$ escogemos el mayor de los siguientes valores:

$$L_{n21} = L_{n21} + d = 1,27\text{m}$$

$$L_{n21} = l_d = 1,69\text{m}$$

Predominando la segunda condición

Para el segundo corte, a la izquierda, $L_{n12} = 1,23\text{m}$ escogemos el mayor de los siguientes valores:

$$L_{n12} = L_{n12} + d = 1,79\text{m}$$

$$L_{n12} = L_{n11} + l_d = 2,22\text{m}$$

Predominando la segunda condición

Para el segundo corte, a la derecha, $L_{n22} = 1,53\text{m}$ escogemos el mayor de los siguientes valores:

$$L_{n22} = L_{n22} + d = 2,06m$$

$$L_{n22} = L_{n21} + l_d = 2,35m$$

Predominando también la segunda condición

8. Cálculo del cortante

a) Para los apoyos externos

Para esta zona de la viga el gráfico de cortante mayorado mas desfavorable es la combinación 1, como puede apreciarse en la figura 9,25. En la figura 9,38 se muestra este gráfico, donde se calcula la reducción del cortante para la sección crítica a una distancia d del apoyo. Considerando que el corte de las barras se produce una distancia menor que d , la sección tendrá 2 camadas y por tanto $d = 61,24cm$ y $d_s = 8,76cm$

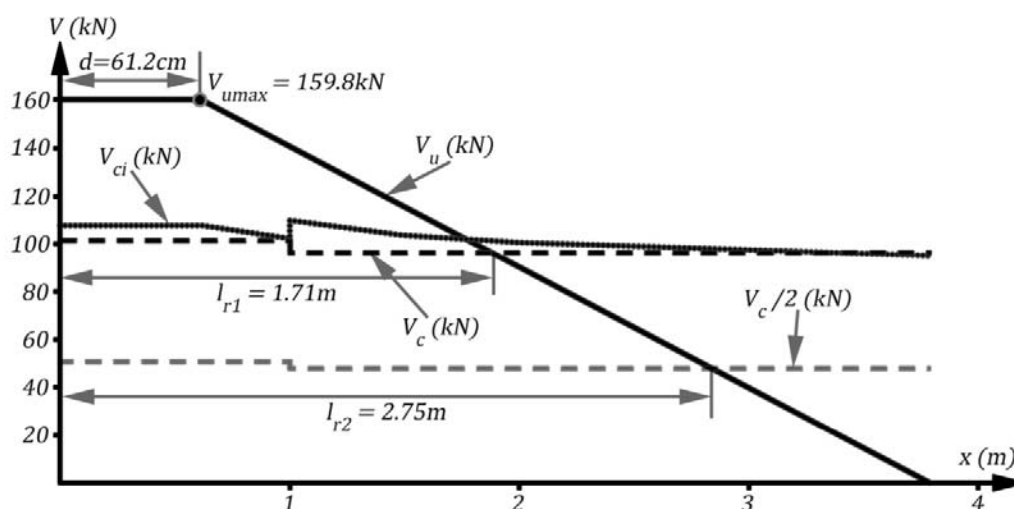


Figura 9,38: Gráfico de cortante para los apoyos externos.

El cálculo del aporte del hormigón a cortante V_c , se realizará considerando la expresión simplificada, aunque en la figura 9,39 se representa también el obtenido por la expresión más detallada, V_{ci}

$$V_c = 170\sqrt{f'_c} b_w d$$

donde:

$$b_w = 0,3m$$

para la sección T, a lo largo de toda la viga

$$d = 61,24cm$$

$$V_c = 170\sqrt{20} \cdot 0,3 \cdot 0,612 = 139,68kN$$

$$\phi V_c = 0,75 \cdot 139,68 = 104,76kN$$

$$\frac{\phi V_c}{2} = \frac{0,75 \cdot 139,68}{2} = 52,38kN$$

En la figura 9,38 por relaciones geométricas, conociendo que $V_u = 190,6kN$ y el punto de cortante cero está a $3,79m$ del apoyo, se obtienen:

$$V_{umax} = V_u \frac{l_r - d}{l_r}$$

$$V_{umax} = 190,6 \frac{3,79 - 0,612}{3,79} = 168,66kN < 5\phi V_c$$

$$l_{r1} = 3,79 \left(1 - \frac{104,76}{190,6} \right)$$

$l_{r1} = 1,71m$ zona en la que se requiere refuerzo por cálculo

$$l_{r2} = 3,79 \left(1 - \frac{52,38}{190,6} \right)$$

$l_{r2} = 2,75m$ distancia a partir de la cual no es necesario colocar ningún tipo de refuerzo transversal.

En la determinación de los **espaciamientos máximos** se deben diferenciar dos casos:

Para donde $V_u > \phi V_c$

$$s_{max} = \frac{A_v f_{yt}}{0,35 b_w} \quad \text{para } f'_c \leq 30MPa$$

Si se utilizan estribos N° 10, siendo $A_v = 1,42cm^2$ para 2 barras N° 10

$$s_{max} = \frac{1,42 \cdot 300}{0,35 \cdot 30} = 40,67cm \text{ mayor que } \frac{d}{2} = 30,62cm \text{ por lo que se adopta este último espaciamiento}$$

Para donde $\frac{\phi V_c}{2} < V_u < \phi V_c$:

$$s_{max} = \frac{d}{2} = 30,62 < 60cm$$

Como era de esperar, para las características de esta viga, predomina la condición límite de $\frac{d}{2}$, por lo que se colocará este en toda la zona que se requiera, se redondeará este valor a 30 cm

Utilizando el **método del “Cortante Límite”** se obtiene el valor de fuerza cortante (V_{ux}) para la que se requiere exactamente el espaciamiento máximo. Como el espaciamiento máximo es 30 cm, se obtiene el cortante actuante en este punto:

$$V_{ux} = \frac{\phi A_v f_{yt} \cdot d}{s_{max}} + \phi V_c$$

$$V_{ux} = \frac{0,75 \cdot 1,42 \cdot 30 \cdot 61,24}{30} + 104,77 = 168,66kN$$

Como $V_{ux} > V_{umax}$ no se requiere colocar un espaciamiento mayor que el máximo y se distribuirán los estribos de la siguiente forma:

10 estribos espaciados a 30cm del apoyo hasta 2,8m (el 1er estribo se coloca a 5cm del borde)

La distribución se puede apreciar en la figura 9,39:

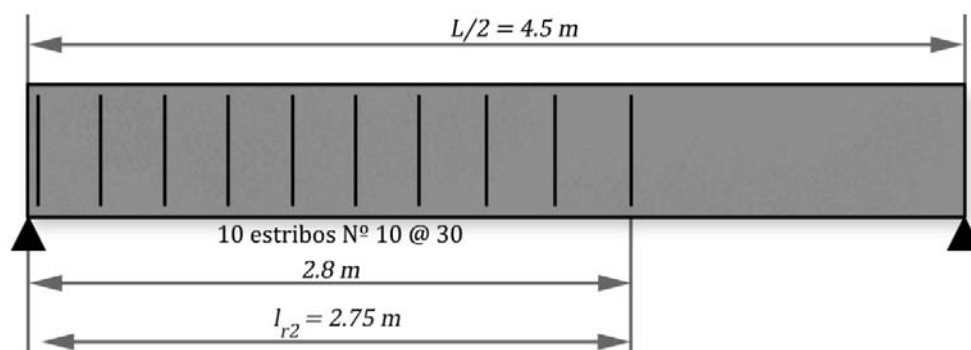


Figura 9,39: Distribución del refuerzo transversal en los apoyos externos

b) Para los apoyos centrales. Vigas externas

Conociendo que en este caso la combinación mas desfavorable es la 3, se obtiene en el gráfico que se muestra en la figura 9,40, conociendo que $V_{umax} = 274,95kN$ y el punto de cortante cero está a 5,46 m del apoyo central.

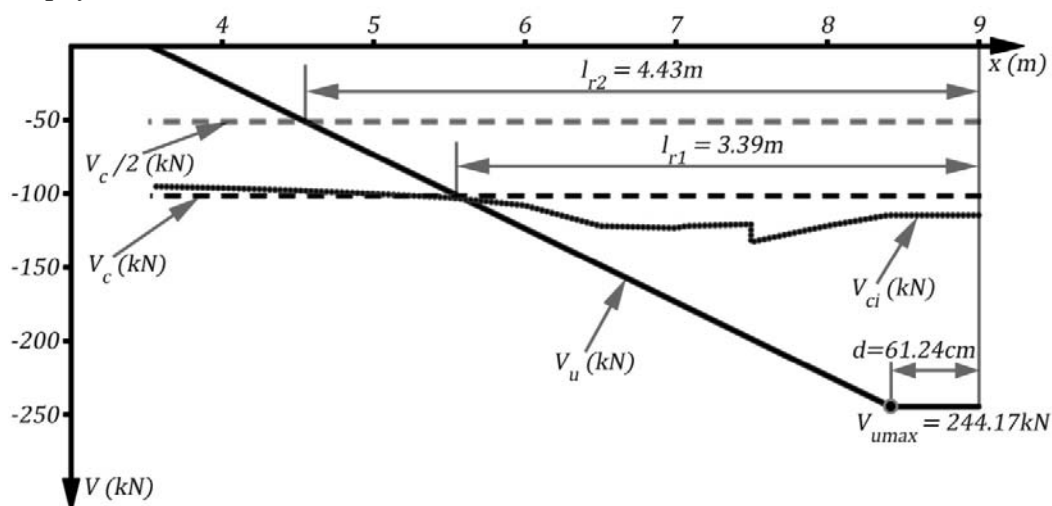


Figura 9,40: Gráfico de cortante para los apoyos centrales. Cortante a la izquierda

Entonces:

$$\begin{aligned}
 d &= 61,24cm & d_s &= 8,76cm \\
 \phi V_c &= 0,75 \cdot 139,68 = 104,76kN \\
 \frac{\phi V_c}{2} &= \frac{0,75 \cdot 139,68}{2} = 52,38kN \\
 V_{umax} &= 274,95 \frac{5,46 - 0,612}{5,46} = 244,17kN < 5\phi V_c \\
 l_{r1} &= 5,46 \left(1 - \frac{104,76}{274,95}\right) = 3,39m \\
 l_{r2} &= 5,46 \left(1 - \frac{52,38}{274,95}\right) = 4,43m \\
 s_{max} &= \frac{d}{2} = 30cm
 \end{aligned}$$

Utilizando el **método del "Cortante Límite"**:

$$V_{ux} = \frac{0,75 \cdot 1,42 \cdot 30 \cdot 61,24}{30} + 104,77 = 168,66kN$$

Como $V_{ux} < V_{umax}$ se requerirá un espaciamiento menor que el máximo colocado en la distancia l_{rx} a partir de la cual comienza a requerirse el espaciamiento máximo de 30cm, que se calculo por relaciones de triángulos:

$$l_{rx} = 5,46 \left(1 - \frac{168,66}{274,95}\right) = 2,12m$$

El espaciamiento a colocar en esta zona se obtiene entonces:

$$\begin{aligned}
 s_x &= \frac{\phi A_v f_{yt} d}{V_{umax} - \phi V_c} \\
 s_x &= \frac{0,75 \cdot 1,42 \cdot 30 \cdot 61,24}{244,17 - 104,76} = 14,035cm
 \end{aligned}$$

Con estos valores se distribuirán los estribos de la siguiente forma:

1er tramo se colocarán 17 estribos espaciados a 14cm del apoyo a 2,24m
 2do tramo se colocarán 8 estribos espaciados a 30cm de 2,24 a 4,64m

En la figura 9,41 se aprecia la variante de distribución de los estribos que satisface los valores de espaciamiento requerido

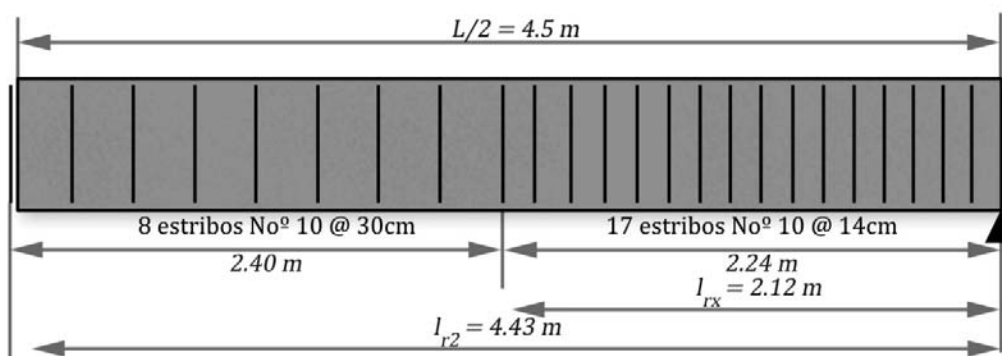


Figura 9,41: Distribución del refuerzo transversal en los apoyos centrales, parte izquierda

c) Para los apoyos centrales. Viga interior

En este caso la combinación más desfavorable es también la 3, y se obtiene en el gráfico que se muestra en la figura 9.42, los principales parámetros para el cálculo: $V_{umax} = 244,22kN$ y el punto de cortante cero está a 4,82 m del apoyo central.

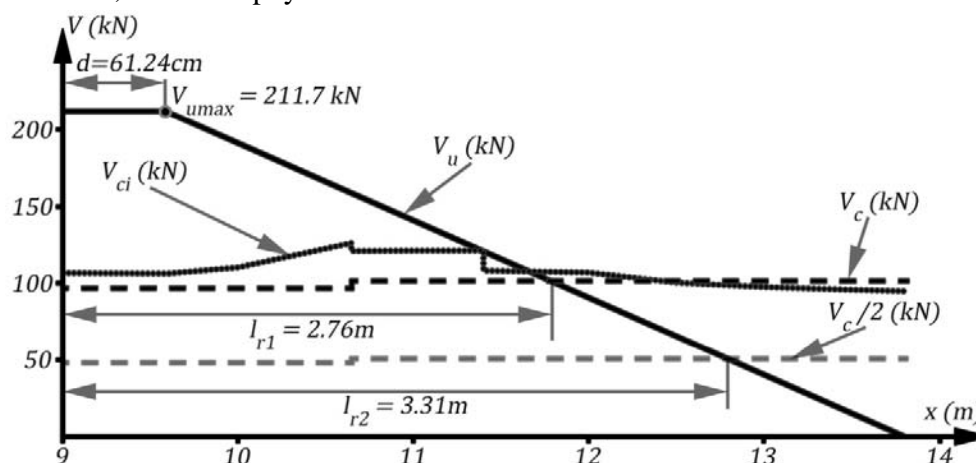


Figura 9,42: Gráfico de cortante para los apoyos centrales, parte derecha.

Entonces:

$$\begin{aligned}
 d &= 61,24cm & d_s &= 8,76cm \\
 \phi V_c &= 0,75 \cdot 139,68 = 104,76kN \\
 \frac{\phi V_c}{2} &= \frac{0,75 \cdot 139,68}{2} = 52,38kN \\
 V_{umax} &= 244,22 \frac{4,82 - 0,612}{4,82} = 211,7kN < 5\phi V_c \\
 l_{r1} &= 4,82 \left(1 - \frac{104,76}{244,22} \right) = 2,74m \\
 l_{r2} &= 4,82 \left(1 - \frac{52,38}{244,22} \right) = 3,78m
 \end{aligned}$$

$$s_{max} = \frac{d}{2} = 30cm$$

Utilizando el **método del “Cortante Límite”**:

$$V_{ux} = \frac{0,75 \cdot 1,42 \cdot 30 \cdot 61,24}{30} + 104,77 = 168,66kN$$

Como $V_{ux} < V_{umax}$ se requerirá un espaciamiento menor que el máximo colocado en la distancia l_{rx} a partir de la cual comienza a requerirse el espaciamiento máximo de $30cm$, que se calculo por relaciones de triángulos:

$$l_{rx} = 4,86 \left(1 - \frac{104,76}{244,22} \right) = 1,46m$$

El espaciamiento a colocar en esta zona se obtiene entonces:

$$s_x = \frac{\phi A_v f_{yt} d}{V_{u max} - \phi V_c}$$

$$s_x = \frac{0,75 \cdot 1,42 \cdot 30 \cdot 61,24}{211,7 - 104,76} = 18,3cm$$

Con estos valores se distribuirán los estribos de la siguiente forma:

1er tramo se colocarán 10 estribos espaciados a 18cm del apoyo a 1,62m

2do tramo se colocarán 8 estribos espaciados a 30cm de 1,62 a 4,02m

Y finalmente los resultados del espaciamiento del refuerzo se muestran en la figura 9,43.

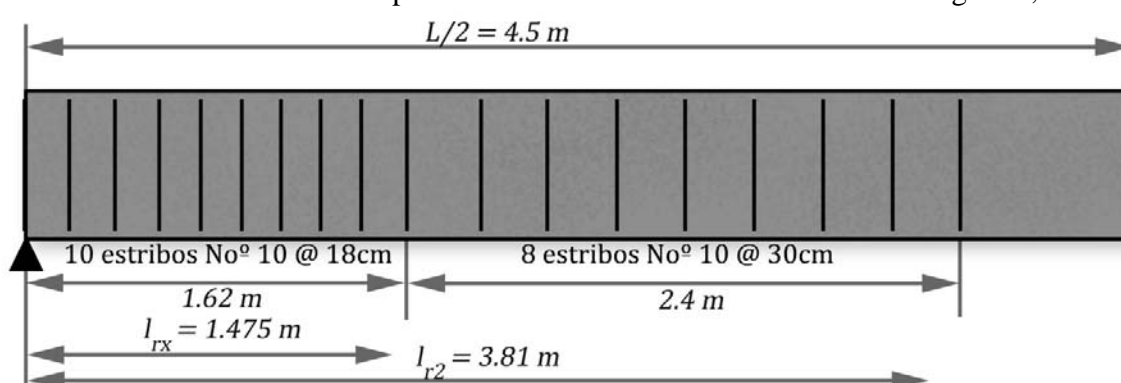


Figura 9,43: Distribución del refuerzo transversal en los apoyos centrales, parte derecha

En el esquema de la figura 9,44 se muestra la distribución longitudinal y transversal del refuerzo

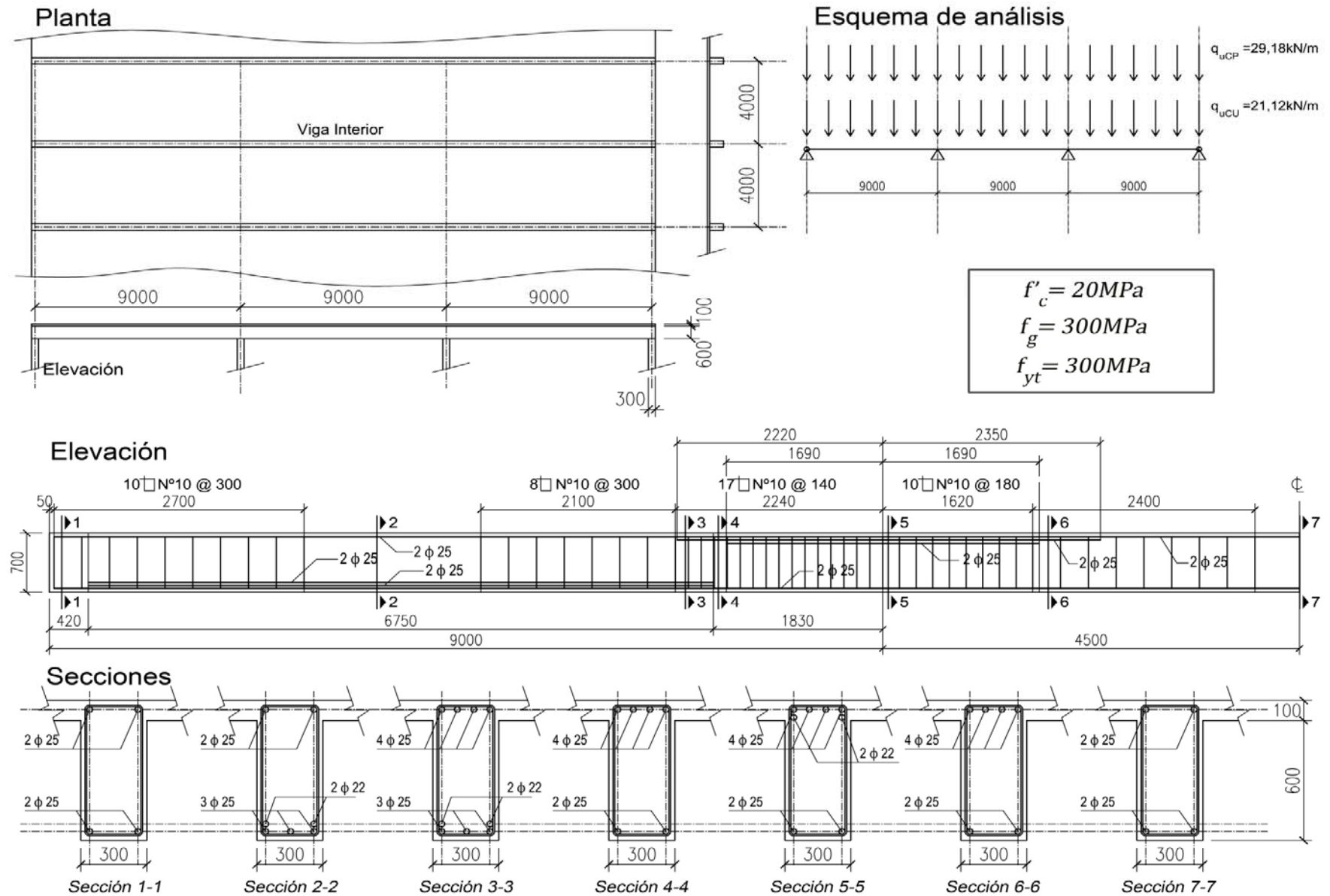
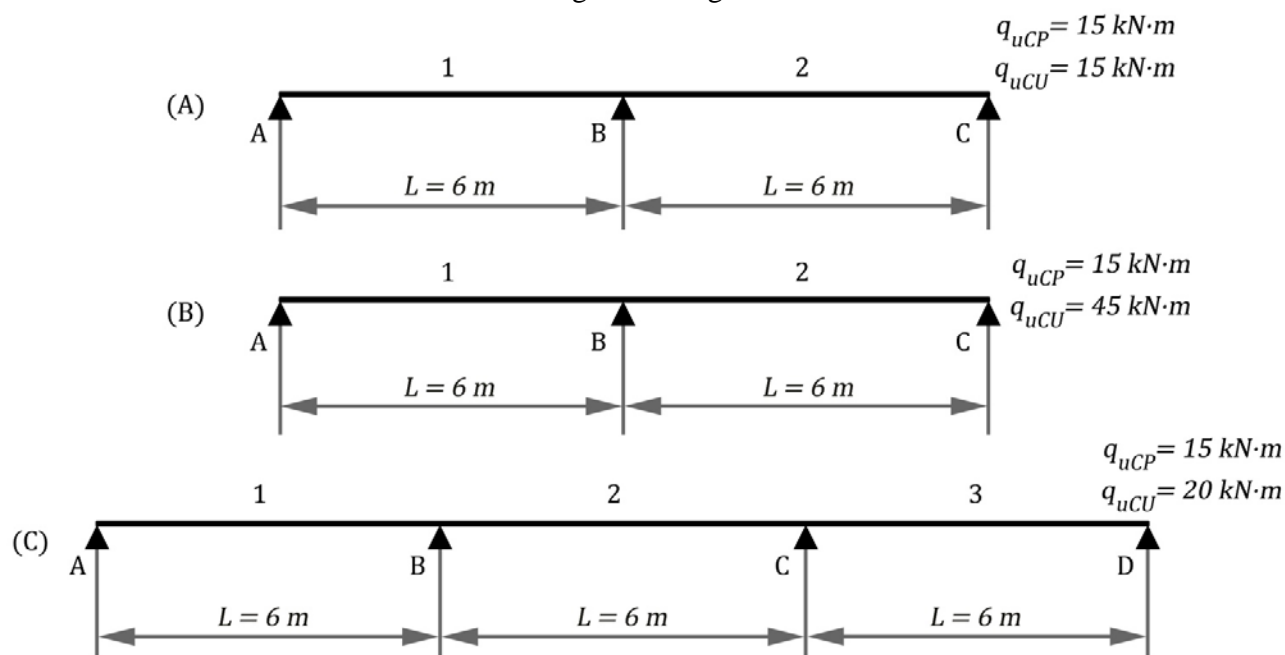


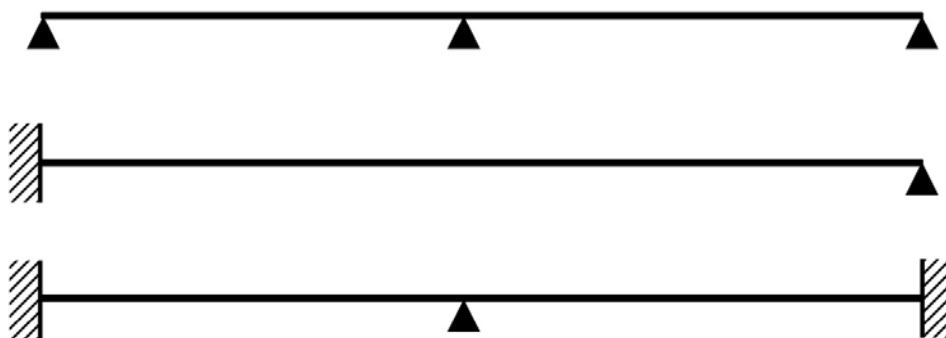
Figura 9,44: Plano de la viga continua.

EJERCICIOS PROPUESTOS

1. Para los diferentes tipos de vigas que se muestran en la figura 9,45, realice una comparación entre los resultados elásticos obtenidos por el método de carga y descarga y el de los coeficientes plásticos redistribuidos del ACI (Epígrafe 9.9)
 - a. Para el ejemplo desarrollado en el epígrafe anterior
 - b. Utilizando las **Tablas A- 8** en las vigas de la figura

**Figura 9,45: Ejercicio 1**

2. Sobre la formación de ARTICULACIONES PLÁSTICAS responda:
 - a. ¿Cómo y cuando se forma una articulación plástica?
 - b. ¿Qué diferencia una articulación plástica de una real?
 - c. Para los elementos mostrados en la figura 9,46 ¿cuál es número mayor de articulaciones plásticas que pueden formarse sin fallar?. Explique su respuesta

**Figura 9,46: Ejercicio 2**

3. Haga una comparación de las soluciones de vigas mostradas en la figura 9,47, planteando ventajas y desventajas. Exponga las ventajas de la redistribución de momentos en elementos hiperestáticos.

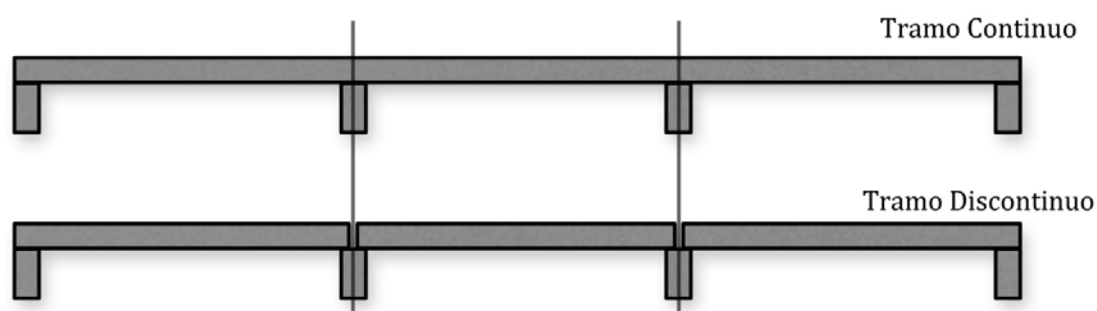


Figura 9,47: Ejercicio 3

4. Explique cuáles son las limitaciones para poder desarrollar redistribuciones de momento en dependencia de:
- Del comportamiento mecánico de la sección
 - Del comportamiento estructural del elemento

Exponga la expresión del ACI para la determinación del % de redistribución de momentos. Coméntela en función de lo explicado anteriormente.

5. Obtenga los % de redistribución de momentos en los elementos expuestos en la figura 9,48

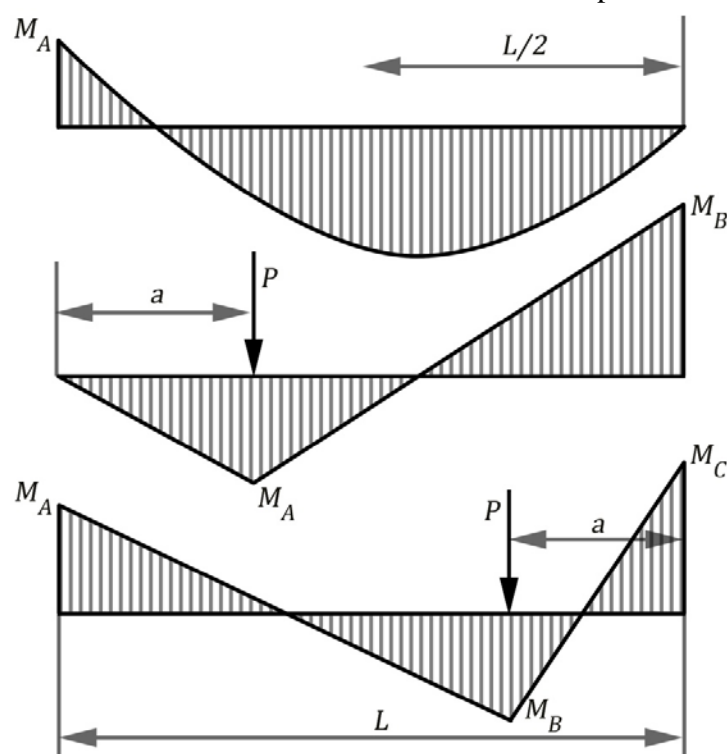


Figura 9,48: Ejercicio 5

6. En la viga continua de la figura 9,49 todas las secciones están diseñadas para resistir un valor de momento máximo M_u .

Si la sección sobre el apoyo falla a un valor de carga q , ¿cuál es la máxima carga q_u que es capaz de soportar la viga?

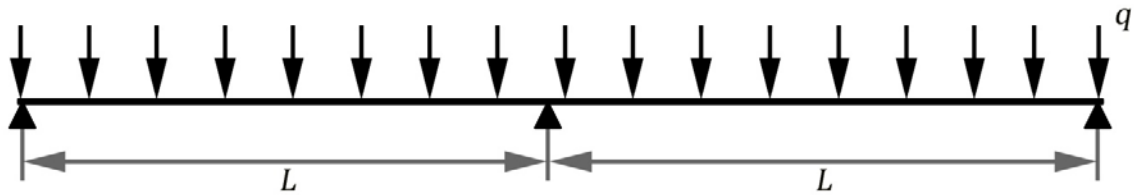


Figura 9,49: Ejercicio 6

BIBLIOGRAFÍA CONSULTADA

1. American Concrete Institute. Building Code Requirements for Reinforced Concrete, ACI 318 – 02, Detroit, Michigan. 2005
2. ACI 318 02 Requisitos para Hormigón Estructural. PCA 2002.
3. Baykov, V. y E. Sigalov. Estructuras de Hormigón Armado. Moscú: Ed. Mir, 1986
4. Medina Torri F.; Ruiz Alejo L. “Hormigón Estructural 1” Editorial Pueblo y Educación. La Habana. Cuba. 1991
5. ---- “Hormigón Estructural II” Editorial Pueblo y Educación. La Habana. Cuba. 1987
6. Medina Torri, F. Cargas de Edificaciones y Obras de Ingeniería. La Habana: Editorial Felix Varela. 1995
7. Meli Piralla R. “Diseño Estructural Edición revolucionaria. La Habana. Cuba. 1986
8. N.C. 053–039–1997. Obras de Hormigón Armado. Principios Generales y Métodos de Cálculo. 1997
9. Nilson, H. A. Diseño de Estructuras de Concreto Presforzado. México: Ed. Limusa, 1999
10. Park, R. y T, Paulay. Estructuras de Concreto Reforzado. México: Ed. Limusa, 1979

ANEXOS

Ayudas de cálculo.

TABLA A-1: Áreas de barras de refuerzo (cm^2)

N°	N° (ACI)	Diam (mm)	NÚMEROS DE BARRAS									
			1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
10	3	9.5	0.71	1.42	2.13	2.84	3.55	4.26	4.97	5.68	6.39	7.1
13	4	12.7	1.29	2.58	3.87	5.16	6.45	7.74	9.03	10.32	11.61	12.90
16	5	15.9	1.99	3.98	5.97	7.96	9.95	11.94	13.93	15.92	17.91	19.9
19	6	19.1	2.84	5.68	8.52	11.36	14.2	17.04	19.88	22.72	25.56	28.40
22	7	22.2	3.87	7.74	11.61	15.48	19.35	23.22	27.09	30.96	34.83	38.70
25	8	25.4	5.1	10.2	15.3	20.4	25.5	30.6	35.7	40.8	45.9	51
32	10	32.3	8.19	16.38	24.57	32.76	40.95	49.14	57.33	65.52	73.71	81.9
36	11	35.8	10.06	20.12	30.18	40.24	50.30	60.36	70.42	80.48	90.54	100.6

TABLA A-2 : Valores de μ_r , ω_r , a/d y c/d para DOMINIOS 2 ó 3. FALLO DUCTIL.

	$k = c/d$	a/d	ω_r	μ_r		$k = c/d$	a/d	ω_r	μ_r
DOMINIO 2	0.0554	0.0471	0.04	0.0391	DOMINIO 3	0.3875	0.3294	0.28	0.2337
	0.0692	0.0588	0.05	0.0485		0.4014	0.3412	0.29	0.2404
	0.0830	0.0706	0.06	0.0579		0.4152	0.3529	0.3	0.2469
	0.0969	0.0824	0.07	0.0671		0.4291	0.3647	0.31	0.2533
	0.1107	0.0941	0.08	0.0762		0.4429	0.3765	0.32	0.2596
	0.1246	0.1059	0.09	0.0852		0.4567	0.3882	0.33	0.2657
	0.1384	0.1176	0.1	0.0941		0.4706	0.4000	0.34	0.2718
	0.1522	0.1294	0.11	0.1029		0.4844	0.4118	0.35	0.2777
	0.1661	0.1412	0.12	0.1115		0.4983	0.4235	0.36	0.2835
	0.1799	0.1529	0.13	0.1200		0.5121	0.4353	0.37	0.2892
	0.1938	0.1647	0.14	0.1284		0.5260	0.4471	0.38	0.2948
	0.2076	0.1765	0.15	0.1367		0.5398	0.4588	0.39	0.3003
	0.2215	0.1882	0.16	0.1449		0.5536	0.4706	0.4	0.3056
	0.2308	0.1962	0.1667	0.1503		0.5675	0.4824	0.41	0.3108
DOMINIO 3a	0.2353	0.2000	0.17	0.1529		0.5813	0.4941	0.42	0.3159
	0.2491	0.2118	0.18	0.1609		0.5952	0.5059	0.43	0.3209
	0.2630	0.2235	0.19	0.1687		0.6090	0.5176	0.44	0.3258
	0.2768	0.2353	0.2	0.1764		0.6228	0.5294	0.45	0.3305
	0.2907	0.2471	0.21	0.1840		0.6367	0.5412	0.46	0.3352
	0.3045	0.2588	0.22	0.1914		0.6505	0.5529	0.47	0.3397
	0.3183	0.2706	0.23	0.1988		0.6644	0.5647	0.48	0.3441
	0.3322	0.2824	0.24	0.2060		0.6782	0.5765	0.49	0.3483
	0.3460	0.2941	0.25	0.2131					
	0.3599	0.3059	0.26	0.2201					
	0.3737	0.3176	0.27	0.2270					
	0.3750	0.3188	0.2709	0.2276					

TABLA A-3 : Valores de μ_r , ω_r , a/d y c/d para DOMINIO 4. FALLO FRÁGIL.

$k = c/d$	a/d	μ_r	<i>G-34</i>		<i>G-40</i>		<i>G-50</i>	
			η	ω_r/η	η	ω_r/η	η	ω_r/η
0.5882	0.50	0.3184					1	0.4250
0.6118	0.52	0.3267					0.91	0.4875
0.6353	0.54	0.3347					0.82	0.5597
0.6671	0.5671	0.3449			1	0.4820	0.71	0.6762
0.6824	0.58	0.3496			0.93	0.5295	0.67	0.7413
0.6941	0.59	0.3531			0.88	0.5690	0.63	0.7966
0.7059	0.6	0.3565			0.83	0.6120	0.60	0.8568
0.7143	0.60714	0.3589	1	0.5161	0.80	0.6451	0.57	0.9031
0.7294	0.62	0.3631	0.93	0.5682	0.74	0.7103	0.53	0.9944
0.7412	0.63	0.3663	0.87	0.6134	0.70	0.7667	0.50	1.0734
0.7529	0.64	0.3694	0.82	0.6632	0.66	0.8290	0.47	1.1605
0.7647	0.65	0.3724	0.77	0.7183	0.62	0.8978	0.44	1.2569
0.7765	0.66	0.3753	0.72	0.7795	0.58	0.9744	0.41	1.3641
0.7882	0.67	0.3781	0.67	0.8479	0.54	1.0599	0.38	1.4839
0.8000	0.68	0.3809	0.63	0.9248	0.50	1.1560	0.36	1.6184
0.8235	0.7	0.3861	0.54	1.1107	0.43	1.3883	0.31	1.9437

TABLA A-4: PROPIEDADES DEL ÁREA COMPRIMIDA

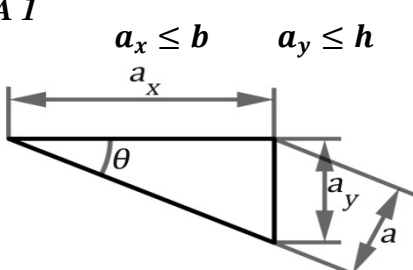
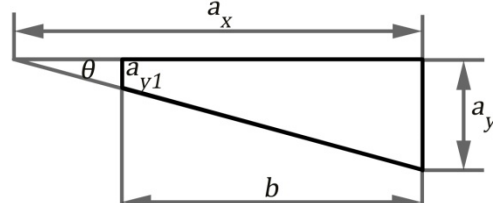
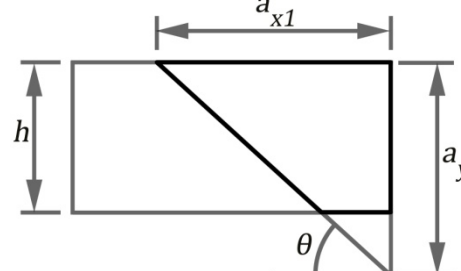
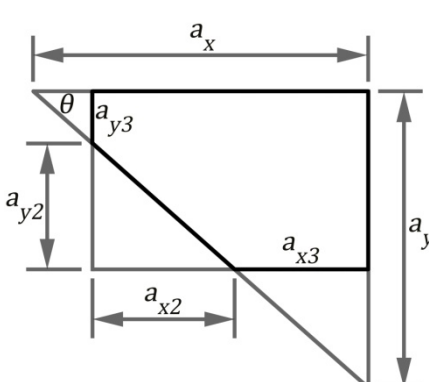
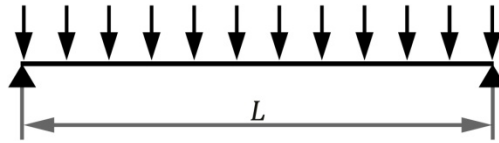
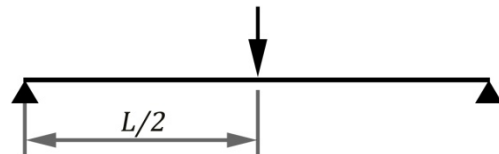
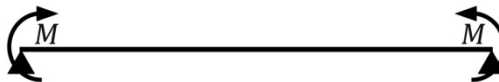
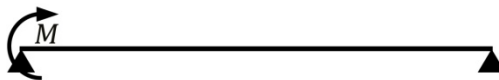
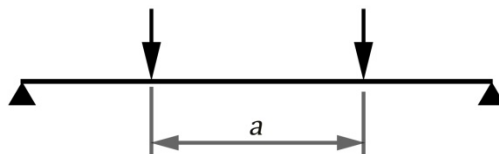
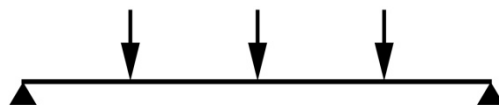
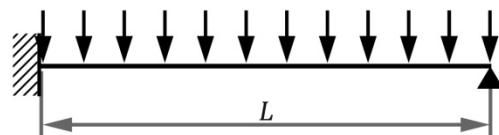
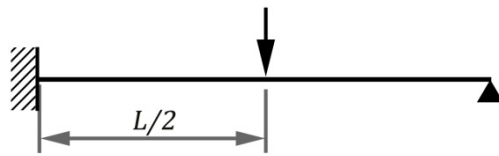
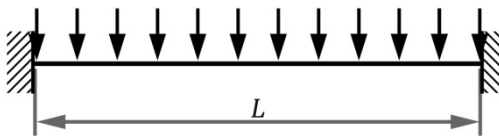
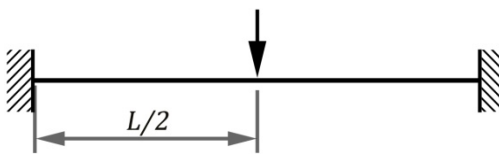
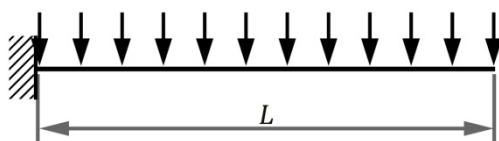
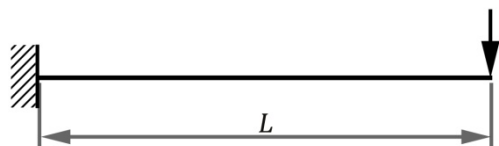
	Área comprimida (A')	Posición del centroide (\bar{x}, \bar{y})
ÁREA 1  <p>$a_x \leq b$ $a_y \leq h$</p> <p>a_x</p> <p>θ</p> <p>a_y</p> <p>a</p>	$a_x = \frac{a}{\sin \theta}$ $a_y = \frac{a}{\cos \theta}$ $A' = \frac{1}{2} a_x a_y$	$\bar{x} = \frac{a_x}{3}$ $\bar{y} = \frac{a_y}{3}$
ÁREA 2  <p>$a_x > b$ $a_y \leq h$</p> <p>a_x</p> <p>θ</p> <p>a_{y1}</p> <p>a_y</p> <p>b</p>	$a_{y1} = (a_x - b) \tan \theta$ $A' = \frac{1}{2} b (a_y + a_{y1})$	$\bar{x} = \frac{b(a_y + 2a_{y1})}{3(a_y + a_{y1})}$ $\bar{y} = (a_x - \bar{x}) \tan \frac{\theta}{2}$
ÁREA 3  <p>$a_x \leq b$ $a_y > h$</p> <p>a_{x1}</p> <p>h</p> <p>a_y</p> <p>θ</p>	$\alpha = 90^\circ - \theta$ $a_{x1} = (a_y - h) \tan \theta$ $A' = \frac{1}{2} h (a_x + a_{x1})$	$\bar{y} = \frac{h(a_x + 2a_{x1})}{3(a_x + a_{x1})}$ $\bar{x} = \frac{(a_y - \bar{y})}{\tan \frac{\alpha}{2}}$
ÁREA 4  <p>$a_x > b$ $a_y > h$</p> <p>a_x</p> <p>θ</p> <p>a_{y3}</p> <p>a_{y2}</p> <p>a_y</p> <p>a_{x3}</p> <p>a_{x2}</p>	$a_{x3} = (a_y - h) \tan \theta$ $a_{x2} = b - a_{x3}$ $a_{y3} = (a_x - b) \tan \theta$ $a_{y2} = h - a_{y3}$ $A'_{\text{triang}} = \frac{1}{2} a_{x2} a_{y2}$	$\bar{x}_2 = \frac{a_{x2}}{3}$ $\bar{y}_2 = \frac{a_{y2}}{3}$
	$A'_{\text{rect}} = b \cdot h$	$\bar{x} = \frac{b}{2}$ $\bar{y} = \frac{h}{2}$

TABLA A-5: Valores del coeficiente K para vigas aisladas.**1. Viga simplemente apoyada. Carga uniforme****5/48****2. Viga simplemente apoyada. Carga concentrada en el centro****1/24****3. Viga simplemente apoyada. Momentos en los extremos****1/8****4. Viga simplemente apoyada. Momentos en un extremos****1/12****5. Viga simplemente apoyada. Dos cargas concentradas simétricas****1/12****6. Viga simplemente apoyada. Tres cargas concentradas simétricas****1/10****7. Viga con un extremo empotrado y otro apoyado. Carga uniforme****1/13**

8. Viga con un extremo empotrado y otro apoyado. Carga concentrada**1/20****9. Viga con ambos extremos empotrados. Carga uniforme****1/16****10. Viga con ambos extremos empotrados. Carga concentrada****1/24****11. Viga en voladizo. Carga uniforme****1/4****12. Viga en voladizo. Carga concentrada****1/3****13. Vigas continuas.**

Para la flecha en el centro de la luz:

$$K = \frac{5}{48} \left(1,2 - 0,2 \frac{M_o}{M_a} \right)$$

Donde:

 M_o Momento en el centro de un tramo simple M_a Momento neto en el centro del tramo

$$(M_o = \frac{qL^2}{8})$$

TABLA A-6 Longitud de anclaje l_d para barras o alambres en zonas de alta adherencia, sin revestimiento, colocadas en hormigón de peso normal

CONDICIÓN	$f_c' (MPa)$	$f_y = 300MPa$		$f_y = 420MPa$	
		$n^\circ 16$ ó menor	$n^\circ 19$ ó mayor	$n^\circ 16$ ó menor	$n^\circ 19$ ó mayor
1	17.5	$35d_b$	$44d_b$	$49d_b$	$61d_b$
	20	$33d_b$	$41d_b$	$46d_b$	$57d_b$
	25	$29d_b$	$36d_b$	$41d_{bb}$	$51d_b$
	30	$27d_b$	$33d_b$	$37d_b$	$46d_b$
	35	$25d_b$	$31d_b$	$35d_b$	$43d_b$
	40	$23d_b$	$29d_b$	$32d_b$	$40d_b$
2	17.5	$52d_b$	$65d_b$	$73d_b$	$91d_b$
	20	$49d_b$	$61d_b$	$68d_b$	$85d_b$
	25	$44d_b$	$54d_b$	$61d_b$	$76d_b$
	30	$40d_b$	$50d_b$	$56d_b$	$69d_b$
	35	$37d_b$	$46d_b$	$52d_b$	$64d_b$
	40	$35d_b$	$43d_b$	$48d_b$	$60d_b$

- CONDICIÓN 1: $\frac{c+K_{tr}}{d} = 1,5$

La separación libre entre las barras que se anclan o empalman es mayor o igual que d_b , el recubrimiento libre es mayor o igual que d_b y la cantidad de estribos a lo largo de l_d es mayor que el mínimo indicado en las normativas
o bien

La separación libre entre las barras que se anclan o empalman es mayor o igual que $2d_b$ y el recubrimiento libre es mayor o igual que d_b

- CONDICIÓN 2: $\frac{c+K_{tr}}{d} = 1$

Otro caso no recogido en los anteriores

TABLA A-7 Número máximo de barras en una camada para vigas
Valores mínimos de recubrimiento por elementos estructurales (mm)

	CATEGORÍA DE AGRESIVIDAD			
	Muy Alta	Alta	Media	Baja
- Hormigonadas in situ	50	40	40	30
- Prefabricadas	40	35	35	25

BARRAS EN UNA CAMADA

DIAMETRO DE ESTRIBO N° 10

		Recubrimiento 25 mm								Recubrimiento 30 mm							
		ANCHO <i>b</i> (cm)								ANCHO <i>b</i> (cm)							
N°	Diam (mm)	15	20	25	30	35	40	45	50	15	20	25	30	35	40	45	50
13	12.7	3	4	6	7	9	10	12	13	2	4	5	7	8	10	11	13
16	15.9	2	4	5	6	8	9	11	12	2	3	5	6	8	9	10	12
19	19.1	2	3	5	6	7	8	10	11	2	3	4	6	7	8	10	11
22	22.2	2	3	4	5	6	7	9	10	2	3	4	5	6	7	8	9
25	25.4	2	3	4	5	6	7	8	8	1	2	3	4	5	6	7	8
32	32.3	1	2	3	4	4	5	6	7	1	2	3	3	4	5	6	7
36	35.8	1	2	3	3	4	5	5	6	1	2	2	3	4	4	5	6

		Recubrimiento 35 mm								Recubrimiento 40 mm							
		ANCHO <i>b</i> (cm)								ANCHO <i>b</i> (cm)							
N°	Diam (mm)	15	20	25	30	35	40	45	50	15	20	25	30	35	40	45	50
13	12.7	2	4	5	7	8	10	11	13	2	3	5	6	8	9	11	12
16	15.9	2	3	5	6	7	9	10	12	1	3	4	6	7	8	10	11
19	19.1	2	3	4	5	7	8	9	11	1	3	4	5	6	8	9	10
22	22.2	1	3	4	5	6	7	8	9	1	2	3	5	6	7	8	9
25	25.4	1	2	3	4	5	6	7	8	1	2	3	4	5	6	7	8
32	32.3	1	2	2	3	4	5	6	6	1	2	2	3	4	5	5	6
36	35.8	1	2	2	3	4	4	5	6	1	1	2	3	4	4	5	6

		Recubrimiento 50 mm							
		ANCHO <i>b</i> (cm)							
N°	Diam (mm)	15	20	25	30	35	40	45	50
13	12.7	1	3	4	6	7	9	10	12
16	15.9	1	2	4	5	6	8	9	11
19	19.1	1	2	3	5	6	7	8	10
22	22.2	1	2	3	4	5	6	7	9
25	25.4	1	2	3	4	5	6	7	8
32	32.3	0	1	2	3	4	4	5	6
36	35.8	0	1	2	3	3	4	5	5

BARRAS EN UNA CAMADA

DIAMETRO DE ESTRIBO N° 13

		Recubrimiento 25 mm								Recubrimiento 30 mm							
		ANCHO <i>b</i> (cm)								ANCHO <i>b</i> (cm)							
N°	Diam (mm)	15	20	25	30	35	40	45	50	15	20	25	30	35	40	45	50
13	12.7	2	4	5	7	9	10	12	13	2	4	5	7	8	10	11	13
16	15.9	2	4	5	6	8	9	10	12	2	3	5	6	7	9	10	12
20	19.1	2	3	4	6	7	8	10	11	2	3	4	6	7	8	9	11
22	22.2	2	3	4	5	6	7	8	10	1	3	4	5	6	7	8	9
25	25.4	1	2	3	4	5	6	7	8	1	2	3	4	5	6	7	8
32	32.3	1	2	3	3	4	5	6	7	1	2	3	3	4	5	6	6
36	35.8	1	2	2	3	4	5	5	6	1	2	2	3	4	4	5	6

		Recubrimiento 35 mm								Recubrimiento 40 mm							
		ANCHO <i>b</i> (cm)								ANCHO <i>b</i> (cm)							
N°	Diam (mm)	15	20	25	30	35	40	45	50	15	20	25	30	35	40	45	50
13	12.7	2	3	5	6	8	9	11	12	1	3	5	6	8	9	11	12
16	15.9	2	3	4	6	7	9	10	11	1	3	4	5	7	8	10	11
20	19.1	1	3	4	5	7	8	9	10	1	2	4	5	6	8	9	10
22	22.2	1	2	3	5	6	7	8	9	1	2	3	4	6	7	8	9
25	25.4	1	2	3	4	5	6	7	8	1	2	3	4	5	6	7	8
32	32.3	1	2	2	3	4	5	5	6	1	1	2	3	4	5	5	6
36	35.8	1	1	2	3	4	4	5	6	1	1	2	3	3	4	5	6

		Recubrimiento 50 mm							
		ANCHO <i>b</i> (cm)							
N°	Diam (mm)	15	20	25	30	35	40	45	50
13	12.7	1	2	4	5	7	9	10	12
16	15.9	1	2	4	5	6	8	9	10
20	19.1	1	2	3	4	6	7	8	10
22	22.2	1	2	3	4	5	6	7	8
25	25.4	0	1	2	3	4	5	6	7
32	32.3	0	1	2	3	3	4	5	6
36	35.8	0	1	2	2	3	4	5	5

TABLA A-8: Recubrimientos efectivos para barras de refuerzo en vigas.

RECUBRIMIENTO MECÁNICO BARRAS PRINCIPALES (mm)

			ESTRIBOS N° 10					ESTRIBOS N° 13				
			RECUBRIMIENTO (mm)					RECUBRIMIENTO (mm)				
1 CAMADA	N°	Diam (mm)	25	30	35	40	50	25	30	35	40	50
	10	9.5	39.3	44.3	49.3	54.3	64.3	42.5	47.5	52.5	57.5	67.5
	13	12.7	40.9	45.9	50.9	55.9	65.9	40.9	45.9	50.9	55.9	65.9
	16	15.9	42.5	47.5	52.5	57.5	67.5	45.7	50.7	55.7	60.7	70.7
	19	19.1	44.1	49.1	54.1	59.1	69.1	47.3	52.3	57.3	62.3	72.3
	22	22.2	45.6	50.6	55.6	60.6	70.6	48.8	53.8	58.8	63.8	73.8
	25	25.4	47.2	52.2	57.2	62.2	72.2	50.4	55.4	60.4	65.4	75.4
	32	32.3	50.7	55.7	60.7	65.7	75.7	53.9	58.9	63.9	68.9	78.9
	36	35.8	52.4	57.4	62.4	67.4	77.4	55.6	60.6	65.6	70.6	80.6
2 CAMADA	N°	Diam (mm)	25	30	35	40	50	25	30	35	40	50
	10	9.5	54.0	59.0	64.0	69.0	79.0	57.2	62.2	67.2	72.2	82.2
	13	12.7	57.2	62.2	67.2	72.2	82.2	57.2	62.2	67.2	72.2	82.2
	16	15.9	60.4	65.4	70.4	75.4	85.4	63.6	68.6	73.6	78.6	88.6
	19	19.1	63.6	68.6	73.6	78.6	88.6	66.8	71.8	76.8	81.8	91.8
	22	22.2	67.8	72.8	77.8	82.8	92.8	37.7	42.7	47.7	52.7	62.7
	25	25.4	72.6	77.6	82.6	87.6	97.6	75.8	80.8	85.8	90.8	100.8
	32	32.3	83.0	88.0	93.0	98.0	108.0	86.2	91.2	96.2	101.2	111.2
	36	35.8	88.2	93.2	98.2	103.2	113.2	91.4	96.4	101.4	106.4	116.4
3 CAMADA	N°	Diam (mm)	25	30	35	40	50	25	30	35	40	50
	10	9.5	68.8	73.8	78.8	83.8	93.8	72.0	77.0	82.0	87.0	97.0
	13	12.7	73.6	78.6	83.6	88.6	98.6	73.6	78.6	83.6	88.6	98.6
	16	15.9	78.4	83.4	88.4	93.4	103.4	81.6	86.6	91.6	96.6	106.6
	19	19.1	83.2	88.2	93.2	98.2	108.2	86.4	91.4	96.4	101.4	111.4
	22	22.2	90.0	95.0	100.0	105.0	115.0	93.2	98.2	103.2	108.2	118.2
	25	25.4	98.0	103.0	108.0	113.0	123.0	101.2	106.2	111.2	116.2	126.2
	32	32.3	115.3	120.3	125.3	130.3	140.3	118.5	123.5	128.5	133.5	143.5
	36	35.8	124.0	129.0	134.0	139.0	149.0	127.2	132.2	137.2	142.2	152.2

TABLA A-9: Momentos flectores y fuerzas de corte de vigas continuas con tramos iguales

Para carga uniformemente repartida

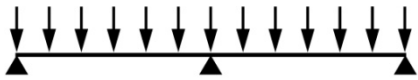
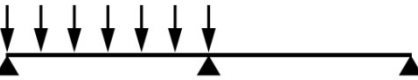




$$M = (\alpha q_{CP} + \beta q_{CU})L^2$$

Para carga concentrada

$$M = (\alpha P_{CP} + \beta P_{CU})L$$

$$V = (\gamma q_{CP} + \delta q_{CU})L$$

$$V = \gamma P_{CP} + \delta P_{CU}$$

VIGA DE DOS TRAMOS							
Esquema de cargas	Momentos de tramo		Momentos de apoyo	Fuerza cortante			
	M_1	M_2		V_A	V_{Bizq}	V_{Bder}	V_C
	0,07	0,07	-0,125	0,375	-0,625	0,625	-0,375
	0,096	-0,025	-0,063	0,437	-0,563	0,063	0,063
	0,156	0,156	-0,188	0,312	-0,688	0,688	-0,312
	0,203	-0,047	-0,094	0,406	-0,594	0,094	0,094
	0,222	0,222	-0,333	0,667	-1,334	1,334	-0,667
	0,278	-0,056	-0,167	0,833	-1,167	1,167	0,167

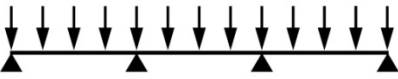
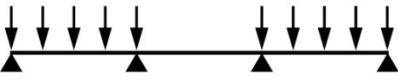
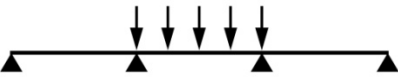
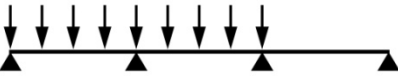
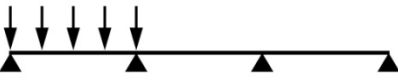
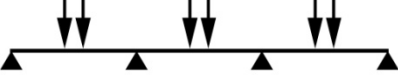
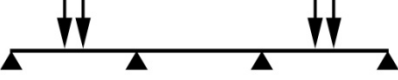
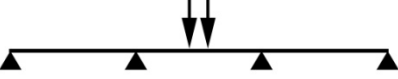
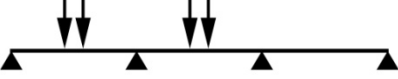
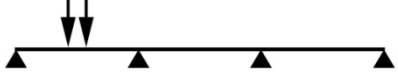
VIGA DE TRES TRAMOS										
Esquema de carga	Momentos de tramo		Momentos de apoyo		Fuerzas cortantes					
	M_1	M_2	M_B	M_C	V_A	V_{Bizq}	V_{Bder}	V_{Cizq}	V_{Cder}	V_D
	0,08	0,025	-0,1	-0,1	0,4	-0,6	0,5	-0,5	0,6	-0,4
	0,101	-0,05	-0,05	-0,05	0,45	-0,55	0	0	0,55	-0,45
	-0,025	0,075	-0,05	-0,05	-0,05	-0,05	0,5	-0,5	0,05	0,05
	-	-	-0,117	-0,033	0,383	-0,617	0,583	-0,417	0,033	0,033
	-	-	0,067	0,017	0,433	-0,567	0,083	0,083	-0,017	-0,017
	0,244	0,067	-0,267	-0,267	0,733	-1,267	1	-1	1,267	-0,733
	0,289	-0,13	-0,133	-0,133	0,866	-1,133	0	0	1,133	-0,866
	-0,44	0,2	-0,133	-0,133	-0,133	-0,133	1	-1	0,133	0,133
	-	-	-0,31	-0,089	0,689	-1,311	1,222	-0,78	0,089	0,089
	-	-	-0,18	0,044	0,822	-1,178	0,222	0,222	-0,044	-0,044

TABLA A-10: Factores de conversión para las unidades más comunes utilizadas en el diseño estructural

<i>SISTEMA INTERNACIONAL A INGLÉS</i>	<i>SISTEMA INGLÉS A INTERNACIONAL</i>
LONGITUD	
$1\text{ m} = 3,280\ 84\text{ pie}$	$1\text{ pie} = 0,3048\text{ m}$
$1\text{ mm} = 0,039\ 370\text{ pulg}$	$1\text{ pulg} = 25,4\text{ mm}$
SUPERFICIE	
$1\text{ m}^2 = 10,7639\text{ pie}^2$	$1\text{ pie}^2 = 0,092\ 903\text{ m}^2$
$1\text{ mm}^2 = 0,001550\text{ pulg}^2$	$1\text{ pulg}^2 = 645,16\text{ mm}^2$
VOLUMEN	
$1\text{ m}^3 = 35,3147\text{ pie}^3$	$1\text{ pie}^3 = 0,028316\ 8\text{ m}^3$
$1\text{ mm}^3 = 61,0237 \times 10^{-6}\text{ pulg}^3$	$1\text{ pulg}^3 = 16\ 387,1\text{ mm}^3$
FUERZA	
$1\text{ kN} = 224,809\text{ lbf (libra fuerza)}$	$1\text{ kip (1000 lbf)} = 4,44822\text{ kN}$
$1\text{ N} = 0,224809\text{ lbf}$	$1\text{ lbf (libra-fuerza)} = 4,44822\text{ N}$
MOMENTO DE UNA FUERZA, TORQUE	
$1\text{ N}\cdot\text{m} = 0,737\ 562\text{ lbf}\cdot\text{pie}$	$1\text{ lbf}\cdot\text{pie} = 1,355\ 82\text{ N}\cdot\text{m}$
$1\text{ N}\cdot\text{m} = 8,850\ 75\text{ lbf}\cdot\text{pulg}$	$1\text{ lbf}\cdot\text{pulg} = 0,112\ 985\text{ N}\cdot\text{m}$
$1\text{ kN}\cdot\text{m} = 0,737\ 562\text{ kip}\cdot\text{pie}$	$1\text{ kip}\cdot\text{pie} = 1,355\ 82\text{ kN}\cdot\text{m}$
FUERZA POR UNIDAD DE LONGITUD	
$1\text{ N/m} = 0,068\ 521\ 8\text{ lbf/pie}$	$1\text{ lbf/pie} = 14,5939\text{ N/m}$
$1\text{ kN/m} = 0,0685218\text{ kip/pie}$	$1\text{ kip/pie} = 14,5939\text{ kN/m}$
$1\text{ kN/m} = 6,85218\text{ lbf/pie}$	
PRESIÓN, TENSIÓN, MÓDULO DE ELASTICIDAD (FUERZA POR UNIDAD DE SUPERFICIE) ($1\text{ Pa} = 1\text{ N/m}^2$)	
$1\text{ MPa} = 145,038\text{ lbf/pulg}^2\text{ (psi)}$	$1\text{ kip/pulg}^2\text{ (ksi)} = 6,894\ 76\text{ MPa}$
$1\text{ kPa} = 20,8854\text{ lbf/pie}^2$	$1\text{ lbf/pulg}^2\text{ (psi)} = 6,894\ 76\text{ kPa}$
	$1\text{ lbf/pie}^2 = 47,8803\text{ Pa}$

TABLA A-11: Equivalencia entre el sistema SI, el sistema mks, y el sistema inglés de las ecuaciones no homogéneas del Reglamento ACI 318

<i>Sistema Internacional SI</i> esfuerzos en MPa	<i>Sistema mks</i> esfuerzos en kgf/cm ²	<i>Sistema Ingles</i> esfuerzos en libras por pulgadas cuadradas (psi)
1 MPa	10 kgf/cm ²	142,2 psii
$\sqrt{f'_c}$ en MPa	$3,18\sqrt{f'_c}$ en kgf/cm ²	$12\sqrt{f'_c}$ en psi
$0,17\sqrt{f'_c}$ en MPa	$0,53\sqrt{f'_c}$ en kgf/cm ²	$2\sqrt{f'_c}$ en psii
$E_c = 4700\sqrt{f'_c}$	$E_c = 15100\sqrt{f'_c}$	$E_c = 57000\sqrt{f'_c}$
$f_r = 0,7\sqrt{f'_c}$	$f_r = 2\sqrt{f'_c}$	$f_r = 7,5\sqrt{f'_c}$
$A_{s,min} = \frac{\sqrt{f'_c}}{4f_y} db_w \geq \frac{1,4}{f_y} db_w$	$A_{s,min} = \frac{0,8\sqrt{f'_c}}{f_y} db_w \geq \frac{14}{f_y} db_w$	$A_{s,min} = \frac{3\sqrt{f'_c}}{f_y} db_w \geq \frac{200}{f_y} db_w$
$s = 380 \left(\frac{280}{f_s} \right) - 2,5c_c$	$s = 38 \left(\frac{2800}{f_s} \right) - 25c_c$	$s = 15 \left(\frac{40000}{f_s} \right) - 25c_c$
$V_c = 0,17\sqrt{f'_c} db_w$	$V_c = 0,53\sqrt{f'_c} db_w$	$V_c = 2\sqrt{f'_c} db_w$
$V_c = 0,17 \left(1 + \frac{N_u}{14A_g} \right) \sqrt{f'_c} b_w d$	$V_c = 0,53 \left(1 + \frac{N_u}{140A_g} \right) \sqrt{f'_c} b_w d$	$V_c = 2 \left(1 + \frac{N_u}{2000A_g} \right) \sqrt{f'_c} b_w d$
$V_c = \left(0,16\sqrt{f'_c} + 17\rho_w \frac{V_u d}{M_u} \right) b_w d$ $\leq 0,3\sqrt{f'_c} b_w d$	$V_c = \left(0,5\sqrt{f'_c} + 176\rho_w \frac{V_u d}{M_u} \right) b_w d$ $\leq 0,93\sqrt{f'_c} b_w d$	$V_c = \left(1,9\sqrt{f'_c} + 2500\rho_w \frac{V_u d}{M_u} \right) b_w d$ $\leq 3,5\sqrt{f'_c} b_w d$
$V_c = 0,3\sqrt{f'_c} b_w d \sqrt{1 + \frac{0,3N_u}{A_g}}$	$V_c = 0,93\sqrt{f'_c} b_w d \sqrt{1 + \frac{N_u}{35A_g}}$	$V_c = 3,5\sqrt{f'_c} b_w d \sqrt{1 + \frac{N_u}{500A_g}}$
$V_c = 0,17\sqrt{f'_c} b_w d \sqrt{1 + \frac{0,29N_u}{A_g}} \geq 0$	$V_c = 0,53\sqrt{f'_c} b_w d \sqrt{1 + \frac{N_u}{35A_g}} \geq 0$	$V_c = 2\sqrt{f'_c} b_w d \sqrt{1 + \frac{N_u}{500A_g}} \geq 0$
$V_c = \left(0,05\sqrt{f'_c} + 5\frac{V_u d_p}{M_u} \right) b_w d$ $0,17\sqrt{f'_c} b_w d \leq V_c \leq 0,4\sqrt{f'_c} b_w d$	$V_c = \left(0,16\sqrt{f'_c} + 49\frac{V_u d_p}{M_u} \right) b_w d$ $0,53\sqrt{f'_c} b_w d \leq V_c \leq 1,33\sqrt{f'_c} b_w d$	$V_c = \left(0,6\sqrt{f'_c} + 700\frac{V_u d_p}{M_u} \right) b_w d$ $2\sqrt{f'_c} b_w d \leq V_c \leq 5\sqrt{f'_c} b_w d$
$V_c = 0,05\sqrt{f'_c} b_w d_p + V_d + \frac{V_i M_{cre}}{M_{max}}$ $\geq 0,14\sqrt{f'_c} b_w d_p$	$V_c = 0,16\sqrt{f'_c} b_w d_p + V_d + \frac{V_i M_{cre}}{M_{max}}$ $\geq 0,45\sqrt{f'_c} b_w d_p$	$V_c = 0,6\sqrt{f'_c} b_w d_p + V_d + \frac{V_i M_{cre}}{M_{max}}$ $\geq 1,7\sqrt{f'_c} b_w d_p$
$M_{cre} = \left(\frac{I}{y_t} \right) \left(\frac{\sqrt{f'_c}}{2} + f_{pe} - f_d \right)$	$M_{cre} = \left(\frac{I}{y_t} \right) (1,6\sqrt{f'_c} + f_{pe} - f_d)$	$M_{cre} = \left(\frac{I}{y_t} \right) (6\sqrt{f'_c} + f_{pe} - f_d)$
$V_c = 0,3 \left(\sqrt{f'_c} + f_{pe} \right) b_w d_p V_p$ $\frac{\sqrt{f'_c}}{3}$	$V_c = 0,93 \left(\sqrt{f'_c} + 0,3f_{pe} \right) b_w d_p V_p$ $1,1\sqrt{f'_c}$	$V_c = 3,5 \left(\sqrt{f'_c} + 0,3f_{pe} \right) b_w d_p V_p$ $4\sqrt{f'_c}$
$A_{v,min} = 0,062\sqrt{f'_c} \frac{b_w s}{f_{yt}}$ $\geq 0,35 \frac{b_w s}{f_{yt}}$	$A_{v,min} = 0,2\sqrt{f'_c} \frac{b_w s}{f_{yt}} \geq 3,5 \frac{b_w s}{f_{yt}}$	$A_{v,min} = 0,75\sqrt{f'_c} \frac{b_w s}{f_{yt}}$ $\geq 50 \frac{b_w s}{f_{yt}}$

$\sqrt{\left(\frac{V_u}{b_w d}\right)^2 + \left(\frac{T_u p_h}{1,7 A_{oh}^2}\right)^2}$ $\leq \phi \left(\frac{V_c}{b_w d} + 0,66 \sqrt{f'_c} \right)$	$\sqrt{\left(\frac{V_u}{b_w d}\right)^2 + \left(\frac{T_u p_h}{1,7 A_{oh}^2}\right)^2}$ $\leq \phi \left(\frac{V_c}{b_w d} + 2 \sqrt{f'_c} \right)$	$\sqrt{\left(\frac{V_u}{b_w d}\right)^2 + \left(\frac{T_u p_h}{1,7 A_{oh}^2}\right)^2}$ $\leq \phi \left(\frac{V_c}{b_w d} + 8 \sqrt{f'_c} \right)$
$\left(\frac{V_u}{b_w d}\right)^2 + \left(\frac{T_u p_h}{1,7 A_{oh}^2}\right)^2$ $\leq \phi \left(\frac{V_c}{b_w d} + 0,66 \sqrt{f'_c} \right)$	$\left(\frac{V_u}{b_w d}\right)^2 + \left(\frac{T_u p_h}{1,7 A_{oh}^2}\right)^2$ $\leq \phi \left(\frac{V_c}{b_w d} + 2 \sqrt{f'_c} \right)$	$\left(\frac{V_u}{b_w d}\right)^2 + \left(\frac{T_u p_h}{1,7 A_{oh}^2}\right)^2$ $\leq \phi \left(\frac{V_c}{b_w d} + 8 \sqrt{f'_c} \right)$
$A_v + 2A_t = 0,062 \sqrt{f'_c} \frac{b_w s}{f_{yt}}$ $\geq \frac{0,35 b_w s}{f_{yt}}$	$A_v + 2A_t = 0,2 \sqrt{f'_c} \frac{b_w s}{f_{yt}} \geq \frac{3,5 b_w s}{3 f_{yt}}$	$A_v + 2A_t = 0,75 \sqrt{f'_c} \frac{b_w s}{f_{yt}}$ $\geq \frac{50 b_w s}{3 f_{yt}}$
$A_{t,min} = 0,42 \sqrt{f'_c} \frac{A_{tp}}{f_y} - \left(\frac{A_t}{s}\right) p_h \frac{f_{yt}}{f_y}$ $\frac{A_t}{s} > \frac{1,75 b_w}{f_{yt}}$	$A_{t,min} = 1,33 \sqrt{f'_c} \frac{A_{tp}}{f_y} - \left(\frac{A_t}{s}\right) p_h \frac{f_{yt}}{f_y}$ $\frac{A_t}{s} > \frac{1,75 b_w}{f_{yt}}$	$A_{t,min} = 5 \sqrt{f'_c} \frac{A_{tp}}{f_y} - \left(\frac{A_t}{s}\right) p_h \frac{f_{yt}}{f_y}$ $\frac{A_t}{s} > \frac{2,5 b_w}{f_{yt}}$
$l_d = \frac{f_y}{1,1 \sqrt{f'_c}} \frac{\psi_t \psi_e \psi_s \lambda}{\left(\frac{c_b + K_{tr}}{d_b}\right)} d_b$	$l_d = \frac{f_y}{3,5 \sqrt{f'_c}} \frac{\psi_t \psi_e \psi_s \lambda}{\left(\frac{c_b + K_{tr}}{d_b}\right)} d_b$	$l_d = \frac{3 f_y}{40 \sqrt{f'_c}} \frac{\psi_t \psi_e \psi_s \lambda}{\left(\frac{c_b + K_{tr}}{d_b}\right)} d_b$
$K_{tr} = \frac{A_{tr} f_{yt}}{10 s \cdot n}$	$K_{tr} = \frac{A_{tr} f_{yt}}{105 s \cdot n}$	$K_{tr} = \frac{A_{tr} f_{yt}}{1500 s \cdot n}$
$\frac{0,24 f_y}{\sqrt{f'_c}} d_b \geq 0,043 f_y d_b$	$\frac{0,075 f_y}{\sqrt{f'_c}} d_b \geq 0,0043 f_y d_b$	$\frac{f_y}{50 \sqrt{f'_c}} d_b \geq 0,0003 f_y d_b$
$l_{dh} = \frac{0,24 \psi_e \lambda f_y}{\sqrt{f'_c}} d_b$	$l_{dh} = \frac{0,075 \psi_e \lambda f_y}{\sqrt{f'_c}} d_b$	$l_{dh} = \frac{0,02 \psi_e \lambda f_y}{\sqrt{f'_c}} d_b$
$(1,8 + 0,6 \rho_v f_y) \lambda b_v d \leq 3,5 b_v d$	$(1,8 + 0,6 \rho_v f_y) \lambda b_v d \leq 35 b_v d$	$(260 + 0,6 \rho_v f_y) \lambda b_v d \leq 5 b_v d$