

Tema 6

Bases del método de Cross

1. INTRODUCCION A LA PROBLEMÁTICA DE LA RESOLUCION DE ESTRUCTURAS HIPERESTATICAS

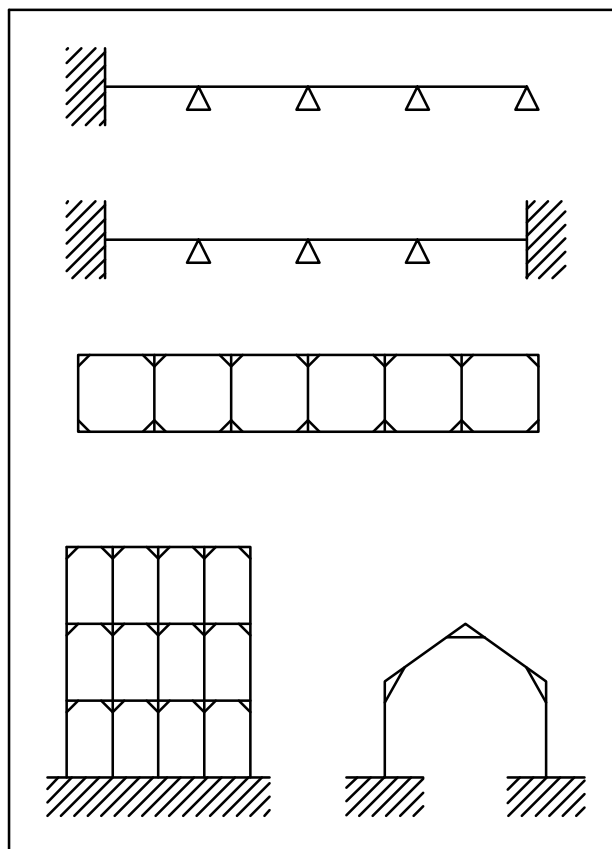


Figura 1: Estructuras hiperestáticas.

En el cálculo de estructuras se presenta con frecuencia el caso de la resolución de estructuras hiperestáticas (figura 1).

El cálculo de estas estructuras hiperestáticas se puede efectuar planteando un sistema general de ecuaciones. En estructuras reticulares de edificación, con nudos rígidos, este método conduce a un elevado número de ecuaciones e incógnitas, cuya aparición antes de los ordenadores y calculadoras de gran capacidad era prácticamente imposible.

En 1930, el profesor Hardy Cross expuso en su obra *Analysis of continuous frames* el método de aproximaciones sucesivas que lleva su nombre. El método de Cross es un procedimiento ideado para resolver el problema de las estructuras reticulares. El cálculo es relativamente sencillo, sin que aparezcan en su desarrollo integraciones complejas ni sistemas de ecuaciones complicados. Es más, una vez comprendido el mecanismo del método, las operaciones matemáticas se reducen a sumas, restas, multiplicaciones y divisiones. Además, no exige recordar nada de memoria. Si se dispone de unas tablas de momentos, rigideces y factores de transmisión, puede resolverse cualquier estructura. Si, como es frecuente, se trata de estructuras con piezas de sección constante en cada vano y con cargas uniformemente distribuidas, ni siquiera es necesario el empleo de tablas.

El método de Cross es un método de aproximaciones sucesivas, que no significa que sea aproximado. Quiere decir que el grado de precisión en el cálculo puede ser tan elevado como lo desee el calculista.

El método permite seguir paso a paso el proceso de distribución de momentos en la estructura, dando un sentido físico muy claro a las operaciones matemáticas que se realizan.

2. CONCEPTOS PREVIOS

2.1. PARES DE EMPOTRAMIENTO

Una viga empotrada-empotrada, como la representada en la figura 2a, está sometida a un sistema de acciones. Su deformada es la que aparece en la figura 2b. En ella se pueden considerar tres tramos, tal y como se representa en la figura 2c.

Los tramos primero y último, de acuerdo con el convenio, tienen flexión negativa, mientras que el tramo intermedio presenta flexión positiva. Los **momentos flectores** M_A y M_B en los apoyos serán negativos, así como los momentos del tramo intermedio son positivos. Por el principio de acción y reacción, la viga ejerce sobre los apoyos unos momentos (figura 2d) y los apoyos sobre las vigas otros, que serán iguales y de sentido contrario. A estos momentos se les llama **pares de empotramiento** (figura 2e). Por tanto, los pares de empotramiento son las acciones que ejercen los apoyos sobre la pieza.

Estos pares de empotramiento tienen el mismo valor absoluto que los momentos flectores M_A y M_B . Tomando el convenio de signos de la figura 2f, el par en el apoyo A es positivo, mientras que el par en B es negativo. Como los momentos flectores en los apoyos son de signo negativo, para pasar de momentos flectores a pares de

empotramiento basta cambiar de signo al de la izquierda y mantener el signo al de la derecha. De igual modo se opera para pasar de pares de empotramiento a momentos flectores.

En las piezas verticales se actúa de la misma forma. Como no hay establecido un signo de flexión, se define uno. Para pasar de pares de empotramiento a momentos flectores, o a la inversa, se cambia de signo al valor de un extremo.

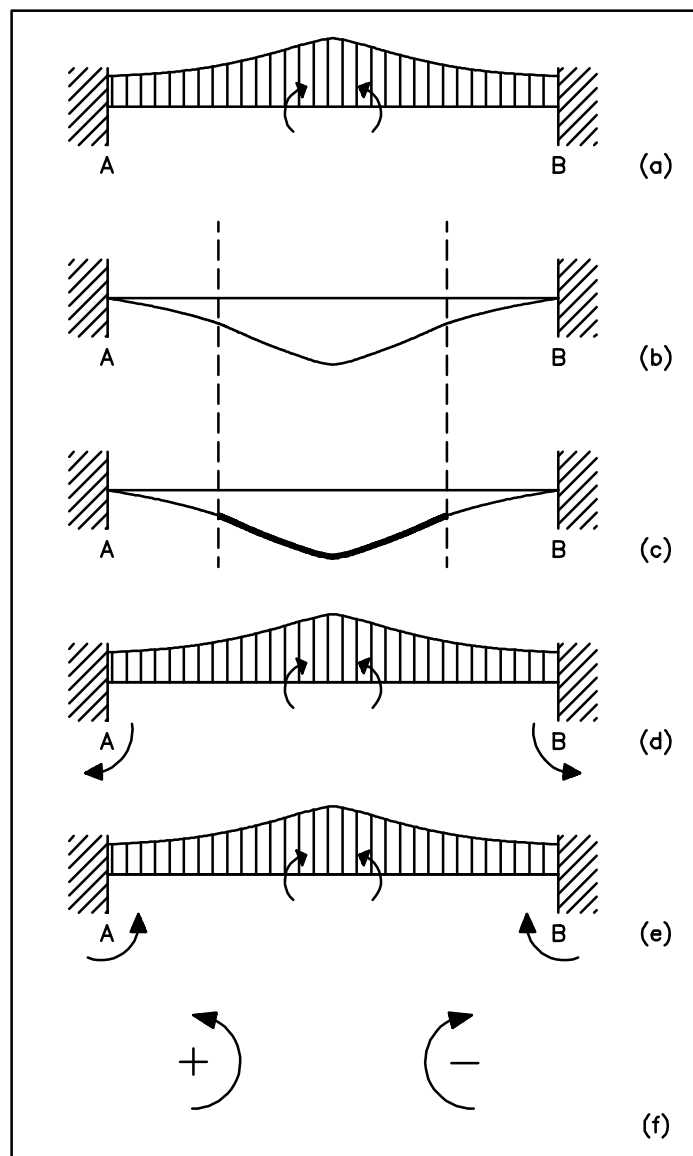


Figura 2: Pares de empotramiento.

2.2. NUDO RIGIDO

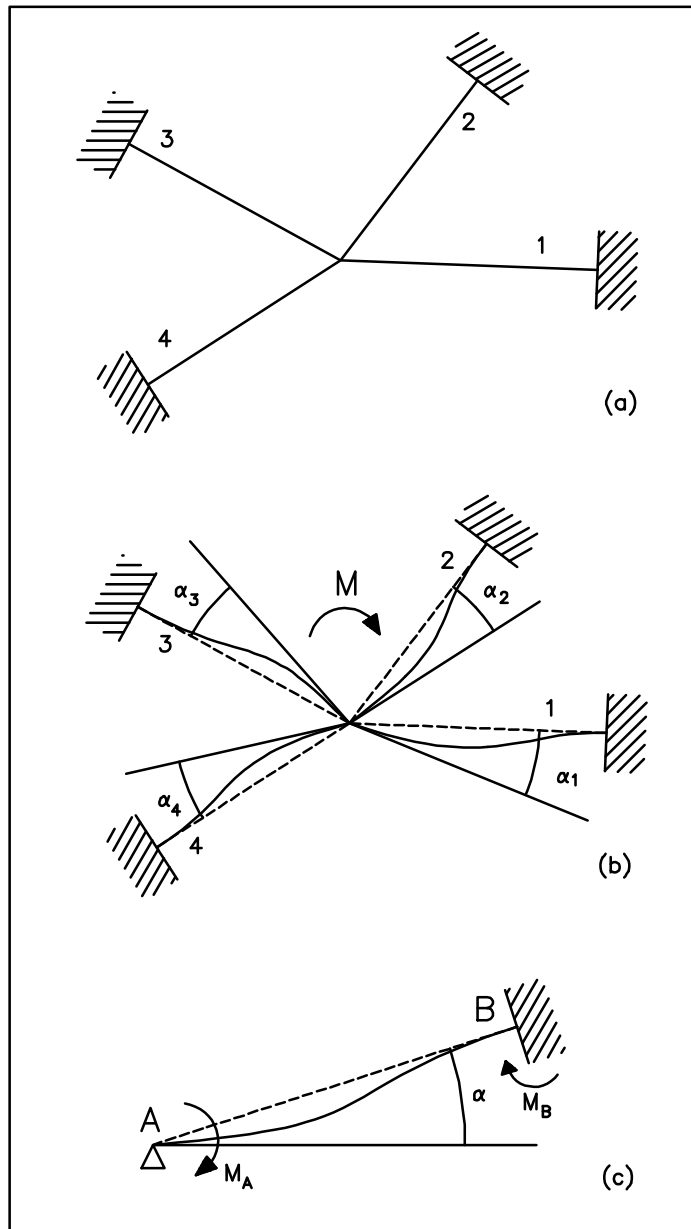


Figura 3: Nudo rígido.

Si se tiene un nudo en el que concurren barras empotradas en sus otros extremos (figura 3a), y se aplica un momento M en el nudo, las barras se deforman como indica la figura 3b.

Cada uno gira un determinado ángulo α , lo que es igual, la tangente de la deformada forma un cierto ángulo con la posición primitiva.

Se dice que un nudo es rígido cuando los ángulos girados por todas las piezas son iguales: $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = \dots = \alpha_n$. Esto sucede en la mayor parte de las estructuras de hormigón, y en las estructuras metálicas cuando se adoptan disposiciones que aseguran la rigidez de los nudos, así como en las uniones soldadas.

Si en el nudo se aísla una barra (figura 3c), al poder girar ésta un ángulo α bajo la acción de un momento M_A , el problema se reduce al estudio de una pieza apoyada-empotrada sometida al momento de apoyo M_A .

2.3. FACTOR DE TRANSMISION

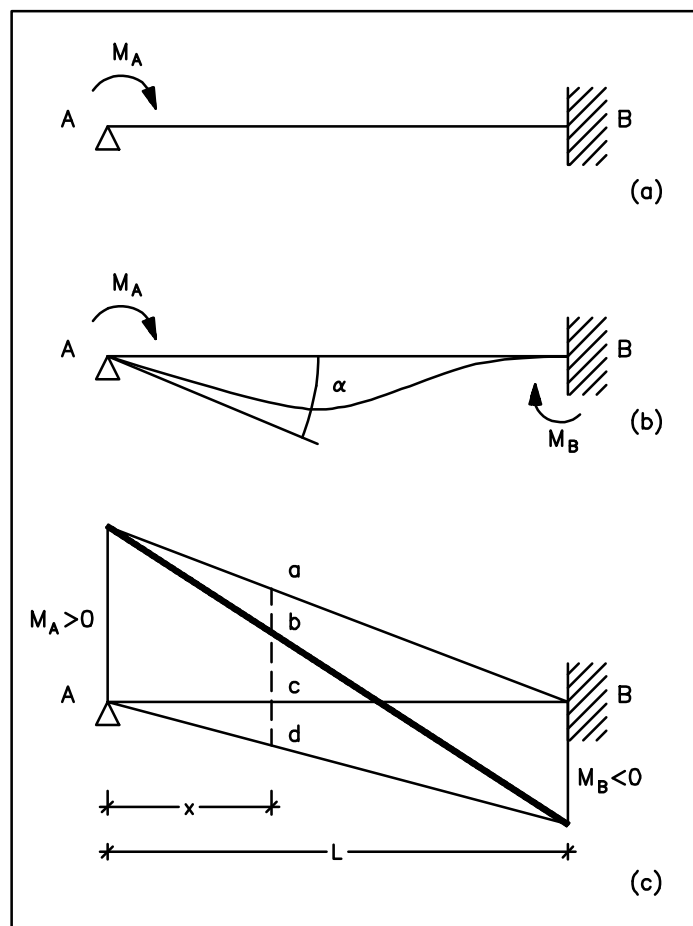


Figura 4: Factor de transmisión.

Cuando se aplica un par M_A a la pieza aislada de la figura 4a, se produce la situación de flexión que se refleja en la figura 4b, generando M_A un par de empotramiento del mismo signo M_B en el extremo B.

Si se desea estudiar el momento flector de la pieza analizada, basta con cambiar el signo al par de empotramiento del apoyo izquierdo. El diagrama de momentos flectores se representa en la figura 4c.

El momento flector en un punto de abscisa x será: $M_x = \overline{bc} = \overline{ac} - \overline{ab} = \overline{ac} - \overline{cd}$

Por semejanza de triángulos, aplicando valores absolutos, se tiene:

$$\frac{\overline{ac}}{M_A} = \frac{L-x}{L} \rightarrow \overline{ac} = M_A \cdot \frac{L-x}{L}$$

$$\frac{\overline{cd}}{M_B} = \frac{x}{L} \rightarrow \overline{cd} = M_B \cdot \frac{x}{L}$$

$$\text{Por tanto, } M_x = \overline{ac} - \overline{cd} = M_A \cdot \frac{L-x}{L} - M_B \cdot \frac{x}{L}$$

Si se tiene en cuenta que la distancia de A a la tangente trazada por B es 0, se puede aplicar el segundo teorema de Mohr:

$$\delta = \int_0^L \frac{M_x \cdot x \cdot dx}{E \cdot I} = 0$$

Introduciendo el valor de M_x en la expresión anterior y operando, tenemos:

$$\int_0^L \frac{M_A}{E \cdot I} \cdot \frac{L-x}{L} \cdot x \cdot dx - \int_0^L \frac{M_B}{E \cdot I} \cdot \frac{x}{L} \cdot x \cdot dx = 0$$

La relación $\beta = \frac{M_B}{M_A}$ es el **factor de transmisión**, y su valor es:

$$\beta = \frac{\int_0^L \frac{L-x}{E \cdot I} \cdot x \cdot dx}{\int_0^L \frac{x}{E \cdot I} \cdot x \cdot dx}$$

En el caso general, el módulo de elasticidad E y el momento de inercia I son funciones de x , no pudiéndose simplificar la expresión anterior.

Si se considera el caso habitual de piezas de sección constante y del mismo material, el factor de transmisión adquiere el valor:

$$\beta = \frac{\int_0^L \frac{L-x}{E \cdot I} \cdot x \cdot dx}{\int_0^L \frac{x}{E \cdot I} \cdot x \cdot dx} = \frac{\frac{1}{E \cdot I} \cdot \int_0^L (L \cdot x - x^2) \cdot dx}{\frac{1}{E \cdot I} \cdot \int_0^L x^2 \cdot dx} = \frac{\frac{L^3}{2} - \frac{L^3}{3}}{\frac{L^3}{3}} = \frac{1}{2}$$

Por tanto, $\beta = \frac{M_B}{M_A} = \frac{1}{2}$, siendo M_A y M_B pares de empotramiento en valor y en signo.

Las piezas de hormigón armado tienen E e I variables, aunque la sección permanezca constante. De cualquier modo, la variación de E es tan pequeña que si la pieza es de sección constante, también puede considerarse constante el factor $E \cdot I$.

Si el extremo B es una articulación, el factor de transmisión β es nulo.

Si existe una rótula en un punto intermedio de la pieza (a una distancia L_1 del origen y L_2 del extremo B), el factor de transmisión vale $\beta = \frac{L_2}{L_1}$.

2.4. RIGIDEZ

En la pieza articulada-empotrada del apartado anterior, se trata de determinar el valor del ángulo girado α en función del momento aplicado M_A . Para calcular este valor vamos a emplear el primer teorema de Mohr.

$$\alpha = \int_0^L \frac{M_x}{E \cdot I} \cdot dx$$

Introducimos el valor obtenido de M_x :

$$\alpha = \int_0^L \frac{M_A}{E \cdot I} \cdot \frac{L-x}{L} \cdot dx - \int_0^L \frac{M_B}{E \cdot I} \cdot \frac{x}{L} \cdot dx$$

Teniendo en cuenta que el factor de transmisión β es el cociente entre M_B y M_A , podemos sustituir M_B por $\beta \cdot M_A$.

$$\alpha = M_A \cdot \int_0^L \frac{1}{E \cdot I} \cdot \frac{L-x}{L} \cdot dx - \beta \cdot M_A \cdot \int_0^L \frac{1}{E \cdot I} \cdot \frac{x}{L} \cdot dx$$

Sacando factor común M_A y sustituyendo β por su valor, se tiene:

$$\alpha = M_A \cdot \left[\int_0^L \frac{1}{E \cdot I} \cdot \frac{L-x}{L} \cdot dx - \frac{\int_0^L \frac{L-x}{E \cdot I} \cdot x \cdot dx}{\int_0^L \frac{x}{E \cdot I} \cdot x \cdot dx} \cdot \int_0^L \frac{1}{E \cdot I} \cdot \frac{x}{L} \cdot dx \right]$$

Como α es adimensional, el valor del corchete tiene por dimensiones $\frac{1}{\text{kg} \cdot \text{m}}$.

La expresión anterior puede expresarse de la forma $\alpha = \frac{M}{K}$, siendo K la **rigidez de la pieza**. Por tanto, la rigidez es el momento que hace girar a una pieza un ángulo de un radian.

Si se considera constante el módulo de elasticidad y el momento de inercia de la barra, como en el caso del estudio del factor de transmisión, la expresión anterior se simplifica, obteniéndose:

$$\alpha = M_A \cdot \left[\frac{1}{E \cdot I} \cdot \int_0^L \frac{L-x}{L} \cdot dx - \frac{\frac{1}{E \cdot I} \cdot \int_0^L (L-x) \cdot x \cdot dx}{\frac{1}{E \cdot I} \cdot \int_0^L x^2 \cdot dx} \cdot \frac{1}{E \cdot I} \cdot \int_0^L \frac{x}{L} \cdot dx \right]$$

$$\alpha = M_A \cdot \frac{1}{E \cdot I} \cdot \left[\left(L - \frac{L^2}{2 \cdot L} \right) - \frac{\left(\frac{L^3}{2} - \frac{L^3}{3} \right)}{\frac{L^3}{3}} \cdot \frac{L^2}{2 \cdot L} \right] = M_A \cdot \frac{1}{E \cdot I} \cdot \frac{L}{4}$$

Por tanto, $K = \frac{4 \cdot E \cdot I}{L}$.

Si el nudo es un empotramiento perfecto, $K = \infty$.

Si el extremo opuesto B es articulado, $K = \frac{3}{4} \cdot \frac{4 \cdot E \cdot I}{L} = \frac{3 \cdot E \cdot I}{L}$.

Si el nudo A es una articulación móvil perfecta, $K = 0$.

2.5. FACTOR DE DISTRIBUCION O DE REPARTO

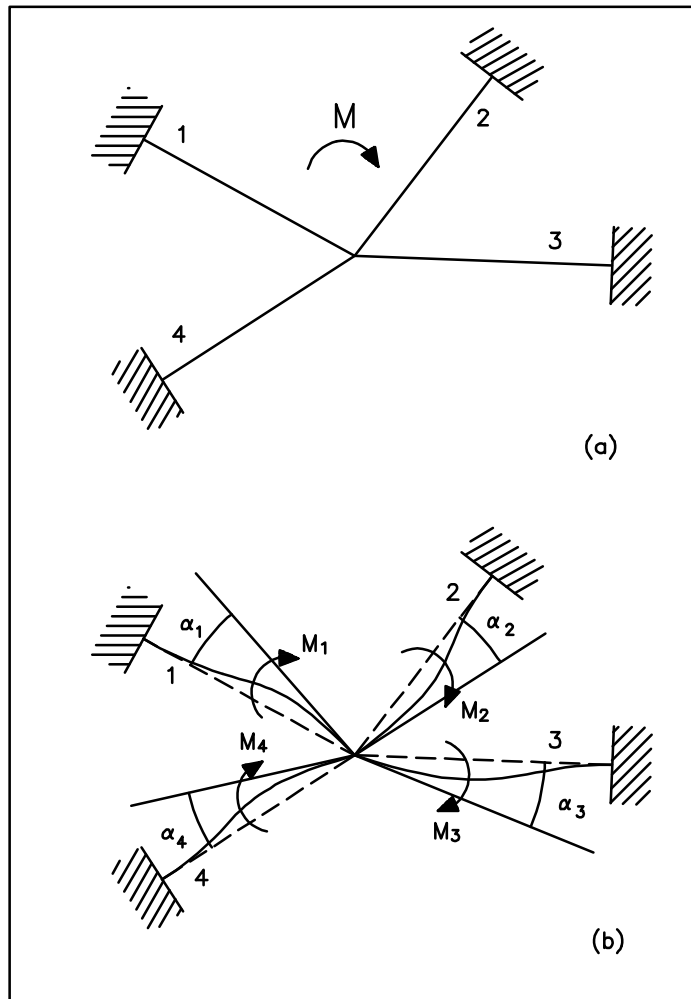


Figura 5: Factor de distribución o de reparto.

Cuando sobre un nudo actúa un momento M , éste se reparte íntegramente entre las barras, de modo que $M = M_1 + M_2 + \dots + M_n$, girando cada una de las barras un cierto ángulo α_i . De acuerdo con lo estudiado en el apartado anterior, cada ángulo girado vale:

$$\alpha_1 = \frac{M_1}{K_1}; \quad \alpha_2 = \frac{M_2}{K_2}; \quad \dots; \quad \alpha_n = \frac{M_n}{K_n}$$

siendo K_i la rigidez de una barra genérica.

Si el nudo es rígido, los ángulos girados son iguales. Por tanto, $\alpha_1 = \alpha_2 = \dots = \alpha_n$, o bien:

$$\frac{M_1}{K_1} = \frac{M_2}{K_2} = \dots = \frac{M_n}{K_n} = \frac{M_1 + M_2 + \dots + M_n}{K_1 + K_2 + \dots + K_n} = \frac{\sum M_i}{\sum K_i}$$

siendo $\sum M_i = M$ el momento que actúa sobre el nudo.

Desarrollando el sistema de ecuaciones se obtiene la siguiente serie:

$$M_1 = M \cdot \frac{K_1}{\sum K_i}$$

$$M_2 = M \cdot \frac{K_2}{\sum K_i}$$

...

$$M_n = M \cdot \frac{K_n}{\sum K_i}$$

A los factores $r_i = \frac{K_i}{\sum K_i}$ se les llama **factores de reparto o de distribución**.

Sumando la serie anterior se comprueba que $\sum r_i = 1$. Esta propiedad sirve de fácil comprobación en los cálculos, pues los factores de reparto de las barras que concurren en un nudo deben sumar la unidad.

3. EL METODO DE CROSS

Consideremos una estructura reticular cargada. En primer lugar se procede a retirar las cargas que actúan sobre sus piezas. A continuación bloqueamos los nudos, impidiéndoles todo giro. Se vuelve ahora a aplicar las cargas exteriores, que actúan sobre una **estructura alterada**, ya que tiene impedido los giros de sus nudos. En este sentido no representa a la estructura verdadera, cuyos nudos hubieran girado bajo la acción de las cargas hasta alcanzar su posición de equilibrio.

En la estructura alterada es muy fácil determinar los momentos de empotramiento, pues al estar los nudos bloqueados dichos momentos son los de empotramiento perfecto.

La suma de los momentos de empotramiento de las piezas concurrentes en cada nudo no será nula, por lo que el nudo no estará en equilibrio. Dicha suma es, en realidad, un **momento de desequilibrio**.

Se aplica al nudo un **momento equilibrante**, que es un momento de igual valor y de signo opuesto al momento de desequilibrio. Esto equivale a desbloquear el nudo.

El momento equilibrante se repartirá entre los extremos de las distintas piezas concurrentes en el nudo en proporción a sus rigideces, puesto que al girar el nudo todas las piezas concurrentes giran el mismo ángulo.

La relación de la parte de momento equilibrante que se lleva cada pieza con el momento equilibrante total es lo que se denomina **coeficiente de reparto** o **coeficiente de distribución**, y es igual al cociente de la rigidez de la pieza considerada entre la suma de las rigideces de todas las piezas que concurren en el nudo.

Por tanto, se distribuye el momento equilibrante entre las distintas piezas concurrentes en el nudo y se transmite el momento al extremo opuesto.

En los demás nudos de la estructura se procede análogamente, por lo que también se habrán introducido momentos equilibrantes, distribuyéndose a las extremidades de sus piezas concurrentes, las cuales transmitirán una parte a sus extremidades opuestas.

De esta manera se opera cíclicamente.

Si en una fase posterior de cálculo volvemos a obtener en un nudo previamente equilibrado el momento de desequilibrio, éste será cada vez menor, de igual modo que las magnitudes de las transmisiones. Los nudos van equilibrándose paulatinamente y la estructura se va acercando a su posición de equilibrio.

El método de Cross es un método que permite alcanzar la precisión que se desee mediante aproximaciones sucesivas.

3.1. BASES DEL METODO DE CROSS

Las bases del método de Cross son las siguientes:

1. Hallar la relación entre el momento M_A y el par de empotramiento M_B (factor de transmisión).
2. Calcular la magnitud del ángulo girado α en función del momento aplicado M_A (rigidez).
3. Encontrar la relación entre el momento aplicado en un nudo M (figura 3b) y el momento M_A (figura 3c) que actúa sobre cada una de las barras de nudo (factor de reparto o de distribución).

3.2. DESARROLLO DEL METODO PARA NUDOS GIRATORIOS SIN DESPLAZAMIENTO

- **Fase I**

Se consideran todas las piezas empotradas en sus extremos. Se calculan los momentos en los extremos mediante Resistencia de Materiales.

- **Fase II**

Se comienza por considerar un nudo cualquiera con capacidad de girar. Al soltar el empotramiento, todos los momentos que concurren en el nudo se suman algebraicamente y la resultante se reparte.

Obtenido el equilibrio, se transmiten los momentos a los nudos adyacentes.

Se repite la operación en cualquiera de ellos, por lo que el nudo, antes equilibrado, se desequilibra al devolverle el nudo siguiente una parte del momento que le hace girar.

El proceso se repite una y otra vez para todos y cada uno de los nudos, equilibrando cada vez. Como los factores de reparto y de transmisión son menores que la unidad, el proceso es convergente, no siendo generalmente necesario realizar más de tres iteraciones a la estructura.

El método de Cross tiene la propiedad de compensar los errores.

4. PROPIEDADES DE LOS APOYOS

Cuando una pieza termina en un apoyo aislado se la considera unida a otra de rigidez nula, por lo que el factor de reparto vale la unidad $\left(r_i = \frac{K_i}{K_i + 0} = 1 \right)$.

Cuando una pieza termina en un empotramiento perfecto se supone que está unida a otra de rigidez infinita. El factor de reparto es nulo $\left(r_i = \frac{K_i}{K_i + \infty} = 0 \right)$.

En realidad, se puede decir que una articulación no absorbe nada, todo lo transmite ($K=0$, $\beta=1$). De igual modo, un empotramiento perfecto lo absorbe todo, no transmite nada ($K=\infty$, $\beta=0$).

A efectos prácticos los extremos articulados se eliminan en el cálculo de estructuras mediante el método de Cross. Lo mismo ocurre con los extremos perfectamente empotrados, pues al momento inicial en el extremo empotrado hay que sumar todos los momentos transmitidos por el nudo opuesto. El no transmite ninguno, por lo que el momento final es igual al momento inicial en el nudo más la mitad del correspondiente al extremo opuesto, pudiendo también eliminarse a efectos prácticos. Los cálculos son aún más simples si la pieza en cuestión no tiene cargas o momentos directamente aplicados a ella, pues entonces el momento final es únicamente la mitad del correspondiente al extremo opuesto.

En el caso de una viga en voladizo, por ejemplo la CD de la figura 6, al encontrarse libre el extremo C para girar, si se le aplica un par se produce giro sin que la pieza pueda poner ninguna resistencia. La rigidez es nula.

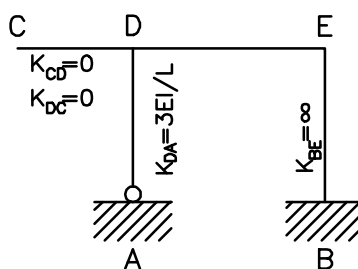


Figura 6: Distintos apoyos.

5. SIMPLIFICACIONES

Cualquier estado de carga (P, M, q) actuando sobre una estructura simétrica puede descomponerse en la suma de cargas de valor mitad y sus simétricas, más otro estado de carga de valor mitad y sus antismétricas (Teorema de Andrée; figura 7).

Las consideraciones de deformación de la estructura en los casos de simetría y antisimetría conducen a las dos conclusiones siguientes:

- En una estructura simétrica, las secciones de los ejes de las piezas de la estructura contenidas en el eje de simetría no giran y sólo experimentan corrimientos a lo largo de dicho eje.
- En una estructura antisimétrica, las secciones contenidas en el eje de antisimetría giran y sólo experimentan corrimientos en sentido perpendicular a dicho eje.

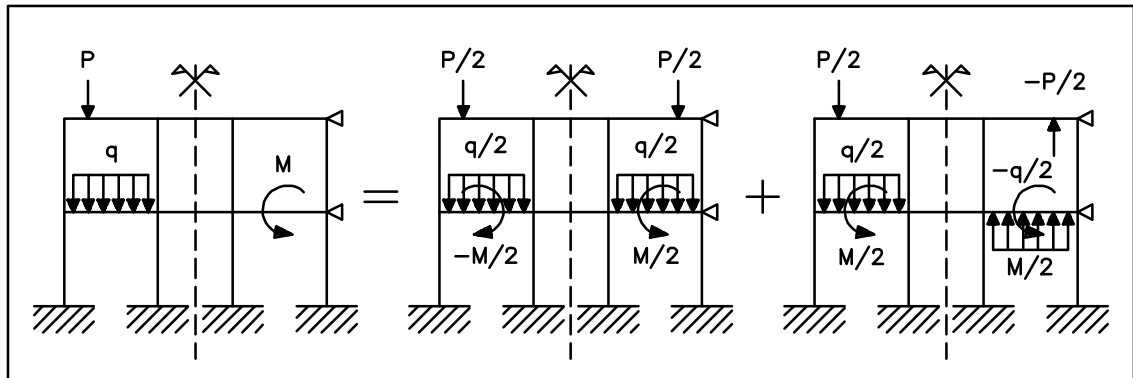


Figura 7: Simplificaciones por simetría y antisimetría.

En los casos de estructuras simétricas con cargas simétricas se pueden realizar dos simplificaciones, en función de que el eje de simetría de la estructura coincida con el punto medio de un vano (figura 8) o con una pieza estructural (figura 9).

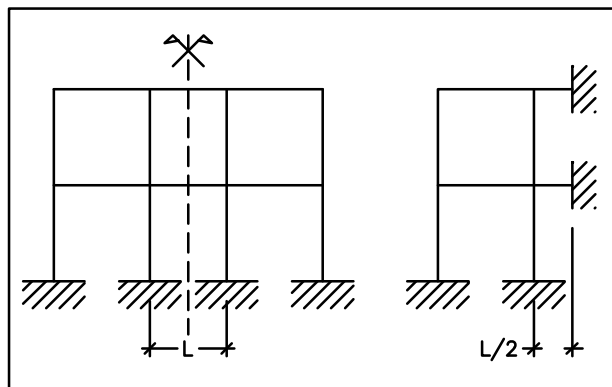


Figura 8: Simplificación en estructura simétrica con carga simétrica con un número de vãos impar.

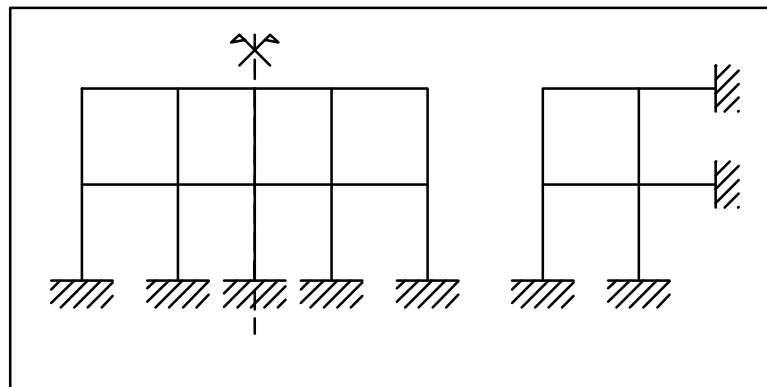
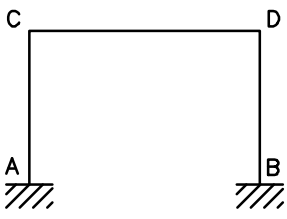
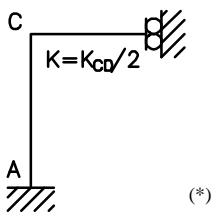
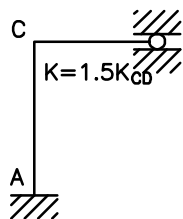
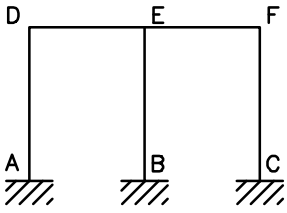
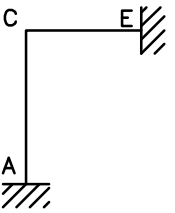
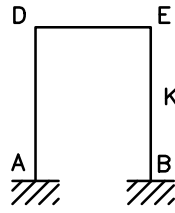
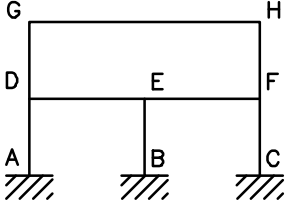
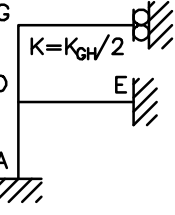
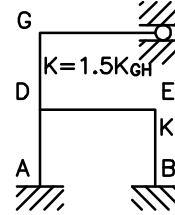
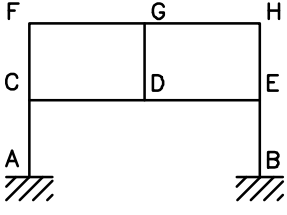
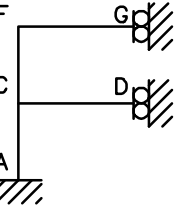
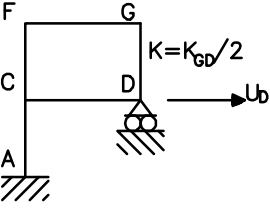


Figura 9: Simplificación en estructura simétrica con carga simétrica con un número de vãos par.

Otras simplificaciones en estructuras simétricas se recogen en la tabla 1.

Tabla 1 Simplificaciones en estructuras simétricas		
Estructura en estudio	Esquema simplificado de cálculo	
	Carga simétrica	Carga antisimétrica
	 (*)	
		
		
		

(*) Los momentos de empotramiento perfecto de las barras cortadas corresponden a las de la barra entera CD.

Tema 7

El método de Cross aplicado a estructuras translacionales

1. RELACION ENTRE DESPLAZAMIENTOS Y PARES DE EMPOTRAMIENTO

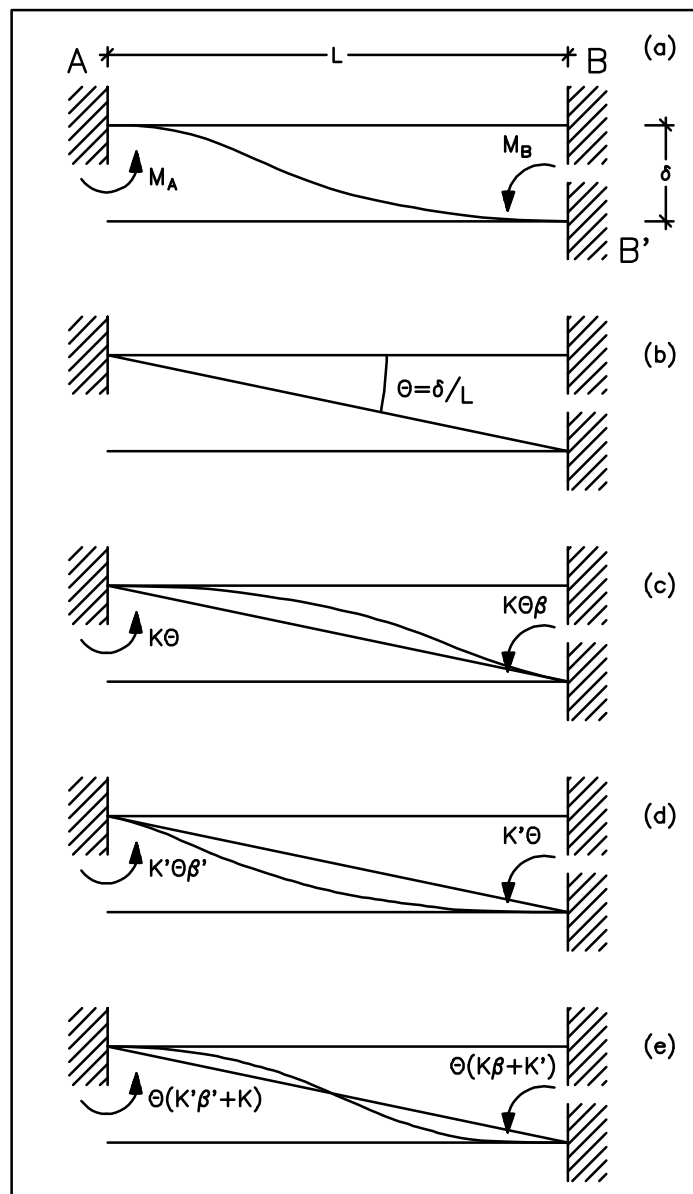


Figura 1: Relación entre desplazamiento y pares de empotramiento.

Se trata de calcular en una pieza empotrada-empotrada los pares de empotramiento que genera un desplazamiento δ , como se indica en la figura 1a.

Al ser los desplazamientos y los giros de pequeña magnitud en comparación con las dimensiones principales, el problema se puede descomponer en fases sencillas.

Se suponen rigideces K y K' , y factores de transmisión β y β' , según se considere el extremo origen.

Atendiendo al pequeño valor del ángulo girado, se puede igualar el ángulo con la tangente. O sea, $\tan\theta = \theta = \frac{\delta}{L}$.

En la figura 1c se calculan los pares de empotramiento cuando la pieza gira un ángulo θ en el apoyo A. El par de empotramiento en A vale $K \cdot \theta$, mientras que el par de empotramiento en B toma el valor $K \cdot \theta \cdot \beta$.

De igual modo, en la figura 1d se representa el valor de los pares de empotramiento al girar la pieza un ángulo θ en el apoyo B. Así, en A es igual a $K' \cdot \theta \cdot \beta'$, y en B, $K' \cdot \theta$.

La figura 1e resume las tres fases anteriores que comprende el problema inicial. Los pares de empotramiento en A y B valen, respectivamente, $\theta \cdot (K' \cdot \beta' + K)$ y $\theta \cdot (K \cdot \beta + K')$.

Sustituyendo el ángulo θ por su tangente $\frac{\delta}{L}$, los pares de empotramiento valen:

$$M_A = \frac{\delta}{L} \cdot (K' \cdot \beta' + K)$$

$$M_B = \frac{\delta}{L} \cdot (K \cdot \beta + K')$$

Si las piezas son de sección constante y del mismo material, $\beta = \beta' = \frac{1}{2}$;
 $K = K' = \frac{4 \cdot E \cdot I}{L}$. Operando se obtiene:

$$M_A = \frac{\delta}{L} \cdot (K' \cdot \beta' + K) = \frac{\delta}{L} \cdot \left(\frac{4 \cdot E \cdot I}{L} \cdot \frac{1}{2} + \frac{4 \cdot E \cdot I}{L} \right) = \frac{4 \cdot E \cdot I \cdot \delta}{L^2} \cdot \left(\frac{1}{2} + 1 \right) = \frac{6 \cdot E \cdot I \cdot \delta}{L^2}$$

$$M_B = \frac{\delta}{L} \cdot (K \cdot \beta + K') = \frac{\delta}{L} \cdot \left(\frac{4 \cdot E \cdot I}{L} \cdot \frac{1}{2} + \frac{4 \cdot E \cdot I}{L} \right) = \frac{4 \cdot E \cdot I \cdot \delta}{L^2} \cdot \left(\frac{1}{2} + 1 \right) = \frac{6 \cdot E \cdot I \cdot \delta}{L^2}$$

Por tanto, $M_A = M_B = \frac{6 \cdot E \cdot I \cdot \delta}{L^2}$.

Si la pieza es empotrada-articulada, $M_A = \frac{3 \cdot E \cdot I \cdot \delta}{L^2}$.

Si la situación de partida es la inversa, es decir, si se conocen los pares de empotramiento M_A y M_B en una pieza que puede desplazarse de B a B', se obtiene el desplazamiento δ por cualquiera de las relaciones siguientes:

$$\delta = \frac{M_A \cdot L}{K' \cdot \beta' + K}$$

$$\delta = \frac{M_B \cdot L}{K \cdot \beta + K'}$$

Con un razonamiento análogo, las expresiones anteriores pueden simplificarse en el caso de considerar las piezas de sección constante y del mismo material. Así:

$$\delta = \frac{M_A \cdot L^2}{6 \cdot E \cdot I} = \frac{M_B \cdot L^2}{6 \cdot E \cdot I}$$

2. RELACION ENTRE FUERZAS Y PARES DE EMPOTRAMIENTO

Consideremos una pieza AB biempotrada, sometida a una fuerza F horizontal, tal y como se representa en la figura 2. Si el extremo B puede desplazarse, al llegar a una posición de equilibrio, se cumple:

$$\sum M = 0 \quad (1)$$

$$F \cdot L - M_A - M_B = 0$$

$$\sum F = 0 \quad (2)$$

$$T - F = 0$$

Si lo que se desea es hallar los pares de empotramiento, sólo se dispone de una ecuación, la (1). Para poder calcular estos pares de empotramiento es necesario recurrir a las expresiones obtenidas al estudiar las relaciones entre desplazamientos y pares de empotramiento, estudiadas en el apartado anterior, y así disponer del siguiente sistema:

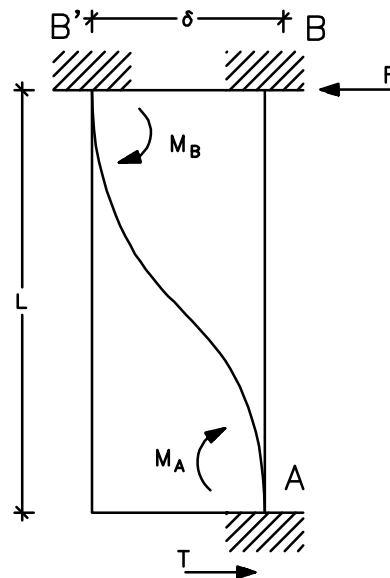


Figura 2: Relaciones entre fuerzas y pares de empotramiento.

$$F \cdot L - M_A - M_B = 0$$

$$M_A = \frac{\delta}{L} \cdot (K' \cdot \beta' + K)$$

$$M_B = \frac{\delta}{L} \cdot (K \cdot \beta + K')$$

En este caso se prescinde del conocimiento del desplazamiento, por lo que puede eliminarse de las expresiones anteriores. Así se obtienen los pares en función de la fuerza.

Haciendo $\frac{M_A}{M_B} = \frac{K' \cdot \beta' + K}{K \cdot \beta + K'} = \phi$, $M_A = M_B \cdot \phi$, de donde se obtiene:

$$F \cdot L - M_A - M_B = 0$$

$$F \cdot L - M_B \cdot \phi - M_B = 0$$

$$M_B = \frac{F \cdot L}{1 + \phi}$$

$$M_A = \frac{F \cdot L \cdot \phi}{1 + \phi}$$

Si sucede que las piezas son de sección constante y del mismo material, $\beta = \frac{1}{2}$; y $K = \frac{4 \cdot E \cdot I}{L}$. Operando se tiene:

$$\phi = \frac{K' \cdot \beta' + K}{K \cdot \beta + K'} = \frac{\frac{4 \cdot E \cdot I}{L} \cdot \frac{1}{2} + \frac{4 \cdot E \cdot I}{L}}{\frac{4 \cdot E \cdot I}{L} \cdot \frac{1}{2} + \frac{4 \cdot E \cdot I}{L}} = 1$$

$$M_A = \frac{F \cdot L \cdot \phi}{1 + \phi} = \frac{F \cdot L}{2}$$

$$M_B = \frac{F \cdot L}{1 + \phi} = \frac{F \cdot L}{2}$$

Por tanto, $M_A = M_B = \frac{F \cdot L}{2}$.

Si la situación de partida es la inversa, es decir, si se conocen los pares de empotramiento M_A y M_B en una pieza que puede desplazarse de B a B', se obtiene la fuerza mediante la siguiente ecuación:

$$F \cdot L - M_A - M_B = 0 \rightarrow F = \frac{M_A + M_B}{L}$$

3. RELACION ENTRE EMPUJES Y DESPLAZAMIENTOS

En el apartado precedente establecíamos el siguiente sistema:

$$F \cdot L - M_A - M_B = 0$$

$$M_A = \frac{\delta}{L} \cdot (K' \cdot \beta' + K)$$

$$M_B = \frac{\delta}{L} \cdot (K \cdot \beta + K')$$

En esta ocasión se prescinde del conocimiento de los pares, por lo que pueden eliminarse de las expresiones anteriores. Así se obtiene la fuerza en función del desplazamiento.

$$F \cdot L - \frac{\delta}{L} \cdot (K' \beta' + K) - \frac{\delta}{L} \cdot (K \cdot \beta + K') = 0$$

Despejando F:

$$F = \frac{\delta}{L^2} \cdot [K' \cdot (1 + \beta') + K \cdot (1 + \beta)]$$

Si se realiza la simplificación de suponer las piezas de sección constante y del mismo material, se obtiene:

$$F = \frac{\delta}{L^2} \cdot [K' \cdot (1 + \beta') + K \cdot (1 + \beta)] = \frac{\delta}{L^2} \cdot \left(\frac{4 \cdot E \cdot I}{L} \cdot \left(1 + \frac{1}{2}\right) + \frac{4 \cdot E \cdot I}{L} \cdot \left(1 + \frac{1}{2}\right) \right)$$

$$F = \frac{12 \cdot E \cdot I \cdot \delta}{L^3}$$

Al igual que en los casos anteriores, es inmediato obtener la relación inversa; en este caso la obtención del desplazamiento en función de la fuerza F:

$$\delta = \frac{F \cdot L}{[K' \cdot (1 + \beta') + K \cdot (1 + \beta)]}$$

4. RESUMEN

Al estudiar una pieza desplazable, sometida a momentos y fuerzas, se presentan las relaciones que aparecen en la siguiente matriz, y que han sido estudiadas en los apartados anteriores del presente tema.

	Conocidos		
Desconocidos	Desplazamientos	Fuerzas	Momentos
Desplazamientos		3	1
Fuerzas	3		2
Momentos	1	2	

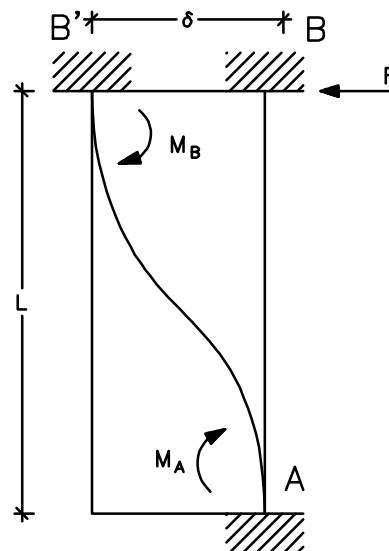


Figura 3: Resumen de acciones.

La relación entre todos los factores viene determinada por el sistema:

$$F \cdot L - M_A - M_B = 0$$

$$M_A = \frac{\delta}{L} \cdot (K' \beta' + K)$$

$$M_B = \frac{\delta}{L} \cdot (K \cdot \beta + K')$$

5. DERROLLO DEL METODO PARA ESTRUCTURAS CON NUDOS DESPLAZABLES

El caso más general de análisis de estructuras tiene lugar cuando están sometidas a la acción de una serie de cargas directamente aplicadas en sus barras, acompañadas o no por otras aplicadas directamente en los nudos. En este caso es imposible conseguir el estado de equilibrio a base de permitir únicamente el giro de sus nudos.

El análisis del problema consta de varias fases. Una inicial, en la que se considera que la estructura es indesplazable, pero con nudos con capacidad de giro. Como es imposible alcanzar el equilibrio de fuerzas, en una segunda fase (y posteriores, dependiendo del grado de desplazabilidad de la estructura) se permite el desplazamiento de los nudos, generalmente acompañados de una nueva necesidad de giros.

El resultado final es la suma de los resultados parciales obtenidos en las fases en las que se haya descompuesto el problema inicial.

El grado de translacionalidad o grado de desplazabilidad de una estructura es el número desplazamientos posibles en la misma que resultan ser linealmente independientes entre sí. En otras palabras, es el número de reacciones exteriores que es necesario añadir para que la estructura sea intranslacional.

En la figura 4 se representan estructuras con distinto grado de desplazabilidad. En ellas aparecen marcados unos apoyos ficticios que convierten a las estructuras en intranslacionales. El grado de desplazabilidad vendrá dado por el número de apoyos dibujados. Así, por ejemplo, el entramado superior que aparece en la figura tiene un grado de translacionalidad 4.

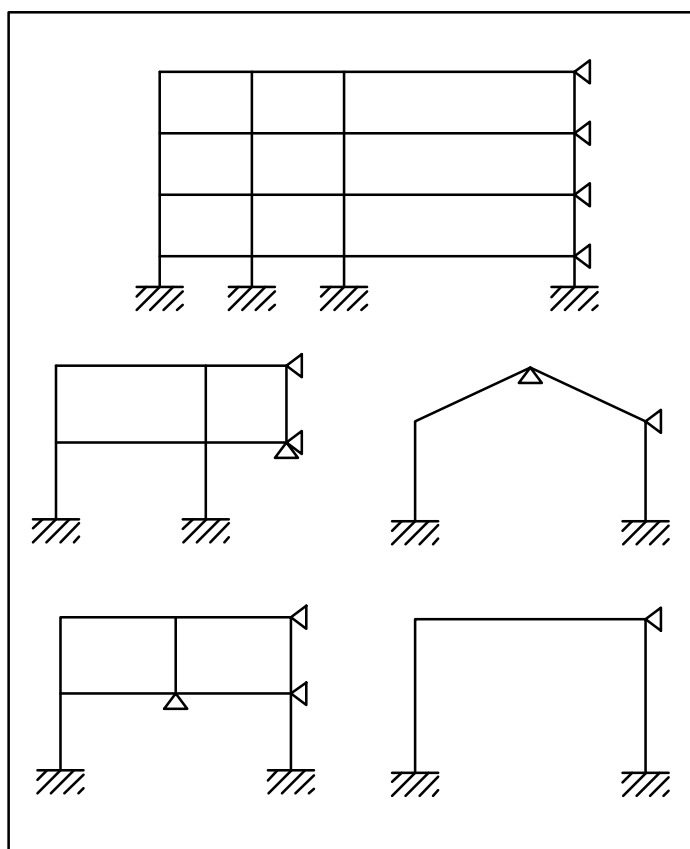


Figura 4: Grado de translacionalidad o desplazabilidad.