

CAPITULO 11

EL MÉTODO DE LOS DESPLAZAMIENTOS

RESUMEN

Se presenta la solución manual de pórticos planos y armaduras planas por el Método de los Desplazamientos, en forma matricial. Por otra parte con el propósito de que el lector siga paso a paso los cálculos efectuados se presentan algunos comandos del programa CAL que complementan a lo estudiado en el apartado 10.6.

La solución del sistema de ecuaciones lineales es un aspecto muy importante a considerar en el Método de los Desplazamientos razón por la cual en éste capítulo se presenta en forma detenida su teoría, diagramas de flujo y tres programas de computación uno para ecuaciones asimétricas, otro para simétricas trabajando únicamente con arreglos de una dimensión y otro para ecuaciones simétricas con ancho de banda constante.

11.1 CONSIDERACIONES GENERALES

11.1.1 Reseña Histórica

En 1954, Turner, Clough, Martin y Topp presentaron el Método de los Desplazamientos, también conocido como Método de las Rigideces pero no fue utilizado por cuanto en esa época el desarrollo informático era incipiente. La teoría general por ellos formulada dio origen a una serie de algoritmos para resolver estructuras con una simple regla de cálculo que era lo que se disponía por aquella época.

En el Ecuador en los años 1970 y 1980 se contaba con grandes computadores con muy poca capacidad de memoria en los cuales cada línea de instrucción se perforaba en una tarjeta de 80 caracteres, de tal manera que un simple programa era escrito en un paquete de unas 50 o 100 tarjetas las mismas que debían ser entregadas al operador del sistema para su procesamiento. Con ésta limitación no quedaba otra alternativa que usar algoritmos aproximados para resolver las estructuras en lugar de aplicar el Método de los Desplazamientos que estaba orientado al uso del ordenador.

Uno de esos algoritmos fue el Método de las Rigideces Sucesivas desarrollado por el Ing. Alejandro Segovia Gallegos con el cual se podía resolver pórticos planos con una regla de cálculo y los resultados obtenidos eran muy satisfactorios. Este Método fue muy utilizado no solo en el Ecuador sino en otros Países como Venezuela.

Entre 1980 y 1985 empieza el gran desarrollo informático, se suprime la entrada de datos por tarjetas, ahora los programas se graban en casetes y los computadores se conectan a un televisor. Realmente fue un gran avance en comparación con la forma con que se trabajaba antes, ahora es posible tener un ordenador en casa aunque sea muy primitivo con relación a los que se cuentan en el siglo XXI. Este avance informático obliga a incluir en las materias de Ingeniería Civil la cátedra de “Análisis Matricial de Estructuras” puesto que ya se vislumbraba que la Informática tendría gran desarrollo.

En la Escuela Politécnica del Ejército en 1982 se incluye la materia de “Análisis Matricial de Estructuras” en la carrera de Ingeniería Civil. En otras Universidades Ecuatorianas fue incluida años antes o años después lo cierto es que ya era factible pensar en programar una estructura en el computador.

Entre 1985 y 1995 hay un gran avance tecnológico en los computadores personales los famosos PC. Se cuenta con computadores con gran capacidad de memoria en los cuales uno ya no tiene que estar pensando en resolver grandes sistemas de ecuaciones lineales por bloques debido a que no se tenía suficiente memoria en el ordenador. Se cuenta con computadores muy rápidos en los cuales ya no importa mucho el número de operaciones que se realicen porque las máquinas son muy rápidas.

A partir de 1995 continúa en forma vertiginosa el desarrollo informático de las PC cada vez son más poderosas. A fines del siglo XX las Pentium III son toda una sensación y dos años después pasan a ser obsoletas porque ya se tienen las Pentium IV. A partir de 1995 también se da el gran desarrollo de los computadores personales, cada año aparecen nuevas máquinas más pequeñas y por ende más livianas pero con mayor capacidad de memoria y rapidez de ejecución.

Todo éste desarrollo informático llevó a que la materia de Análisis Matricial de Estructuras sea una de las más importantes, a que el Método de los Desplazamientos sea estudiado con más detenimiento toda vez que permite programar la solución de estructuras en forma sencilla, empleando matrices.

El gran desarrollo informático no solo se tiene en los ordenadores también se tiene en los programas de computación. Por ejemplo antes de 1980 no se conocía el MATLAB, ahora es muy utilizado ya que permite programar con bastante facilidad. Por cierto el capítulo 14 de éste libro está dedicado a la programación de pórticos planos utilizando MATLAB.

Sin embargo de ello existe un lenguaje de computación que no ha pasado de moda y ese es el Fortran, se lo utilizaba antes de 1970 y todavía se lo sigue utilizando basta indicar que programas muy sofisticados para Análisis Lineal y no Lineal de Estructuras como el Ruaumoko desarrollado en la Universidad de Canterbury en Nueva Zelanda en el 2000 fue programado en Fortran. Algo similar se puede decir con otros programas muy famosos como el programa IDARC para evaluar daño sísmico en estructuras y que es desarrollado en los Estados Unidos. De tal manera que el Fortran sigue vigente razón por la cual los programas que se presentan en éste capítulo están desarrollados en dicho lenguaje.

11.1.2 Ideas generales del método

Para elaborar los diagramas de corte, momento y carga axial de un pórtico plano, por ejemplo, es necesario conocer el vector de coordenadas q y para ello se debe resolver la ecuación básica de estructuras, definida de la siguiente manera:

$$Q = K q \quad (11.1)$$

donde \mathbf{Q} es el vector de cargas generalizadas, estudiado en el capítulo IV; \mathbf{K} es la matriz de rigidez de la estructura estudiado en los últimos capítulos.

La ecuación (11.1) representa la solución de un sistema de ecuaciones lineales donde el vector \mathbf{Q} es el término independiente, la matriz \mathbf{K} es la matriz de coeficientes y el vector \mathbf{q} es el vector de las incógnitas.

Al resolver una estructura en el computador la solución del sistema de ecuaciones es lo que más tiempo de máquina demanda, aproximadamente del 50% al 80% del tiempo total. Por lo tanto es indispensable que el lector al programar el método utilice el algoritmo más adecuado para resolver ecuaciones tomado en consideración que la ecuación (11.1) es un conjunto de ecuaciones simétricas y bandedas. La verdad es que con las computadoras tan rápidas con que se cuenta actualmente ya no es tan importante buscar el algoritmo más idóneo.

Con el Método de los Desplazamientos se analizan estructuras formadas por barras que pueden ser lineales o especiales (subestructuras). Por otra parte se puede resolver medios continuos por elementos finitos usando éste método. En éste último caso la solución del sistema de ecuaciones tiene más importancia toda vez que el número de ecuaciones a resolver estará de acuerdo con el grado de exactitud deseado en la solución. En efecto para un tipo de elemento dado la convergencia a la respuesta exacta se garantiza refinando la malla usada en el modelo y esto implica un mayor número de ecuaciones.

11.1.3 Comentarios del método

En base a lo anotado en los párrafos anteriores se debe manifestar lo siguiente:

- i) El Método de los Desplazamientos no es un método nuevo de cálculo fue desarrollado en 1954 pero que gracias al gran desarrollo informático de los últimos 20 años ha tenido gran actualidad.
- ii) Es un Método orientado a resolver estructuras usando el computador. Sin embargo en el presente capítulo y en algunos restantes los cálculos se harán a mano, esto con el propósito de que el lector tenga un conocimiento profundo del mismo para que posteriormente elabore sus propios programas o use en forma eficiente programas ya elaborados.
- iii) En éste libro se resuelven por éste método estructuras que tienen elementos lineales únicamente. Sin embargo el lector debe conocer que se pueden resolver estructuras compuestas por elementos que son subestructuras usando el método de los desplazamientos.
- iv) Problemas continuos, por ejemplo una Presa, pueden ser resueltos empleando el Método de los Desplazamientos, para esto se debe discretizar el dominio en un número finito de elementos. A ésta técnica se la conoce con el nombre de Elementos Finitos.
- v) El lector debe escoger el método más apropiado para la solución del sistema de ecuaciones que permite calcular el vector \mathbf{q} . Es recomendable que en ciertos problemas se vea la forma de disminuir el ancho de banda de la matriz de rigidez de la estructura numerando en forma adecuada los nudos y por ende los grados de libertad.
- vi) Si el problema amerita se puede emplear la técnica del Skyline para la solución del sistema de ecuaciones. Esta técnica se presentará en el capítulo.
- vii) En general para resolver una estructura existen dos métodos que son: el Método de las Fuerzas y el Método de los Desplazamientos. Siendo éste último el que se analiza en éste capítulo.

- viii) En el Análisis No Lineal Estático y Dinámico se presenta la solución de la ecuación (11.1) de tal manera que es importante su estudio.

11.2 SISTEMAS CINEMATICAMENTE DETERMINADOS

11.2.1 Indeterminación estática y cinemática

Para una estructura hay dos tipos de indeterminación que deben ser considerados en el análisis estructural, dependiendo de lo que se ha fijado como incógnita. Cuando las acciones o cargas son las incógnitas como sucede en el Método de las Fuerzas se debe tener en cuenta la Indeterminación Estática. Ahora cuando los desplazamientos y giros son las incógnitas como sucede en el Método de los Desplazamientos se habla de Sistemas Cinemáticamente Determinados o Indeterminados.

Por estar estudiando el Método de los Desplazamientos, se debe explicar en primer lugar que es un Sistema Cinemáticamente Determinado y que es un Sistema Cinemáticamente Indeterminado. De ésta manera se deja la Indeterminación Estática para cuando se analice el Método de las Fuerzas.

11.2.2 Definición de la matriz A

En el capítulo IX se indicó que cuando la matriz A se puede determinar utilizando únicamente la geometría se dice que el sistema es "Cinemáticamente Determinado". Esto sirve de base para determinar si un sistema es cinemáticamente determinado o no.

Con el objeto de entender lo expuesto, se analiza la estructura de la figura 11.1. Pórtico plano formado por elementos totalmente flexibles. En las figuras 11.2 y 11.3 se presentan los posibles sistemas de coordenadas $Q - q$ con los cuales se puede resolver la estructura.

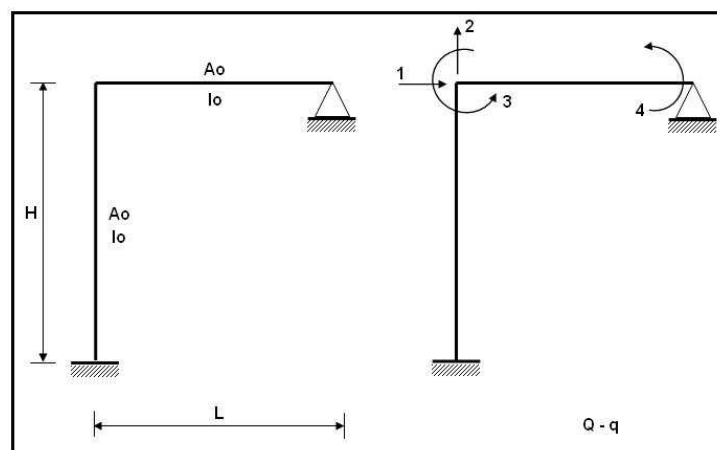


Figura 11.1

Figura 11.2

La estructura en estudio tiene cuatro grados de libertad, en consecuencia aparentemente se dice que el sistema $Q - q$ de la figura 11.2 es correcto y que el sistema $Q - q$ de la figura 11.3 es incorrecto. Ahora bien cuando se trabaja con el sistema presentado en la figura 11.2 se dice que el sistema es estáticamente determinado ya que la matriz A se puede determinar usando solo la geometría.

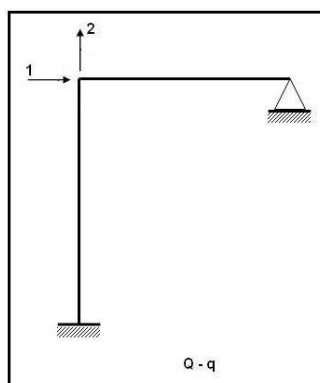


Figura 11.3

En la figura 11.3 se ha considerado dos coordenadas generalizadas menos. En éste caso se dice que el sistema es cinemáticamente indeterminado con dos grados de indeterminación. Aquí la matriz A no se la puede determinar directamente usando solo la geometría de la estructura. Evidentemente que para trabajar con éste sistema de coordenadas deben existir ciertas condiciones por ejemplo que las cargas que actúan en la estructura se encuentren únicamente en la dirección del sistema $Q - q$ de la figura 11.3. Nótese que los elementos son totalmente flexibles y sin embargo se puede trabajar con el sistema $Q - q$ de la figura 11.3.

Es importante aclarar éstos conceptos debido a que en éste capítulo solo se trata de resolver estructuras cinemáticamente determinadas.

11.2.3 Procedimiento de solución

La forma como se resuelve una estructura cinemáticamente determinada por el Método de los Desplazamientos ya se lo ha estudiado en los capítulos anteriores, faltando únicamente indicar cual es el procedimiento para resolver un problema completamente. Los pasos a seguir son los siguientes:

1. Seleccionar un sistema $Q - q$ completo, sin considerar menos grados de libertad y un sistema $P - p$ que sean apropiados.
2. Determinar la matriz A tal que $p = A q$.
3. Calcular la matriz de rigidez de la estructura $K = \sum A^{(i)t} k^{(i)} A^{(i)}$.
4. Obtener el vector de cargas generalizadas Q .
5. Resolver el sistema de ecuaciones $Q = K q$ y encontrar el vector que contiene a los desplazamientos y giros q .
6. Utilizando la matriz A determinada en el paso 2. y el vector q encontrado en el paso anterior calcular las deformaciones para cada uno de los elementos p para lo cual se multiplica la matriz de compatibilidad de deformaciones por el vector de coordenadas generalizadas: $A q$.
7. Calcular las cargas internas en los elementos P utilizando la relación: $P = k p$. Donde k es la matriz de rigidez del elemento. Hasta aquí se ha resuelto el problema complementario.

8. Para obtener las fuerzas y momentos finales de la estructura, a los valores obtenidos en el paso anterior se debe sumar los correspondientes al problema primario. Por lo tanto la solución total es igual a la solución del Problema Primario más la solución del Problema Complementario.

Se puede apreciar que nada nuevo se ha definido en el presente apartado, hasta el numeral 4. se ha estudiado con bastante detenimiento en los capítulos anteriores. Por consiguiente en los ejercicios que se realicen se colocará cual es el resultado que se obtiene. Sobre la solución del sistema de ecuaciones el lector puede hacerlo utilizando cualquier método que se conozca o utilizando cualquier programa como CAL, MATLAB, etc. Finalmente del paso 6. al paso 8. son únicamente operaciones matriciales las que se deben realizar.

Por ahora se terminará el cálculo con la obtención de los momentos y fuerzas en el nudo inicial y final de un elemento, igualmente solo se calculan los desplazamientos y giros en los nudos, para obtener las ordenadas de la elástica en cualquier punto de un elemento se aplican las funciones de forma estudiadas en el capítulo III.

11.3 SOLUCIÓN DEL SISTEMA DE ECUACIONES

11.3.1 Método de Gauss

Existen algunos métodos para resolver ecuaciones siendo el más empleado el de Gauss el mismo que se explica en dos etapas mediante la solución de un ejemplo. Previamente se advierte que en cualquier libro de Álgebra Lineal o de Métodos Numéricos el lector puede encontrar un desarrollo elegante de la teoría de éste método. El autor lo que pretende es dar todas las facilidades para que el lector pueda elaborar su propio programa de computación para resolver un sistema de ecuaciones lineales, de ésta forma podrá seguir con la solución completa de una estructura cuando se desarrolla manualmente como en el presente capítulo.

• EJEMPLO N.- 1

Resolver el siguiente sistema de ecuaciones lineales, paso a paso, por el Método de Gauss.

$$8 X_1 + 2 X_2 + 3 X_3 = 42 \quad \text{Ec (1)}$$

$$2 X_1 + 10 X_2 + X_3 = 50 \quad \text{Ec (2)}$$

$$3 X_1 + X_2 + 5 X_3 = 40 \quad \text{Ec (3)}$$

• SOLUCIÓN

Se denomina A , a la matriz de los coeficientes de las incógnitas; B el vector que contiene al término independiente y X al vector de las incógnitas. De tal manera que el sistema de ecuaciones se representa de la forma

$$A X = B$$

Al escribir en forma matricial el sistema de ecuaciones se tiene:

$$\begin{bmatrix} 8 & 2 & 3 \\ 3 & 10 & 1 \\ 3 & 1 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 42 \\ 50 \\ 40 \end{bmatrix}$$

Al emplear el Método de Gauss en una primera etapa se debe triangularizar el sistema es decir formar una matriz triangular superior de los coeficientes de las incógnitas, esto se logra de la siguiente forma:

- i) Obtener ceros en la primera columna. Para el efecto la primera ecuación se copia tal como ésta y luego se hace la Ec (2) - $\frac{2}{8}$ de Ec (1).

$$\begin{array}{rcl} 2 X_1 + 10 X_2 + X_3 & = & 50 \\ -2 X_1 - 0.5 X_2 - 0.75 X_3 & = & -10.5 \\ \hline 0 X_1 + 9.5 X_2 + 0.25 X_3 & = & 39.5 \end{array}$$

Siendo ésta última la nueva ecuación (2). Ahora se realiza: Ec (3) - $\frac{3}{8}$ Ec (1).

$$\begin{array}{rcl} 3 X_1 + X_2 + 5 X_3 & = & 40.0 \\ -3 X_1 - 0.75 X_2 - 1.125 X_3 & = & -15.75 \\ \hline 0 X_1 + 0.25 X_2 + 3.875 X_3 & = & 24.25 \end{array}$$

- ii) En una segunda subetapa se obtienen ceros en la segunda columna del nuevo sistema de ecuaciones que después de la primera subetapa ha quedado de la siguiente forma:

$$\begin{bmatrix} 8 & 2 & 3 \\ 0 & 9.5 & 0.25 \\ 0 & 0.25 & 3.875 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 42 \\ 39.5 \\ 24.25 \end{bmatrix}$$

A partir del término $A(2,2) = 9.5$ se obtendrá un cero en la segunda columna para lo cual se realiza Ec (3) - $\frac{0.25}{9.5}$ Ec (2).

$$\begin{array}{rcl} 0.25 X_2 + 3.875 X_3 & = & 24.25 \\ -0.25 X_2 - 0.007 X_3 & = & -1.039 \\ \hline 0 X_2 + 3.868 X_3 & = & 23.211 \end{array}$$

Para el ejemplo se ha terminado la etapa de triangularización, el resultado obtenido es:

$$\begin{bmatrix} 8 & 2 & 3 \\ 0 & 9.5 & 0.25 \\ 0 & 0.0 & 3.868 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 42 \\ 39.5 \\ 23.211 \end{bmatrix}$$

A continuación se presenta un diagrama de flujo de la primera etapa de triangularización del sistema pero para el caso de que se tengan N ecuaciones lineales.

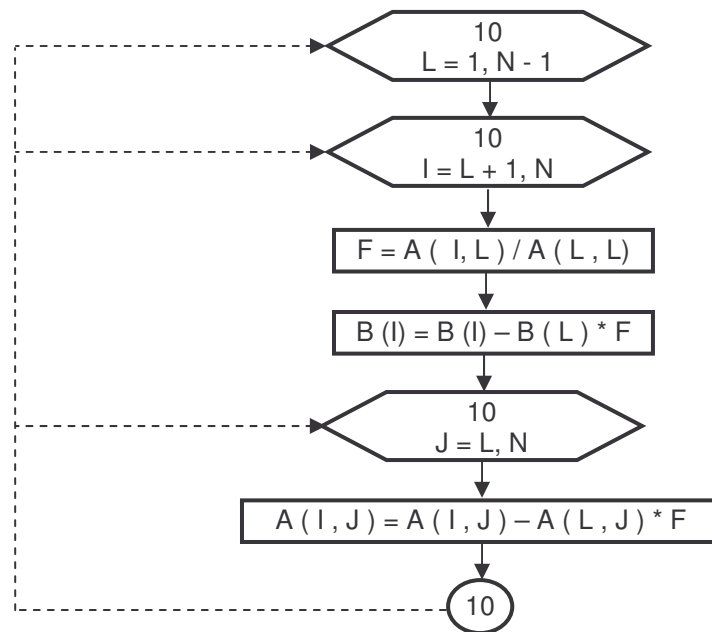


Diagrama de flujo para triangularizar el sistema

La segunda etapa corresponde a la solución del sistema para lo cual se calculan las incógnitas desde abajo hacia arriba, es decir usando la última ecuación se halla X_3

$$X_3 = \frac{23.211}{3.868} = 6$$

El valor de X_3 se sustituye en la ecuación (2) y se obtiene X_2

$$X_2 = \frac{-0.25 * 6 + 39.5}{9.5} = 4.0$$

Finalmente se reemplaza X_2 y X_3 en la ecuación (1) para calcular X_1

$$X_1 = \frac{-2 * 4 - 3 * 6 + 42}{8} = 2.0$$

Por lo tanto la solución del sistema de ecuaciones reporta:

$$X = \begin{bmatrix} 2.00 \\ 4.00 \\ 6.00 \end{bmatrix}$$

El diagrama de flujo para la solución propiamente dicha se indica a continuación para el caso general de un sistema de N ecuaciones.

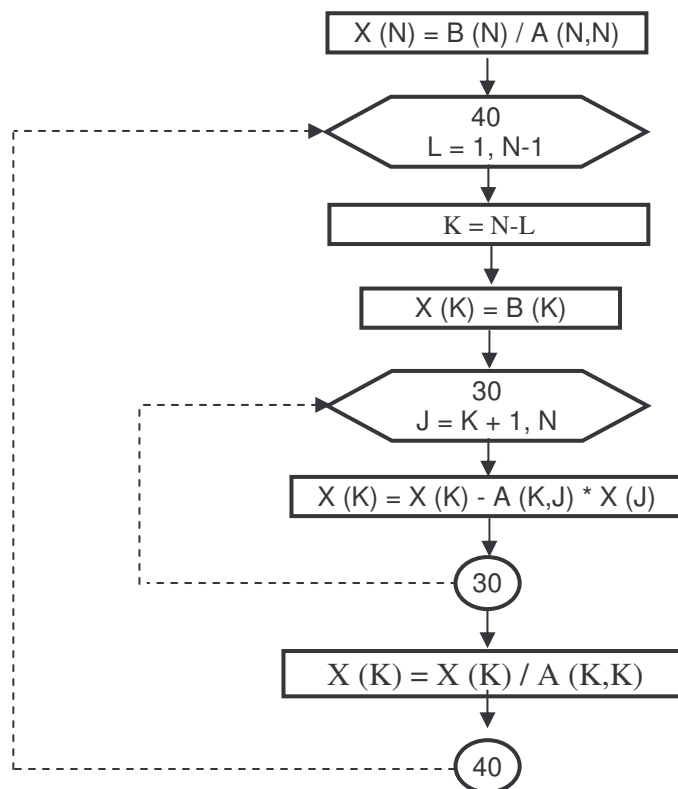


Diagrama de flujo para resolver el sistema triangularizado.

El diagrama de flujo presentado sirve para resolver sistemas de ecuaciones lineales simétricas o asimétricas. Por otra parte si el lector en base a lo expuesto quiere implementar un programa de computación en cualquier lenguaje debe tener en cuenta lo siguiente:

- Se deben dimensionar los arreglos: $A(N,N)$, $B(N)$, $X(N)$ donde N corresponde al número de ecuaciones del sistema que se piensa resolver.
- Se debe hacer un programa para la entrada de datos, tanto de la matriz A como el término independiente B .
- Preparar un programa para imprimir los resultados.

A continuación se presenta un programa en Fortran para resolver un sistema de ecuaciones lineales asimétrico, las dos primeras instrucciones son generales del Fortran. Luego se especifica el nombre del Programa.

La letra C en la primera columna sirve para comentarios, esa instrucción no se ejecuta únicamente sirve para documentar al programa. El programa que se presenta puede resolver máximo 20 ecuaciones, si se tiene un mayor número de ecuaciones se debe cambiar el 20 de la instrucción DIMENSION.

Los datos del programa se leen de un archivo que se denomina: "DATOS.OUT", en la primera línea se debe indicar el número de ecuaciones a resolver justificado al casillero 5. En las siguientes líneas se debe indicar los elementos de la matriz A cada fila de datos en una línea y finalmente se indica el término independiente. Por otra parte los resultados del programa se almacenan en un archivo denominado "RESUL.OUT".

```
$nofloatcalls
$large
```

```
PROGRAM GAUSS
C*****
C*****
C*****      PROGRAMA PARA RESOLVER ECUACIONES LINEALES      *****
C*****      ASIMETRICAS      *****
C*****      *****
C*****      ROBERTO AGUIAR FALCONI      *****
C*****      CEINCI ESPE      *****
C*****
      IMPLICIT REAL*8 (A-G,O-Z), CHARACTER*80 (H)
      DIMENSION A(20,20),B(20),X(20)
      OPEN (11, FILE = 'DATOS.OUT', STATUS = 'OLD')
      OPEN (12, FILE = 'RESUL.OUT', STATUS = 'NEW')
C  LECTURA DE DATOS DE ARCHIVO DATOS
      READ (11,1) N
      1  FORMAT (I5)
      DO 5 I=1,N
          READ (11,*) (A(I,J),J=1,N)
      5  CONTINUE
      DO 6 I=1,N
          READ (11,*) B(I)
      6  CONTINUE
C  TRIANGULARIZACION DEL SISTEMA
      DO 10 L=1,N-1
          DO 10 I=L+1,N
              F=A(I,L)/A(L,L)
              B(I)=B(I)-B(L)*F
              DO 10 J=L,N
      10  A(I,J)=A(I,J)-A(L,J)*F
C  SOLUCION PROPIAMENTE DICHA
      X(N)=B(N)/A(N,N)
      WRITE (12,*) X(N)
      DO 40 L=1,N-1
          K=N-L
          X(K)=B(K)
          DO 30 J=K+1,N
      30  X(K)=X(K)-A(K,J)*X(J)
          X(K)=X(K)/A(K,K)
          WRITE (12,*) X(K)
      40  CONTINUE
      END
```

En el archivo "**RESUL.OUT**" se escriben las incógnitas empezando desde el valor de X_n hasta el valor de X_1 . Para el ejemplo N.- 1, el archivo **DATOS.OUT** contendrá la siguiente información.

```
3
8  2  3
2 10  1
3  1  5
42
50
40
```

El usuario puede mejorar la entrada de datos. Actualmente hay una serie de programas que sirven para entrada de datos por pantalla en forma muy vistosa con los cuales se crea el archivo de datos que en éste caso se ha denominado **DATOS.OUT**. Por lo tanto se puede usar otro programa como una interfase para que cree el archivo de datos de una manera vistosa. En la forma presentada el usuario debe con cualquier editor crear el archivo **DATOS.OUT**

Para el ejemplo resuelto el archivo **RESUL.OUT** contiene la siguiente información:

6.00
4.00
2.00

Lo importante de todo esto es que el lector vea que elaborar un programa para resolver ecuaciones lineales es muy sencillo, son pocas instrucciones.

Cuando se tienen ecuaciones simétricas no es necesario introducir toda la matriz de coeficientes únicamente se da como datos la matriz triangular superior o la matriz triangular inferior de los coeficientes. Esto es muy sencillo hacerlo basta en la instrucción de lectura de datos cambiar el inicio del lazo de J en lugar de 1 colocar I, como se indica a continuación.

```
READ (11, *) (A(I, J), J=I, N)
```

Además se deberán crear los elementos que no se han leído. Se deja que estos cambios lo haga el lector en el programa indicado en el presente apartado.

11.3.2 Matriz Simétrica

Para el caso de sistemas de ecuaciones lineales simétricas a más de trabajar con la matriz triangular inferior no es necesario trabajar con un arreglo de dos dimensiones para la matriz **A** sino con un arreglo de una dimensión, para ello se debe reenumerar la posición de los elementos. Para explicar lo indicado se analiza a continuación la nomenclatura de una matriz **A** de 4 x 4 en los dos casos trabajando con un arreglo de dos dimensiones y trabajando con un arreglo de una dimensión.

$$\begin{bmatrix} A(1,1) & A(1,2) & A(1,3) & A(1,4) \\ A(2,1) & A(2,2) & A(2,3) & A(2,4) \\ A(3,1) & A(3,2) & A(3,3) & A(3,4) \\ A(4,1) & A(4,2) & A(4,3) & A(4,4) \end{bmatrix}$$

Matriz A como un arreglo de dos dimensiones

$$\begin{bmatrix} A(1) & A(2) & A(3) & A(4) \\ & A(5) & A(6) & A(7) \\ & & A(8) & A(9) \\ & & & A(10) \end{bmatrix}$$

Matriz A como un arreglo de una dimensión

Para el ejemplo analizado al trabajar con un arreglo de dos dimensiones se necesitan 16 posiciones de memoria para la matriz **A** en el segundo caso con un arreglo de una dimensión solo se necesitan 10 posiciones de memoria. En general se concluye que para un sistema de N ecuaciones se necesitan N x N posiciones de memoria cuando se trabaja con un arreglo de dos dimensiones y N x (N+1) / 2 para un arreglo de una dimensión.

Sea **N** el orden de la matriz de coeficientes de las incógnitas, **I** el número de fila de un término $A(I,J)$, **J** el número de columna de un término $A(I,J)$. **IJ** es la numeración de la matriz de coeficientes de las incógnitas tratado como un arreglo de una dimensión.

Se define una fórmula que permite identificar la posición de los elementos de la matriz **A** en un arreglo de una dimensión a partir de la posición que tiene en el arreglo de dos dimensiones de la siguiente manera:

$$IJ = \frac{(I-1)*(2N-I)}{2} + J$$

En el ejemplo 1 se terminó la triangularización del sistema de la siguiente manera.

$$\begin{bmatrix} 8 & 2 & 3 \\ 0 & 9.5 & 0.25 \\ 0 & 0.0 & 3.868 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 42 \\ 39.5 \\ 23.211 \end{bmatrix}$$

La variable X_3 se obtiene directamente como $X_3 = 23.211/3.868 = 6.00$ Pero para la variable X_2 habría que proceder de la siguiente forma:

$$9.5 X_2 + 0.25 X_3 = 39.5 \quad \Rightarrow X_2 = \frac{39.5}{9.5} - \frac{0.25}{9.5}$$

En consecuencia todos los términos de la derecha están divididos para 9.5 que es el término de la diagonal. Para el cálculo de X_1 todos los términos de la derecha están divididos para 8.

$$X_1 = \frac{42}{8} - \frac{2}{8} X_2 - \frac{3}{8} X_3$$

Por éste motivo es mejor que la etapa de triangularización no termine en la forma indicada sino que termine así:

$$\begin{bmatrix} 8 & \frac{2}{8} & \frac{3}{8} \\ 0 & 9.5 & \frac{0.25}{9.5} \\ 0 & 0.0 & 3.868 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{42}{8} \\ \frac{39.5}{9.5} \\ 23.211 \end{bmatrix}$$

En el programa **GAUSSIM** que se presenta a continuación, la matriz **A** termina en la forma indicada en la etapa de triangularización esto se lo consigue con **A(LI)=F**, esto permite calcular directamente las incógnitas, pero el vector **B** de la etapa de triangularización no está dividido para el término de la diagonal en el programa **GAUSSIM**. Por éste motivo en la etapa denominada *solución propiamente dicha* se tiene la instrucción **X(K)=X(K)/A(KK)**.

En el programa **GAUSSIM** se trabaja todo con arreglos de una dimensión de ésta forma se optimiza la cantidad de memoria. Se ha modificado un poco el programa **GAUSS** en lo referente a lo indicado en los párrafos anteriores para optimizar la solución. Nótese que básicamente es el mismo programa que GAUSS con dos salvedades la primera es que se trabaja únicamente con la matriz triangular superior y la segunda es que antes de usar una instrucción en que interviene la matriz **A** como un arreglo de una dimensión se debe colocar la fórmula de paso de 2 dimensiones a 1 dimensión.

```

$nofloatcalls
$large
      PROGRAM GAUSSIM
C*****
C*****
C*****      PROGRAMA PARA RESOLVER ECUACIONES LINEALES      *****
C*****      SIMETRICAS CON ARREGLO EN UNA DIMENSION      *****
C*****
C*****      ROBERTO AGUIAR FALCONI      *****
C*****      CEINCI ESPE      *****
C*****
      IMPLICIT REAL*8 (A-G,O-Z), CHARACTER*80 (H)
      DIMENSION A(210),B(20),X(20)
      OPEN (11, FILE = 'DATOS1.OUT', STATUS = 'OLD')
      OPEN (12, FILE = 'RESUL1.OUT', STATUS = 'NEW')
C      LECTURA DE DATOS DE ARCHIVO DATOS
      READ (11,1) N
      1      FORMAT (I5)
      NTOT=N*(N+1)/2
      DO 5 I=1,NTOT
          READ (11,*) A(I)
      5      CONTINUE
      DO 6 I=1,N
          READ (11,*) B(I)
      6      CONTINUE
C      TRIANGULARIZACION DEL SISTEMA
      DO 12 L=1,N-1
          DO 12 I=L+1,N
              LI=( (L-1)*(2*N-L)/2)+I
              LL=( (L-1)*(2*N-L)/2)+L
              F=A(LI)/A(LL)
              B(I)=B(I)-B(L)*F
              DO 10 J=I,N
                  IJ=( (I-1)*(2*N-I)/2)+J
                  LJ=( (L-1)*(2*N-L)/2)+J
      10      A(IJ)=A(IJ)-A(LJ)*F
              A(LI)=F
      12      CONTINUE
C      SOLUCION PROPIAMENTE DICHA
      X(N)=B(N)/A(NTOT)
      WRITE (12,*) X(N)
      DO 40 L=1,N-1
          K=N-L
          X(K)=B(K)
          KK=( (K-1)*(2*N-K)/2)+K
          X(K)=X(K)/A(KK)
          DO 30 J=K+1,N
              KJ=( (K-1)*(2*N-K)/2)+J
      30      X(K)=X(K)-A(KJ)*X(J)
              WRITE (12,*) X(K)
      40      CONTINUE
      END

```

En el programa **GAUSSIM** que se ha indicado la matriz A debe indicarse solamente los términos de la matriz triangular superior, un término en cada fila de datos. En el análisis estructural la matriz A corresponde a la matriz de rigidez K . En un programa de ordenador se debe calcular K pensando en que algoritmo se va a utilizar en la solución del sistema de ecuaciones. Si se va a emplear un algoritmo similar al programa denominado en libro **GAUSS** se debe programar K con un

arreglo de dos dimensiones pero si se piensa utilizar el programa **GAUSSIM** se debe programar **K** con un arreglo de una dimensión.

Finalmente en el programa **GAUSSIM** el nombre del archivo de datos se denomina **DATOS1.OUT** y el nombre del archivo de resultados se llama **RESUL1.OUT**. Para el ejemplo 1, los datos de éste archivo son:

3
8
2
3
10
1
5
42
50
40

Nuevamente los resultados se dan desde X_n hasta X_1 . En consecuencia el archivo **RESUL1.OUT** para el ejemplo 1 tendrá la siguiente respuesta: 6.00 , 4.00, 2.00 , un dato en cada fila.

11.3.3 Sistema de ecuaciones simétricas bandedas

La explicación teórica se va a analizar en base al siguiente sistema de ecuaciones lineales:

$$\begin{aligned} 20 X_1 + 2 X_2 + X_3 &= 23 \\ 2 X_1 + 25 X_2 + 2 X_4 &= 29 \\ X_1 + 30 X_3 - X_4 + 2 X_5 &= 32 \\ 2 X_2 - X_3 + 30 X_4 + X_5 &= 32 \\ 2 X_3 + X_4 + 18 X_5 &= 21 \end{aligned}$$

Escrito en forma matricial se tiene:

$$\begin{bmatrix} 20 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 25 & 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 30 & -1 & 2 \\ 0 & 2 & -1 & 30 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & 18 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \\ X_4 \\ X_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 23 \\ 29 \\ 32 \\ 32 \\ 21 \end{bmatrix}$$

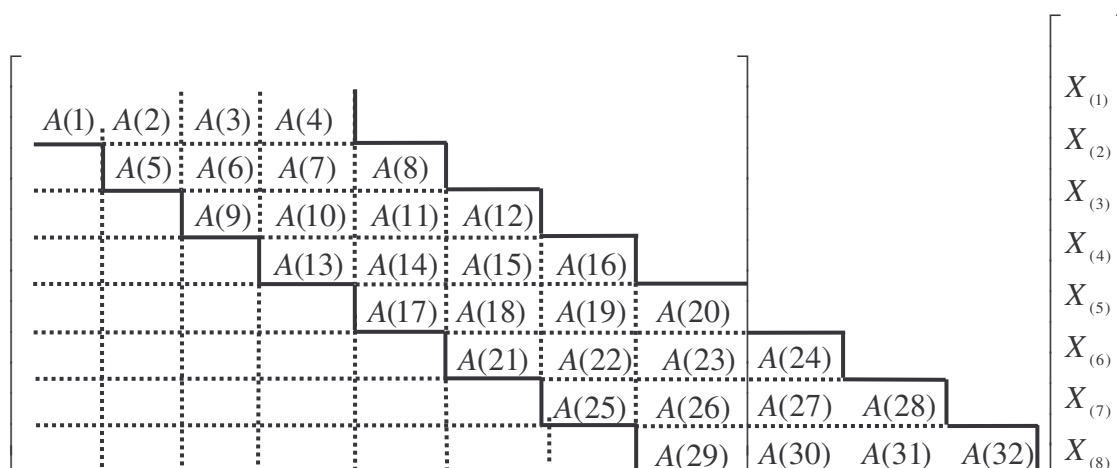
En el ejemplo propuesto. Nótese:

- La matriz de coeficientes de las incógnitas **A** es simétrica con respecto a la diagonal principal.
- En la primera fila de **A** el último término diferente de cero en éste caso el 1 se encuentra a tres posiciones de la diagonal principal, incluye en el conteo al término de la diagonal principal.
- En la segunda y tercera fila de la matriz **A** el último término diferente de 0 también se encuentra a tres posiciones de la diagonal principal. En la cuarta y quinta fila el último

término diferente de cero se halla a 2 y 1 posición de la diagonal principal respectivamente.

- iv) El número de posiciones mayor de cada una de las diferentes filas, al que se encuentra un número diferente de 0 con respecto a la diagonal principal, define el ancho de banda de la matriz A . Para el presente caso éste valor es de 3.
- v) El ancho de banda de una matriz se lo representa con la letra **KB**.

En éste apartado se presentan ideas generales para resolver ecuaciones lineales con ancho de banda constante y un programa de computación. A continuación se analiza como se numeran los elementos para el caso de tener un sistema de 8 ecuaciones con ancho de banda de 4.



En este punto es importante realizar las siguientes acotaciones:

- i) Los términos $A(24)$, $A(27)$, $A(28)$, $A(30)$, $A(31)$, $A(32)$ son nulos, se los crearon para tener un ancho de banda constante.
- ii) Para identificar la posición (subíndice) de los elementos de la matriz A se utiliza la siguiente fórmula.

$$IJ = (KB - 1)(I - 1) + J$$

donde I representa el número de la fila y J el número de la columna de la matriz A tratada como un arreglo de dos dimensiones. Por ejemplo en el sistema de 8 ecuaciones el último término se encuentra en la posición $I = 8$, $J = 8$ al trabajar con un arreglo de una dimensión corresponde al elemento de la posición $IJ = 29$ que se obtiene con la ecuación presentada. $IJ = (4 - 1)(8 - 1) + 8 = 29$.

- iii) Para el ejemplo si el lector resuelve el sistema con el algoritmo propuesto en el apartado 11.3.1 requerirá 64 posiciones de memoria para la matriz A . Si trabaja con el algoritmo indicado en el apartado 11.3.2 necesita 36 posiciones de memoria para definir el mismo arreglo y si trabaja en la forma propuesta en el presente apartado necesita 32 posiciones de memoria. Es decir el considerar en la solución de ecuaciones lineales el ancho de banda constante en una optimización en cuanto a memoria.
- iv) Si se calcula un pórtico plano de 10 pisos, por ejemplo, se estará pensando en resolver un sistema de 150 ecuaciones aproximadamente. Aquí se vera con mayor claridad lo

expuesto en el numeral anterior y es indudable que el lector se va a decidir en usar el algoritmo propuesto en el presente subapartado.

```
$nofloatcalls
$large
      PROGRAM GAUSBAN
C*****
C*****
C*****          PROGRAMA PARA RESOLVER ECUACIONES LINEALES          *****
C*****          SIMETRICAS CON ANCHO DE BANDA CONSTANTE              *****
C*****
C*****          ROBERTO AGUIAR FALCONI                                *****
C*****          CEINCI ESPE                                           *****
C*****
      IMPLICIT REAL*8 (A-G,O-Z), CHARACTER*80 (H)
      DIMENSION A(210),B(20),X(20)
      OPEN (11, FILE = 'DATOS2.OUT', STATUS = 'OLD')
      OPEN (12, FILE = 'RESUL2.OUT', STATUS = 'NEW')
C      LECTURA DE DATOS DE ARCHIVO DATOS
      READ (11,1) N,KB
1      FORMAT (2I5)
      NTOT=N*KB
      DO 5 I=1,NTOT
          READ (11,*) A(I)
5      CONTINUE
      DO 6 I=1,N
          READ (11,*) B(I)
6      CONTINUE
C      TRIANGULARIZACION DEL SISTEMA
      DO 12 L=1,N
          LL=(KB-1)*(L-1)
          DO 12 I=L+1,L+KB-1
              LI=LL+I
              F=A(LI)/A(LL+L)
              DO 10 J=I,L+KB-1
                  IJ=(KB-1)*(I-1)+J
                  LJ=(KB-1)*(L-1)+J
10         A(IJ)=A(IJ)-A(LJ)*F
              A(LI)=F
12      CONTINUE
      DO 11 L=1,N
          DO 11 I=L+1,L+KB-1
              LI=(KB-1)*(L-1)+I
              B(I)=B(I)-B(L)*A(LI)
11     CONTINUE
C      SOLUCION PROPIAMENTE DICHA
      DO 20 K=1,N
          L=N+1-K
          LL=(KB-1)*(L-1)+L
          B(L)=B(L)/A(LL)
          DO 20 I=L+1,L+KB-1
              LI=(KB-1)*(L-1)+I
              B(L)=B(L)-A(LI)*B(I)
20     CONTINUE
      DO 25 I=1,N
          WRITE (12,*) B(I)
25     CONTINUE
      END
```

El programa **GAUSBAN** que se ha presentado sirve para resolver un sistema de ecuaciones lineales simétrico con ancho de banda constante y trabajando con arreglos de una dimensión. Se han hecho ligeras modificaciones al programa **GAUSSIM** una de ellas es que la modificación del vector **B** en la etapa de triangularización se lo realiza aparte esto es conveniente hacerlo para cuando se tiene que resolver varios sistemas de ecuaciones en las cuales cambian únicamente los términos independientes.

En el programa **GAUSBAN** los datos deben estar en el archivo **DATOS2.OUT** y los resultados se reportan en el archivo **RESUL2.OUT**. La entrada de datos es como sigue.

- Número de ecuaciones a resolver y el ancho de banda, escritos en las columnas 5 y 10 o justificados a dichas columnas, (formato 2 I5).
- Los datos de la matriz **A** un dato en cada fila, (formato libre).
- Los datos del término independiente, un dato en cada fila, (formato libre).

Para el ejemplo 1, los datos son los siguientes:

```

3   3
8
2
3
10
1
0
5
0
0
42
50
40

```

Nótese que en los datos de la matriz de coeficientes se han indicado como 0 a los elementos ficticios que se crean en el algoritmo presentado.

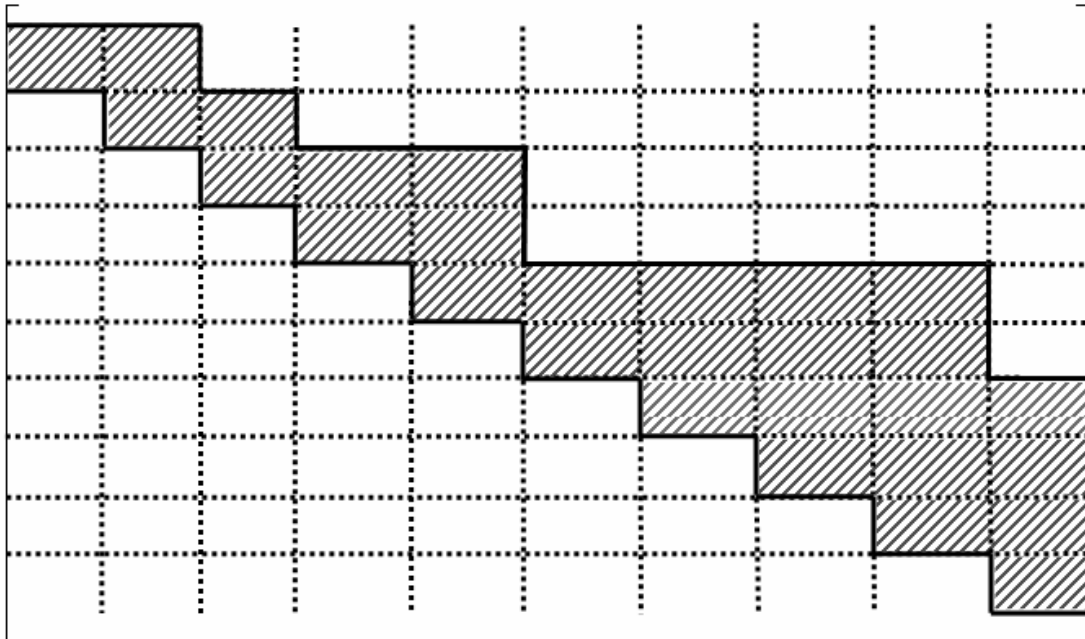
Por otro lado en el programa **GAUSBAN** se escribió el reporte de los resultados desde X_1 hasta X_n en forma contraria a los otros programas.

11.3.4 Otros métodos

Es importante conocer la forma del sistema de ecuaciones que se va a resolver para así seleccionar el algoritmo más adecuado, optimizando de ésta manera: capacidad de memoria y tiempo de ejecución. Por ejemplo si la matriz de coeficientes de un sistema de 10 ecuaciones tiene la forma que se indica a continuación y además es:

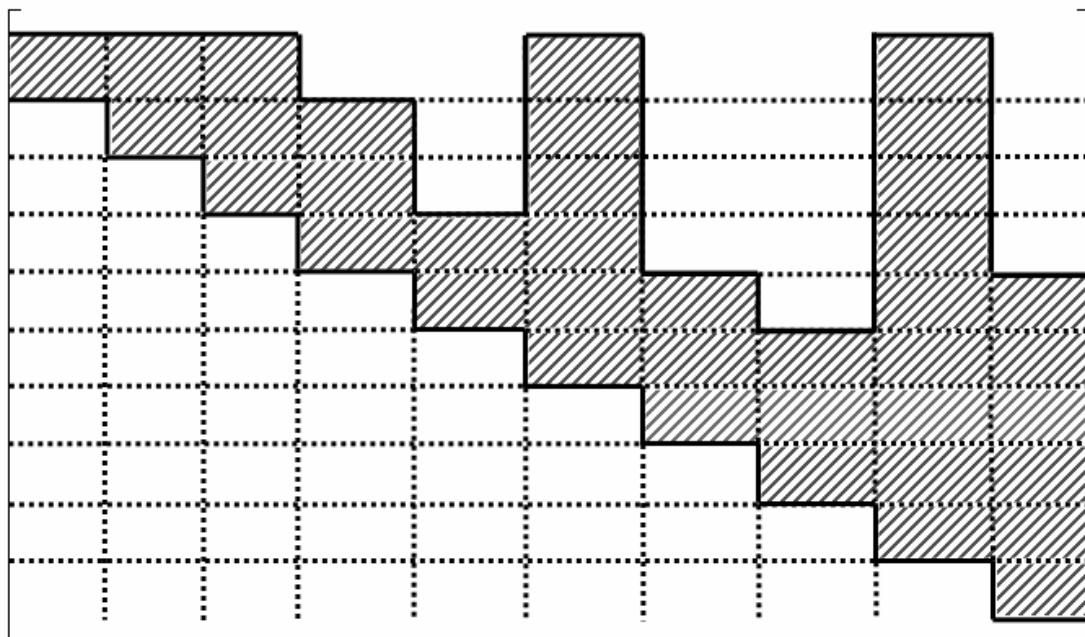
- Simétrica con respecto a la diagonal principal.
- Ancho de banda variable que es el caso más común de solución.
- Si el sistema se resuelve empleando el programa **GAUSS** que es para trabajar con toda la matriz se requiere 100 posiciones de memoria para la matriz **A** de un sistema de 10 ecuaciones. Si se utiliza el programa **GAUSSIM** que es para matrices simétricas se necesitan 55 registros para la matriz **A**. Con el programa **GAUSBAN** se necesitan 50

posiciones de memoria toda vez que el ancho de banda es 5 y con el algoritmo de ancho de banda variable en el cual se han indicado las cantidades diferentes de cero se requieren 28 posiciones de memoria.



- iv) Al resolver con ancho de banda variable el usuario debe dar como dato el ancho de banda de cada una de las filas de la matriz A . Por lo tanto el usar este algoritmo supone conocer exactamente la forma del sistema de ecuaciones a resolver.

Se considera otro ejemplo en el cual se tiene también 10 ecuaciones lineales pero la matriz A tiene la siguiente forma



- i) Simétrica con respecto a la diagonal.

- ii) En los métodos presentados tanto la triangularización como la solución se realizó por filas. Para sistemas de ecuaciones que tienen la forma presentada conviene resolver por columna.
- iii) Al resolver el sistema de ecuaciones por columnas los cambios que se deben hacer son mínimos con respecto a los programas presentados.

Es intención del autor dejar planteadas en el lector inquietudes sobre otras formas de solución de un sistema de ecuación por el Método de Gauss para que ampliara sus conocimientos consultando libros especializados de Métodos Numéricos.

Adicionalmente se desea que cuando se resuelve una estructura la elección del sistema de coordenadas generalizadas $Q - q$ se la realice de la forma más óptima, que sepa que al usar un determinado sistema de coordenadas se tendrá una matriz de rigidez con determinado ancho de banda y de determinada forma para que utilice el programa de solución de ecuaciones más adecuado.

Como aclaración debe manifestarse que en el apartado 11.3 se ha utilizado la letra A para representar la matriz de coeficientes de las incógnitas, en lo posterior de éste capítulo la letra A será la matriz de compatibilidad de deformaciones definida de la siguiente manera: $p = A q$

11.3.5 Solución de ecuaciones con CAL

CAL permite la solución de ecuaciones simétricas con el comando **SOLVE** de la siguiente manera:

❖ SOLVE A B

El comando SOLVE sirve para resolver sistemas de ecuaciones de la forma $A X = B$ Donde A es la matriz de coeficientes de las incógnitas y B el término independiente. La solución del sistema viene en el vector B

• EJEMPLO N.- 2

Preparar el archivo de datos para usar el programa CAL para el sistema de ecuaciones del ejemplo 1.

• SOLUCIÓN

```

B1
LOAD A R=3 C=3
8 2 3
2 10 1
3 1 5
LOAD B R=3 C=1
42
50
40
SOLVE A B
PRINT B
QUIT

```

CAL no puede resolver sistemas de ecuaciones asimétrico pero **todo sistema asimétrico puede convertirse en simétrico multiplicando por la matriz transpuesta**. Por lo tanto CAL puede resolver cualquier sistema de ecuaciones.

• EJEMPLO N.- 3

Preparar el archivo de datos para resolver el siguiente sistema de ecuaciones lineales utilizando CAL.

$$\begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 5 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 \\ 8 \end{bmatrix}$$

• SOLUCIÓN

Para que el sistema sea simétrico se multiplica por la izquierda por la matriz A^t

$$\begin{bmatrix} 2 & 5 \\ 4 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 5 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 5 \\ 4 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 6 \\ 8 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 29 & 23 \\ 23 & 25 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 52 \\ 48 \end{bmatrix}$$

```
B1
LOAD A R=2 C=2
2      4
5      3
LOAD B R=2 C=1
6
8
TRAN A AT
MULT AT B D
MULT AT A C
SOLVE C D
PRINT D
QUIT
```

11.3.6 Otros comandos de CAL

Se presentan algunos comandos de CAL que complementan la lista que se dio en el apartado 10.6 y en el anterior, en lo referente a operaciones con matrices, los mismos que se usarán en éste capítulo.

❖ **ZERO A R=? C=? T=? D=?**

El comando **ZERO** crea una matriz **A** de R filas y C columnas. Si no se especifica nada más toda la matriz tiene ceros. Si se da un valor a la variable **T** toda la matriz queda asignada con ese valor y finalmente si se asigna un valor a **D**, los elementos de la diagonal de la matriz **A** tienen dicho valor.

❖ **DELETE A**

Con éste comando se borra la matriz **A** de la memoria del computador.

❖ **DUPSM A B R=? C=? L=L1,L2**

El comando **DUPSM** crea una nueva matriz **B** que tiene R filas y C columnas de la matriz **A**, de tal manera que **B** es una submatriz de **A**. El término B(1,1) corresponde al término A(L1,L2).

❖ **STOSM A B L=L1,L2**

El comando **STOSM** almacena la submatriz **B** en la matriz **A**. El término B(1,1) es localizado en la fila L1 y columna L2 de la matriz **A**.

11.4 PÓRTICOS PLANOS

11.4.1 Cargas solo en los nudos

Cuando en la estructura solo actúan cargas en los nudos no existe el problema primario. Por lo tanto la solución del problema se reduce a la solución del problema complementario.

- **EJEMPLO N.- 4**

Resolver el pórtico plano mostrado en la figura 11.6 si las columnas son de 30 x 30 cm. y la viga de 20 x 30 cm. Se considera un módulo de elasticidad $E=2173706.513 \text{ T/m}^2$. Todos los elementos se consideran totalmente flexibles.

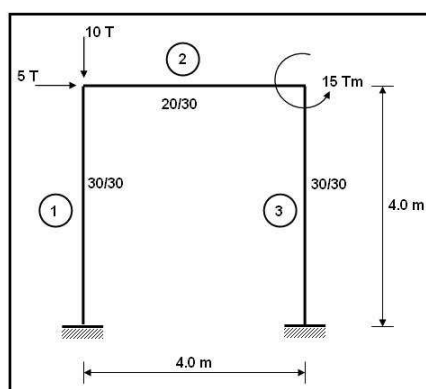
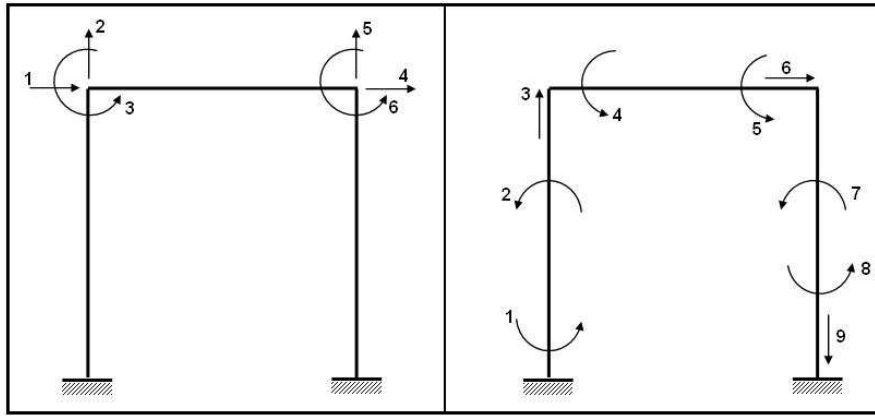


Figura 11.6 Estructura de ejemplo 4.

- **SOLUCIÓN**

El dígito que se encuentra dentro del círculo de la figura 11.6 corresponde a la numeración de los elementos. En la figura 11.7 y 11.8 se presentan los sistemas $Q - q$ y $P - p$ respectivamente.

Figura 11.7 Sistema $Q - q$ Figura 11.8 Sistema $P - p$

Las propiedades geométricas de la estructura se indican en la tabla 11.1

Tabla 11.1 Descripción de los elementos de ejemplo 4.

Elemento	b	h	$A = b h$	$I = \frac{b h^3}{12}$
	(m)	(m)	(m ²)	(m ⁴)
1	0.30	0.30	0.090	0.00068
2	0.20	0.30	0.060	0.00045
3	0.30	0.30	0.090	0.00068

La matriz A definida por la relación $p = A q$ resulta:

$$A = \begin{bmatrix} \frac{1}{4} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{4} & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & \frac{1}{4} & 1 & 0 & -\frac{1}{4} & 0 \\ 0 & \frac{1}{4} & 0 & 0 & -\frac{1}{4} & 1 \\ -1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & \frac{1}{4} & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{4} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Para el sistema $P - p$ de la figura 11.8, la matriz de rigidez de un elemento en el cual se desprecia el efecto del corte es la siguiente:

$$k = \begin{bmatrix} \frac{4EI}{L} & \frac{2EI}{L} & 0 \\ \frac{2EI}{L} & \frac{4EI}{L} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{EA}{L} \end{bmatrix}$$

Al reemplazar valores se tiene:

$$k^{(1)} = k^{(3)} = \begin{bmatrix} 1478.1204 & 739.0602 & 0.000 \\ 739.0602 & 1478.1204 & 0.000 \\ 0.000 & 0.000 & 48908.3966 \end{bmatrix}$$

$$k^{(2)} = \begin{bmatrix} 978.1679 & 489.0840 & 0.000 \\ 489.0840 & 978.1679 & 0.000 \\ 0.000 & 0.000 & 32605.5977 \end{bmatrix}$$

La matriz de rigidez de la estructura $K = \sum_{i=1}^3 A^{(i)t} k^{(i)} A^{(i)}$ resulta:

$$K = \begin{bmatrix} 32882.785 & & & & & & \\ & 0.000 & 49091.852 & & & & \\ & 554.296 & 366.813 & 2456.289 & & & \\ -32605.648 & & 0.000 & 0.000 & 32882.785 & & \\ & 0.000 & -183.407 & -366.814 & 0.000 & 49091.852 & \\ & 0.000 & 366.813 & 489.084 & 554.296 & -366.814 & 2456.289 \end{bmatrix} \quad \text{SIMÉTRICA}$$

Para las cargas mostradas en la figura 11.6 el vector de cargas generalizadas resulta:

$$Q = \begin{bmatrix} 5.00 \\ -10.00 \\ 0.00 \\ 0.00 \\ 0.00 \\ 15.00 \end{bmatrix}$$

No se ha detallado el cálculo de las matrices A , K , Q debido a que en los capítulos anteriores se ha tratado cada uno de ellos en forma extensa. En todos los ejercicios que se realicen en el presente apartado se presentarán únicamente resultados.

Para obtener el vector de coordenadas generalizadas q se debe resolver el siguiente sistema de ecuaciones:

$$Q = K q$$

De la solución del sistema de ecuaciones se obtiene:

$$\mathbf{q} = \begin{bmatrix} 0.006271 \\ -0.000225 \\ -0.002422 \\ 0.006130 \\ 0.000020 \\ 0.005242 \end{bmatrix}$$

Ahora se va a calcular las deformaciones \mathbf{p} que se producen en los elementos debido a las cargas exteriores para lo cual se multiplica la matriz \mathbf{A} por el vector de coordenadas \mathbf{q}

$$\mathbf{p} = \begin{bmatrix} \frac{1}{4} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{4} & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & \frac{1}{4} & 1 & 0 & -\frac{1}{4} & 0 \\ 0 & \frac{1}{4} & 0 & 0 & -\frac{1}{4} & 1 \\ -1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & \frac{1}{4} & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{4} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0.006271 \\ -0.000225 \\ -0.002422 \\ 0.006130 \\ 0.000020 \\ 0.005242 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{p} = \begin{bmatrix} 0.001568 \\ -0.000854 \\ -0.000225 \\ \hline -0.002483 \\ 0.005181 \\ -0.000141 \\ \hline 0.006775 \\ 0.001533 \\ 0.000020 \end{bmatrix}$$

Nótese que el vector resultante \mathbf{p} está compuesto por subvectores. En efecto las tres primeras cantidades corresponden a las deformaciones del elemento 1, las tres siguientes al elemento 2 y las tres últimas al elemento 3.

Una vez encontradas las deformaciones \mathbf{p} se pasa al cálculo de las cargas internas \mathbf{P} de cada uno de los elementos multiplicando la matriz de rigidez del miembro \mathbf{k} por el vector \mathbf{p} .

▪ **Elemento 1**

$$\mathbf{P}^{(1)} = \mathbf{k}^{(1)} \mathbf{p}^{(1)} = \begin{bmatrix} 1478.1204 & 739.0602 & 0.000 \\ 739.0602 & 1478.1204 & 0.000 \\ 0.000 & 0.000 & 48908.3966 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0.001568 \\ -0.000854 \\ -0.000225 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1.6865 \\ -0.1035 \\ -11.0044 \end{bmatrix}$$

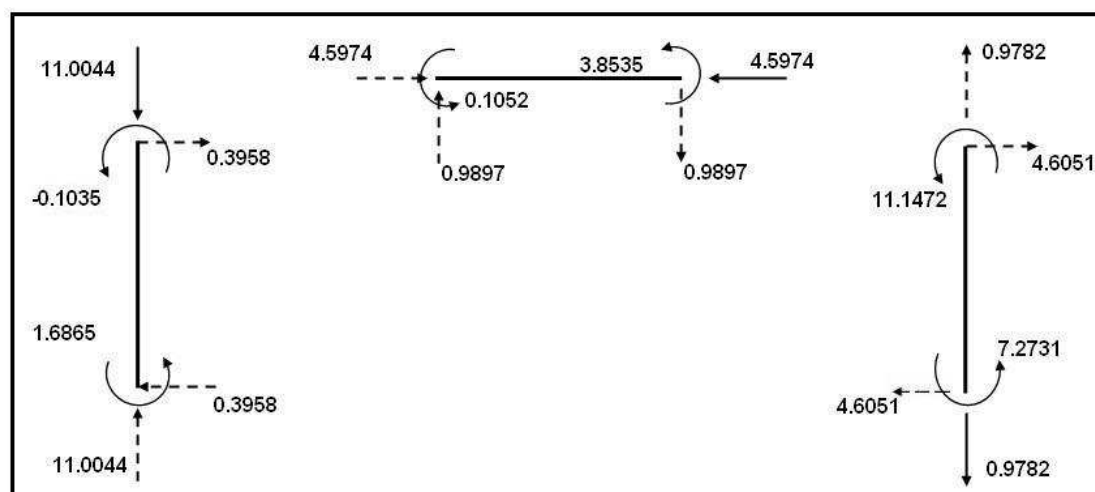
▪ **Elemento 2**

$$\mathbf{P}^{(2)} = \mathbf{k}^{(2)} \mathbf{p}^{(2)} = \begin{bmatrix} 978.1679 & 489.0840 & 0.000 \\ 489.0840 & 978.1679 & 0.000 \\ 0.000 & 0.000 & 32605.5977 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -0.002483 \\ 0.005181 \\ -0.000141 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.1052 \\ 3.8535 \\ -4.5974 \end{bmatrix}$$

▪ **Elemento 3**

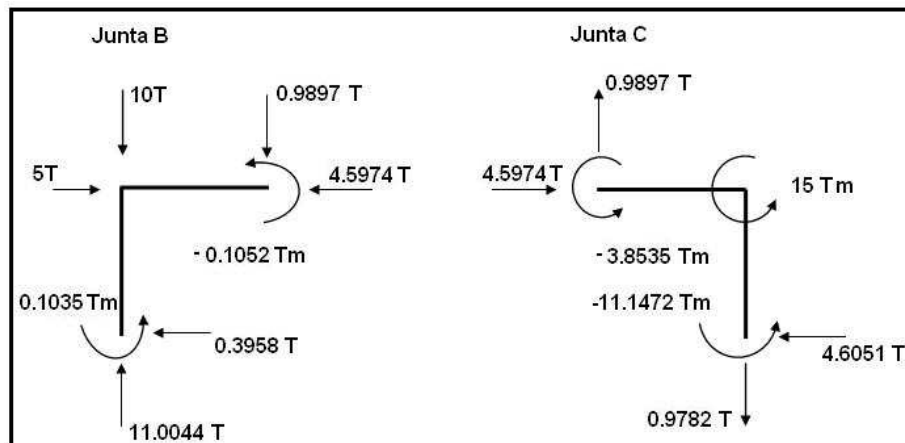
$$\mathbf{P}^{(3)} = \mathbf{k}^{(3)} \mathbf{p}^{(3)} = \begin{bmatrix} 1478.1204 & 739.0602 & 0.000 \\ 739.0602 & 1478.1204 & 0.000 \\ 0.000 & 0.000 & 48908.3966 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0.006775 \\ 0.001533 \\ 0.000020 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 11.1472 \\ 7.2731 \\ 0.9782 \end{bmatrix}$$

El significado y convención de signos de las cargas internas de los elementos \mathbf{P} se indica en la figura 11.8. Con ésta indicación a continuación se indican en líneas continuas los valores encontrados y con líneas entrecortadas los valores de los cortantes y carga axial que se requiere para que exista equilibrio en los elementos.



Solución de la estructura del ejemplo 6.

Las fuerzas indicadas están en Toneladas y los momentos en Toneladas por metro. Como una comprobación del ejercicio realizado se debe verificar que en cada nudo exista equilibrio, como se verá a continuación.



Como se puede apreciar en cada junta o nudo existe equilibrio. Estrictamente no se tiene que $\sum F_x = 0$, $\sum F_y = 0$ y $\sum M = 0$ por los decimales con que se ha trabajado al resolver con un computador el pequeño error desaparece. Se deja al lector obtener las reacciones exteriores del pórtico.

11.4.2 Cargas en los elementos

• EJEMPLO N.- 5

Preparar el archivo de datos para resolver el ejemplo anterior con CAL. Ingresar como datos las matrices A y k de los elementos y el vector de cargas Q .

• SOLUCIÓN

B1

C MATRIZ DE COMPATIBILIDAD DE LOS ELEMENTOS

LOAD A1 R=3 C=6

```
0.25  0  0  0  0  0
0.25  0  1  0  0  0
0  1  0  0  0  0
```

LOAD A2 R=3 C=6

```
0  0.25  1  0  -0.25  0
0  0.25  0  0  -0.25  1
-1  0  0  1  0  0
```

LOAD A3 R=3 C=6

```
0  0  0  0.25  0  1
0  0  0  0.25  0  0
0  0  0  0  1  0
```

C MATRIZ A COMPLETA

ZERO A R=6 C=9

STOSM A A1 L=1,1

STOSM A A2 L=4,1

STOSM A A3 L=7,1

C MATRIZ DE RIGIDEZ DE UN ELEMENTO

LOAD K1 R=3 C=3

```
1478.1204  739.0602  0.000
739.0602  1478.1204  0.000
0.000  0.000  48908.3966
```

DUP K1 K3

LOAD K2 R=3 C=3

```
978.1679  489.0840  0.000
```

```
489.0840  978.1679  0.000
0.000      0.000  32605.5977
```

C MATRIZ DE RIGIDEZ DE LA ESTRUCTURA

```
TMULT A1 K1 AUX1
MULT  AUX1 A1 S1
TMULT A2 K2 AUX2
MULT  AUX2 A2 S2
TMULT A3 K3 AUX3
MULT  AUX3 A3 S3
ADD S1 S2
ADD S1 S3
DUP S1 K
```

C VECTOR DE CARGAS GENERALIZADAS

```
LOAD QT R=1 C=6
5.00 -10.00 0.00 0.00 0.00 15.00
TRAN QT Q
```

C VECTOR DE COORDENADAS GENERALIZADAS

```
SOLVE K Q
PRINT Q
```

C DEFORMACIONES DE LOS ELEMENTOS

```
MULT A Q P
PRINT P
DUPSM P P1 R=3 C=1 L=1,1
DUPSM P P2 R=3 C=1 L=4,1
DUPSM P P3 R=3 C=1 L=7,1
```

C CARGAS INTERNAS EN LOS ELEMENTOS

```
MULT K1 P1 F1
PRINT F1
MULT K2 P2 F2
PRINT F2
MULT K3 P3 F3
PRINT F3
QUIT
```

- EJEMPLO N.- 6**

En el marco plano de la figura 11.6 actúa la carga uniforme distribuida de magnitud 4.41 T/m sobre el elemento 2 como se indica en la figura 11.9. Resolver este problema considerando el mismo sistema de coordenadas $Q-q$ y $P-p$ del ejemplo 4. En consecuencia la matriz de rigidez de la estructura es la misma debiendo iniciar el cálculo a partir del vector de cargas generalizadas.

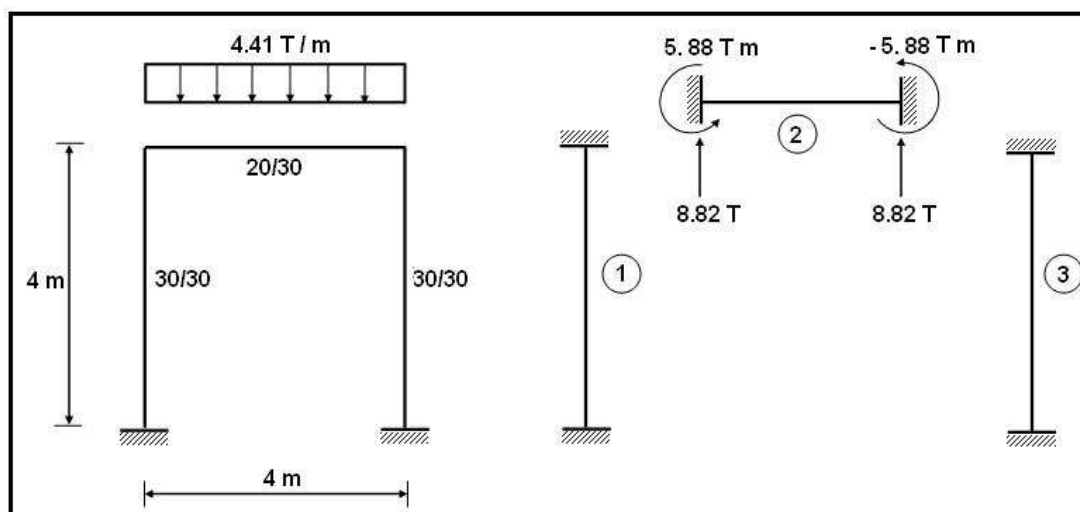


Figura 11.9

Figura 11.10 Problema Primario

• SOLUCIÓN

En éste caso existe problema primario el mismo que se presenta en la figura 11.10. Por lo tanto para calcular las fuerzas y momentos finales habrá que sumar a las cargas del problema complementario las acciones del problema primario.

Los vectores \mathbf{Q} de cargas generalizadas y \mathbf{q} de coordenadas generalizadas que se obtienen a partir de la ecuación básica de estructuras $\mathbf{Q} = \mathbf{K} \mathbf{q}$ resultan.

$$\mathbf{Q} = \begin{bmatrix} 0.000 \\ -8.820 \\ -5.880 \\ 0.000 \\ -8.820 \\ 5.880 \end{bmatrix} \quad \mathbf{q} = \begin{bmatrix} 0.0000254 \\ -0.0001803 \\ -0.0029962 \\ -0.0000254 \\ -0.0001803 \\ 0.0029962 \end{bmatrix}$$

Para calcular las deformaciones \mathbf{p} se realiza: $\mathbf{p} = \mathbf{A} \mathbf{q}$

$$\mathbf{p} = \begin{bmatrix} \frac{1}{4} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{4} & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & \frac{1}{4} & 1 & 0 & -\frac{1}{4} & 0 \\ 0 & \frac{1}{4} & 0 & 0 & -\frac{1}{4} & 1 \\ -1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & \frac{1}{4} & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{4} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0.0000254 \\ -0.0001803 \\ -0.0029962 \\ -0.0000254 \\ -0.0001803 \\ 0.0029962 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.00000635 \\ -0.00298985 \\ -0.00018030 \\ \hline -0.00299620 \\ 0.00299620 \\ -0.00005080 \\ \hline 0.00298985 \\ -0.00000635 \\ -0.00018030 \end{bmatrix}$$

▪ Elemento 1

$$\mathbf{P}^{(1)} = \mathbf{k}^{(1)} \mathbf{p}^{(1)} = \begin{bmatrix} 1478.1204 & 739.0602 & 0.000 \\ 739.0602 & 1478.1204 & 0.000 \\ 0.000 & 0.000 & 48908.3966 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0.00000635 \\ -0.00298985 \\ -0.00018030 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2.2003 \\ -4.4147 \\ -8.8182 \end{bmatrix}$$

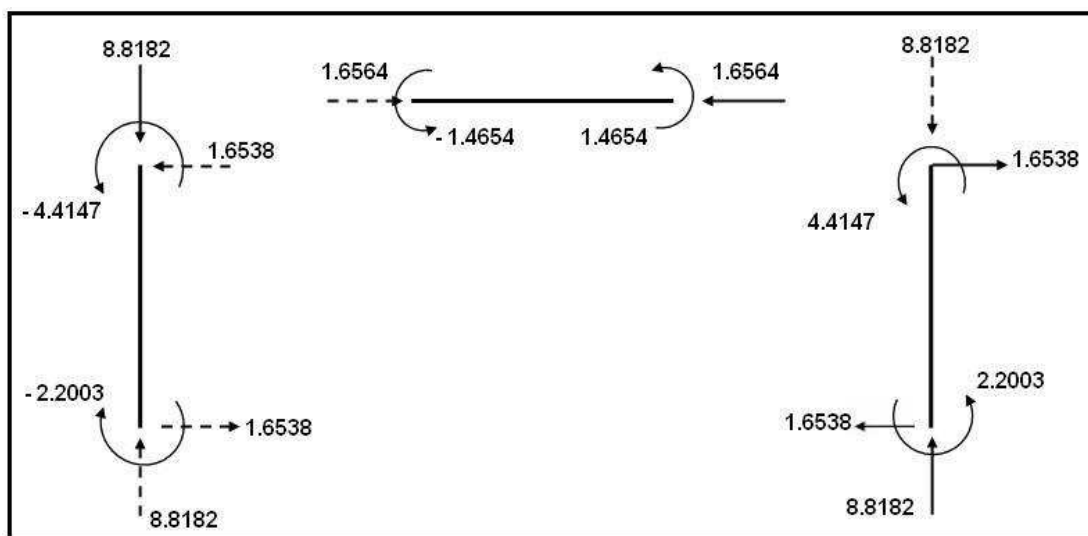
▪ Elemento 2

$$P^{(2)} = k^{(2)} p^{(2)} = \begin{bmatrix} 978.1679 & 489.0840 & 0.000 \\ 489.0840 & 978.1679 & 0.000 \\ 0.000 & 0.000 & 32605.5977 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -0.00299620 \\ 0.00299620 \\ -0.00005080 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1.4654 \\ 1.4654 \\ -1.6564 \end{bmatrix}$$

▪ Elemento 3

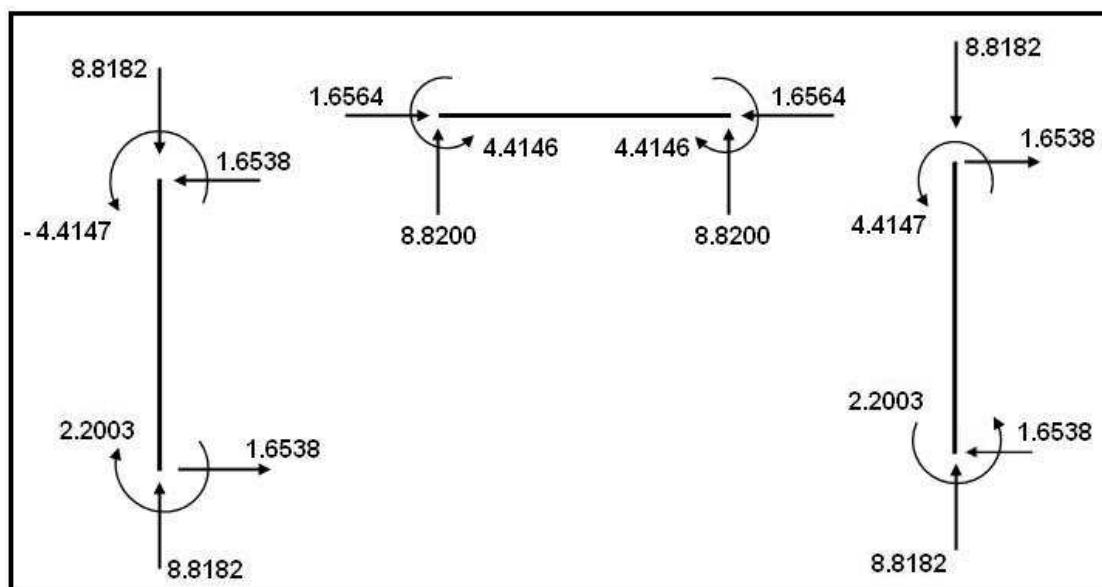
$$P^{(3)} = k^{(3)} p^{(3)} = \begin{bmatrix} 1478.1204 & 739.0602 & 0.000 \\ 739.0602 & 1478.1204 & 0.000 \\ 0.000 & 0.000 & 48908.3966 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0.00298985 \\ -0.00000635 \\ -0.00018030 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4.4147 \\ 2.2003 \\ -8.8182 \end{bmatrix}$$

Con los valores obtenidos la solución del problema complementario es la siguiente:



Solución del Problema complementario

Al efectuar la suma algebraica del problema primario indicado en la figura 11.10 con la solución del problema complementario que se acaba de indicar se encuentra la solución final.



Solución Final Fuerzas en T. y Momentos en T.m.

11.4.3 Pórticos con elementos axialmente rígidos

Una hipótesis muy común dentro del cálculo estructural es considerar a los elementos de un pórtico plano como si fueran axialmente rígidos $A = \infty$. Esta hipótesis da buenos resultados con edificios de pequeña altura, al trabajar con ésta hipótesis se reduce notablemente el número de grados de libertad.

• EJEMPLO N.- 7

Resolver la estructura de la figura 11.9 pero considerando que todos sus elementos son axialmente rígidos. En la figura 11.11 se dibuja nuevamente el pórtico y en las figuras 11.12 y 11.13 los sistemas $Q - q$ y $P - p$ respectivamente.

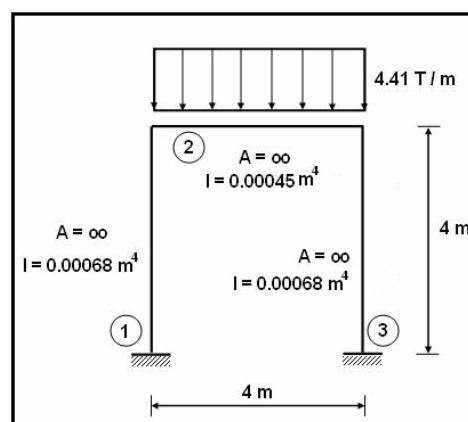


Figura 11.11

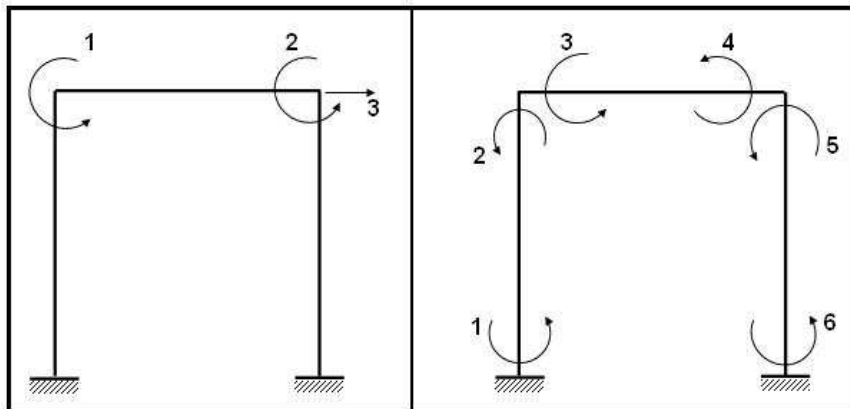


Figura 11.12 Sistema $Q - q$

Figura 11.13 Sistema $P - p$

• SOLUCIÓN

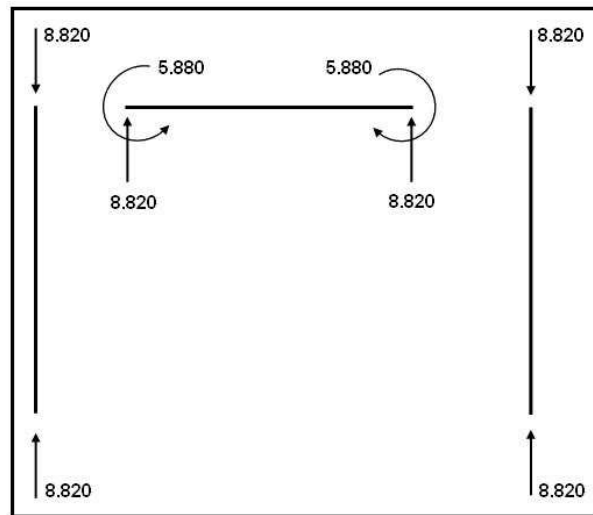
▪ Matriz de rigidez de la estructura

$$K = \sum_{i=1}^3 A^{(i)t} k^{(i)} A^{(i)} = \begin{bmatrix} 2456.28830 & 489.08400 & 554.29515 \\ 489.08400 & 2456.28830 & 554.29515 \\ 554.29515 & 554.29515 & 554.29515 \end{bmatrix}$$

- Vector de cargas generalizadas

$$Q = \begin{bmatrix} -5.880 \\ 5.880 \\ 0.000 \end{bmatrix}$$

Es importante que el lector preste atención al problema primario de éste ejemplo. Nótese que existen fuerzas axiales en los elementos debido a la condición de que son axialmente rígidos.



Problema Primario

- Matriz de compatibilidad de deformaciones A tal que $p = A q$

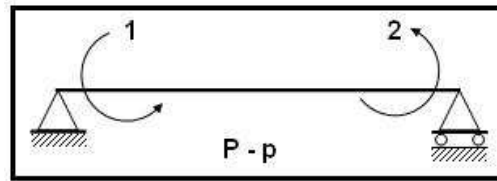
$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0.25 \\ 1 & 0 & 0.25 \\ \hline 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ \hline 0 & 1 & 0.25 \\ 0 & 0 & 0.25 \end{bmatrix}$$

- Matriz de rigidez de elemento

$$k^{(1)} = k^{(3)} = \begin{bmatrix} 1478.1204 & 739.0602 \\ 739.0602 & 1478.1204 \end{bmatrix}$$

$$k^{(2)} = \begin{bmatrix} 978.1679 & 489.0840 \\ 489.0840 & 978.1679 \end{bmatrix}$$

La matriz de rigidez de un elemento axialmente rígido de sección constante, k en la cual no se considera el efecto de corte es la siguiente asociada al sistema $P - p$ que se indica.



$$k = \begin{bmatrix} \frac{4EI}{L} & \frac{2EI}{L} \\ \frac{2EI}{L} & \frac{4EI}{L} \end{bmatrix}$$

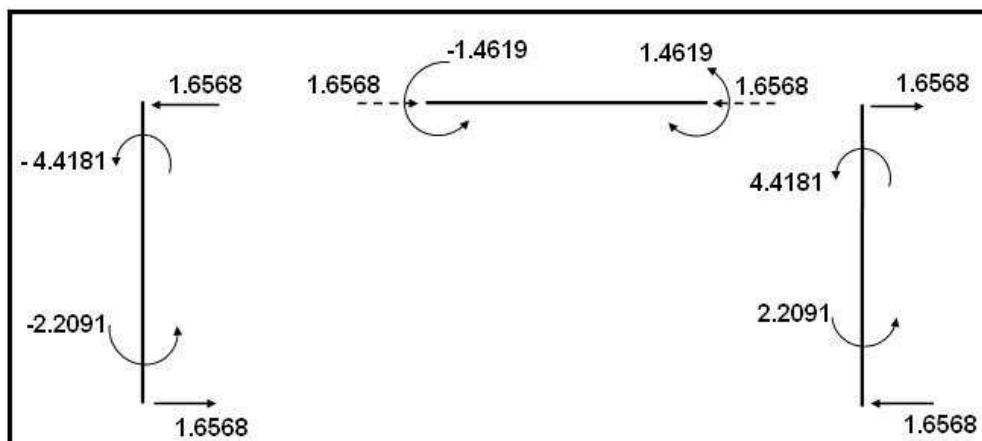
- Vector q que se obtiene de la solución de ecuaciones $Q = K q$

$$q = \begin{bmatrix} -0.0029890 \\ 0.0029890 \\ -2.892 * 10^{-12} \end{bmatrix}$$

- Deformaciones p y cargas internas P

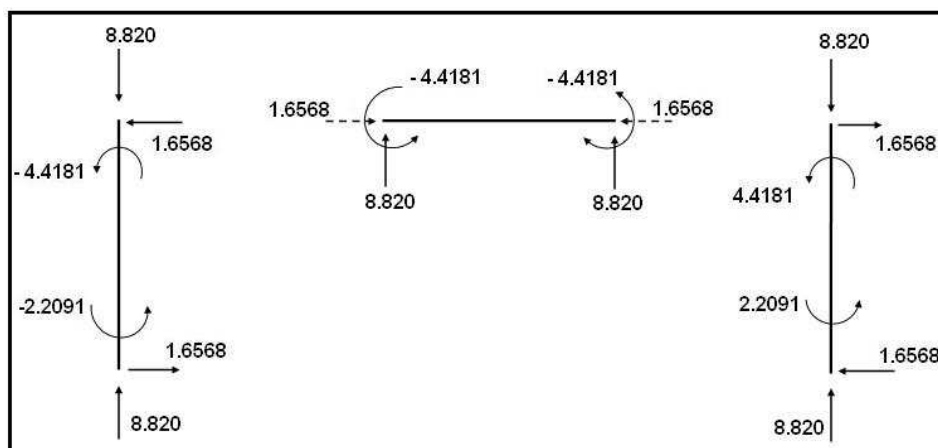
$$p = \begin{bmatrix} -7.232 * 10^{-13} \\ -0.002989 \\ -0.002989 \\ 0.002989 \\ 0.002989 \\ 7.232 * 10^{-13} \end{bmatrix} \quad P = \begin{bmatrix} -2.2091 \\ -4.4181 \\ -1.4619 \\ 1.4619 \\ 4.4181 \\ 2.2091 \end{bmatrix}$$

- Solución del Problema Complementario



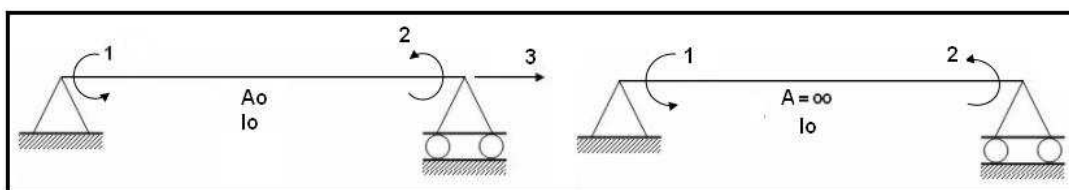
Al sumar el Problema Primario al Complementario se tiene la solución Final.

▪ Solución Final



▪ Comentarios

- Comparar los resultados de éste ejercicio con los del ejemplo anterior.
- Antes de sacar conclusiones resolver un pórtico de 10 pisos en las mismas condiciones sometido a cargas verticales únicamente y luego a fuerzas horizontales. Ahora ¿Que conclusiones tiene?
- Existen algunos algoritmos que permiten obtener la matriz de rigidez de un pórtico plano en el cual sus elementos son $A = \infty$ sin necesidad de realizar el triple producto matricial.
- En forma similar se resuelven marcos planos con elementos transversalmente rígidos pero no todos los elementos se consideran $I = \infty$.
- En todos los ejemplos realizados en éste numeral se trabajó con el siguiente sistema de coordenadas para los elementos.



11.5 ARMADURAS PLANAS

11.5.1 Cargas en los nudos

La forma más común de calcular una armadura plana es considerar que las cargas gravitan únicamente en los nudos. Es más cuando actúan cargas en los elementos se acostumbra encontrar cargas equivalentes en los nudos.

- EJEMPLO N.- 8**

Resolver la armadura plana presentada en la figura 11.14 por el Método de los Desplazamientos. En la figura se indica la sección transversal de sus elementos.

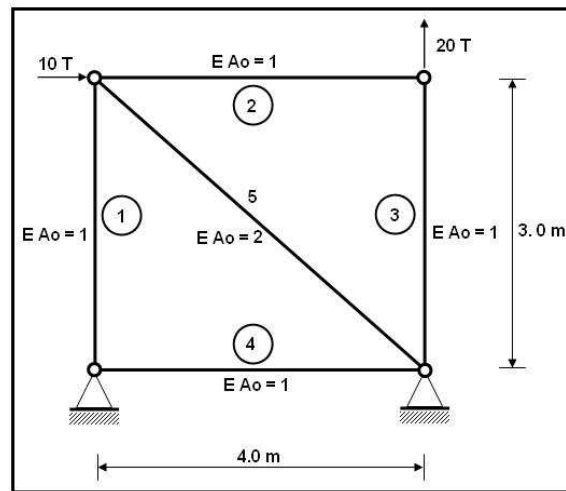


Figura 11.14

- SOLUCIÓN**

Al igual que en el subapartado anterior todos los conceptos que permiten resolver el problema han sido ya expuestos en capítulos anteriores. Por lo tanto es recomendable que el lector haga primero un repaso. Con esta indicación en las figuras 11.15 y 11.16 se presentan los sistemas $Q - q$ y $P - p$ con los cuales se resuelve el problema.

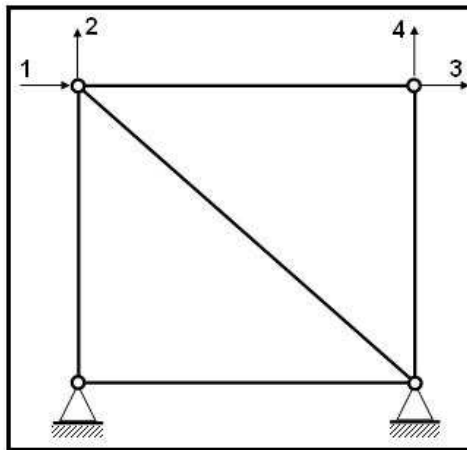


Figura 11.15 Sistema $Q - q$

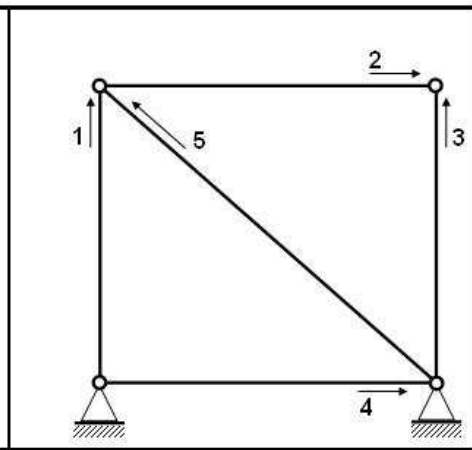


Figura 11.16 Sistema $P - p$

- Rigidez de los elementos**

$$k = \left[\frac{EA}{L} \right]$$

$$k^{(1)} = k^{(3)} = \left[\frac{1}{3} \right]$$

$$k^{(2)} = k^{(4)} = \begin{bmatrix} 1 \\ 4 \end{bmatrix}$$

$$k^{(5)} = \begin{bmatrix} 2 \\ 5 \end{bmatrix}$$

- Matriz de compatibilidad A tal que $p = A q$

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ \hline -1 & 0 & 1 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 1 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline -\frac{4}{5} & \frac{3}{5} & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

- Matriz de rigidez de la estructura $K = \sum_{i=1}^5 A^{(i)t} k^{(i)} A^{(i)}$

$$K = \begin{bmatrix} 0.506 & & & \\ -0.192 & 0.477 & \textit{SIMÉTRICA} & \\ -0.250 & 0.000 & 0.250 & \\ 0.000 & 0.000 & 0.000 & 0.333 \end{bmatrix}$$

- Vector de cargas Q

$$Q = \begin{bmatrix} 10 \\ 0 \\ 0 \\ 20 \end{bmatrix}$$

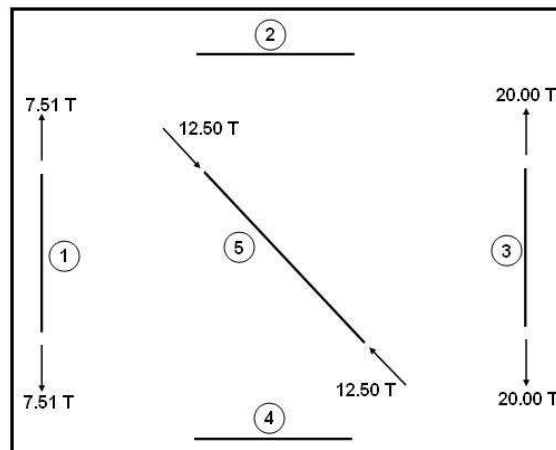
- Vector de coordenadas q que se obtiene de la solución de $Q = K q$

$$q = \begin{bmatrix} 55.95 \\ 22.52 \\ 55.95 \\ 60.01 \end{bmatrix}$$

- Deformaciones p que se obtienen multiplicando $A q$. Fuerzas Internas $P = k p$

$$p = \begin{bmatrix} 22.520 \\ 0.000 \\ 60.010 \\ 0.000 \\ -31.248 \end{bmatrix} \quad P = \begin{bmatrix} 7.51 \\ 0.00 \\ 20.00 \\ 0.00 \\ -12.50 \end{bmatrix}$$

- Resultados Finales



En todos los problemas resueltos en éste capítulo las cargas $P^{(i)}$ se obtuvieron efectuando el producto en cada elemento de la matriz de rigidez por las deformaciones $P^{(i)} = k^{(i)} p^{(i)}$. Ahora bien se obtiene el mismo resultado multiplicando la matriz de rigidez constituida por las matrices de rigidez de cada uno e los elementos colocados en la diagonal por el vector de deformaciones p . Para el ejemplo analizado se tiene:

$$P = \begin{bmatrix} \frac{1}{3} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{4} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{3} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{4} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{2}{5} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 22.520 \\ 0.000 \\ 60.010 \\ 0.000 \\ -31.250 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7.51 \\ 0.00 \\ 20.00 \\ 0.00 \\ -12.50 \end{bmatrix}$$

Al generalizar lo expuesto se tiene que las cargas internas P pueden calcularse de la siguiente manera:

$$\begin{bmatrix} P^{(1)} \\ P^{(2)} \\ \dots \\ P^{(n)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} k^{(1)} & & & \\ & k^{(2)} & & \\ & & \dots & \\ & & & k^{(n)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p^{(1)} \\ p^{(2)} \\ \dots \\ p^{(n)} \end{bmatrix}$$

11.5.2 Cargas en nudos y miembros

Finalmente se desea ilustrar la forma de solución de una armadura plana que tiene cargas en los elementos y en los nudos.

• EJEMPLO N.- 9

Resolver la estructura de la figura 11.17 en la cual se considera que todos los elementos tienen la misma rigidez axial EA .

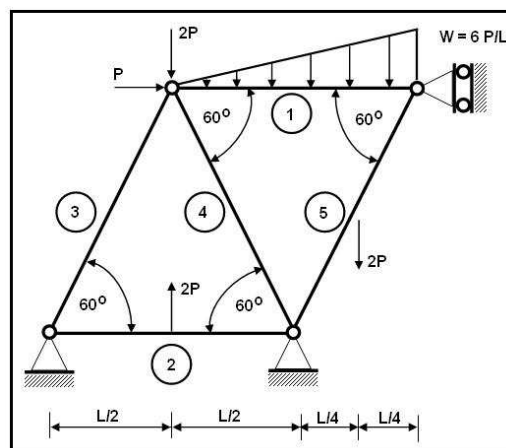


Figura 11.17

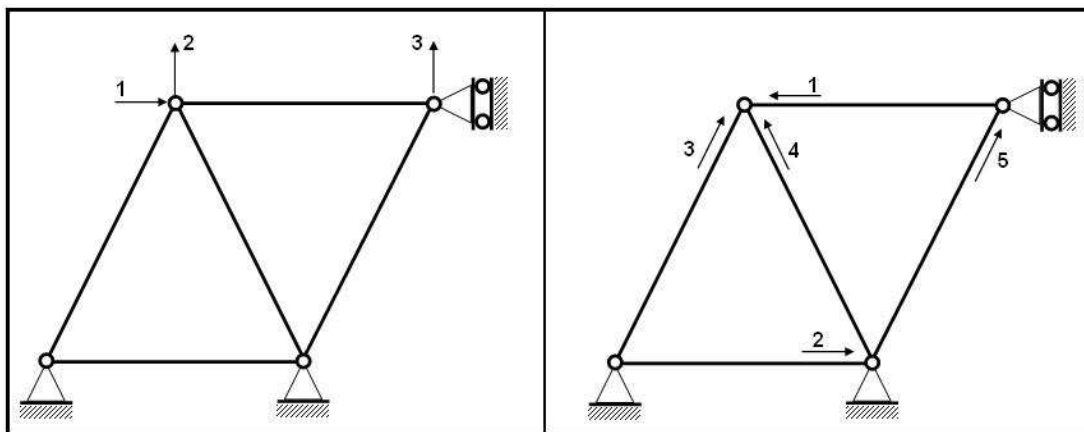
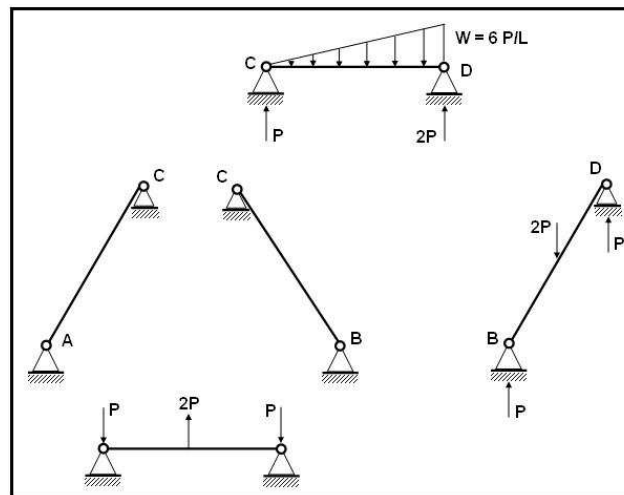


Figura 11.18 Sistema $Q - q$

Figura 11.19 Sistema $P - p$



Problema Primario

Al realizar el equilibrio en cada nudo se obtienen las fuerzas de fijación R y con esto se encuentra el vector de cargas generalizadas Q .

$$Q = \begin{bmatrix} P \\ -3P \\ -3P \end{bmatrix}$$

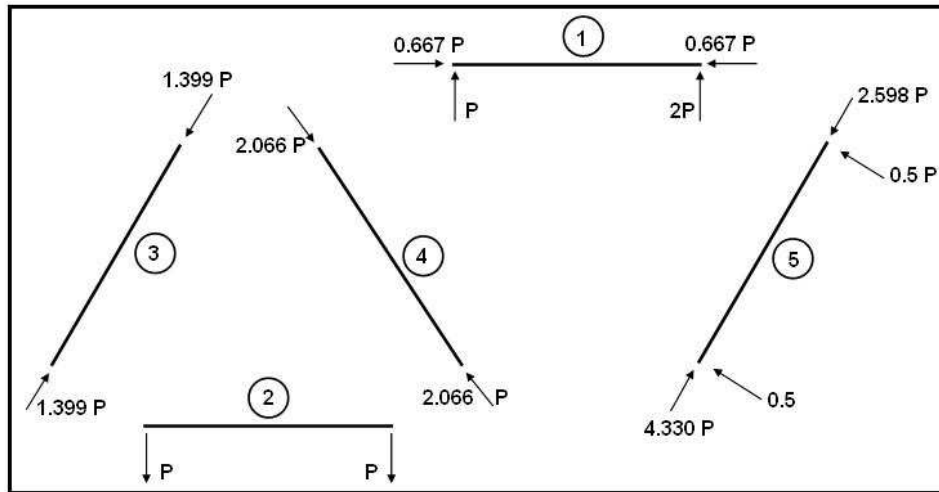
Al resolver el sistema de ecuaciones $Q = K q$ se encuentra:

$$q = \begin{bmatrix} 0.667 \\ -2.000 \\ -4.000 \end{bmatrix} \frac{PL}{EA}$$

El resto de cálculo ya es conocido, los resultados que se obtienen son:

$$p = \begin{bmatrix} -0.667 \\ 0.000 \\ -1.399 \\ -2.066 \\ -3.464 \end{bmatrix} \frac{PL}{EA} \quad P = \begin{bmatrix} -0.667 \\ 0.000 \\ -1.399 \\ -2.066 \\ -3.464 \end{bmatrix} P$$

Finalmente la solución final se encuentra sumando el problema primario al complementario. Nótese que en el elemento 5, la reacción del problema primario se ha descompuesto en una fuerza axial y una fuerza transversal cuyos valores son $0.866 P$ y $0.5 P$ respectivamente, con esta aclaración será muy fácil para el lector obtener los valores finales que se indican a continuación.

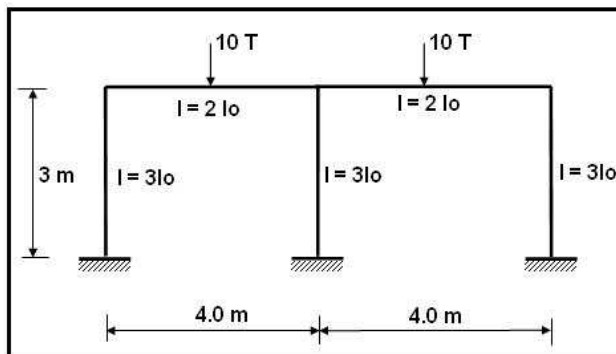


Solución Final

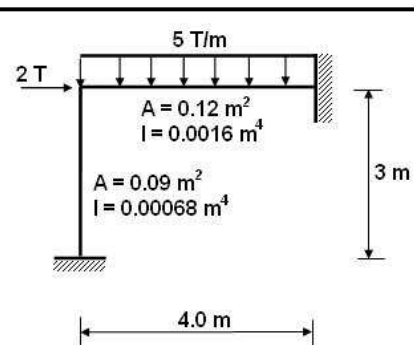
11.6 EJERCICIOS PROPUESTOS

Resolver completamente las siguientes estructuras por el Método de los Desplazamientos.

Ejercicio N.- 1



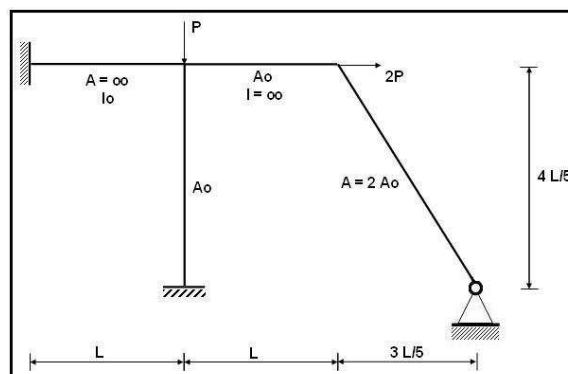
Ejercicio N.- 2



Para todos los elementos $\frac{I}{A_o} = \frac{16}{100}$ $E = 1$.

$$E = 2173706.51 \frac{T}{m^2}$$

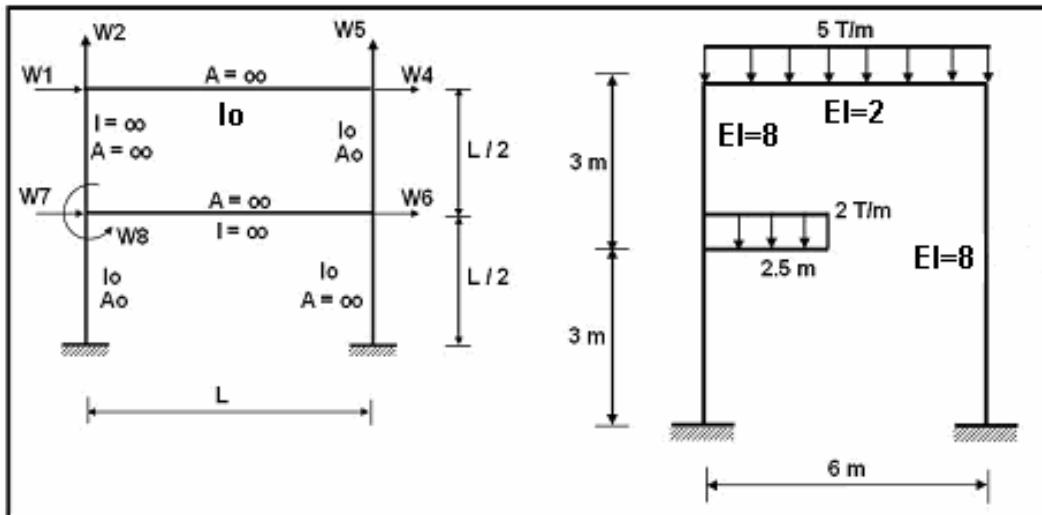
Ejercicio N.- 3



$$\frac{I_o}{A_o L^2} = \frac{1}{100} \quad E = 1$$

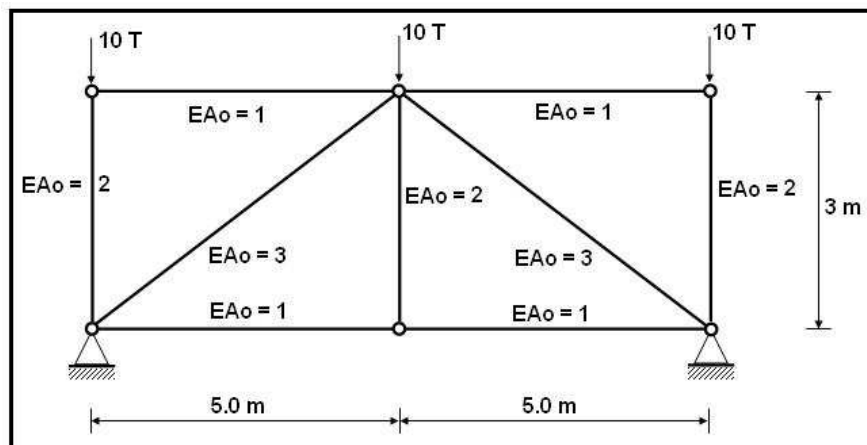
Ejercicio N.- 4

Ejercicio N.- 5

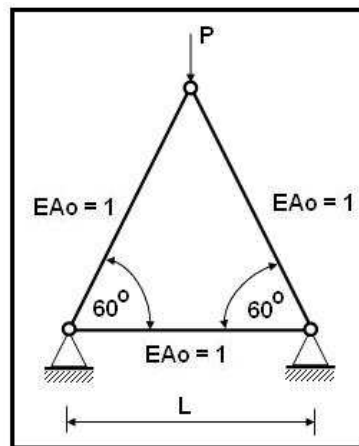


$$\frac{I_o}{A_o L^2} = \frac{1}{100} \quad E = 1$$

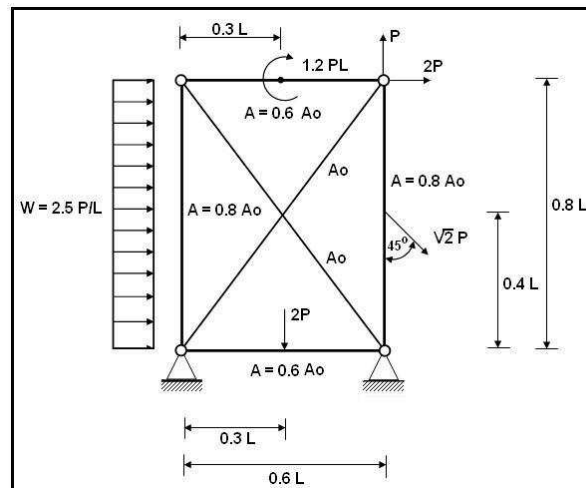
Ejercicio N.- 6



Ejercicio N.- 7

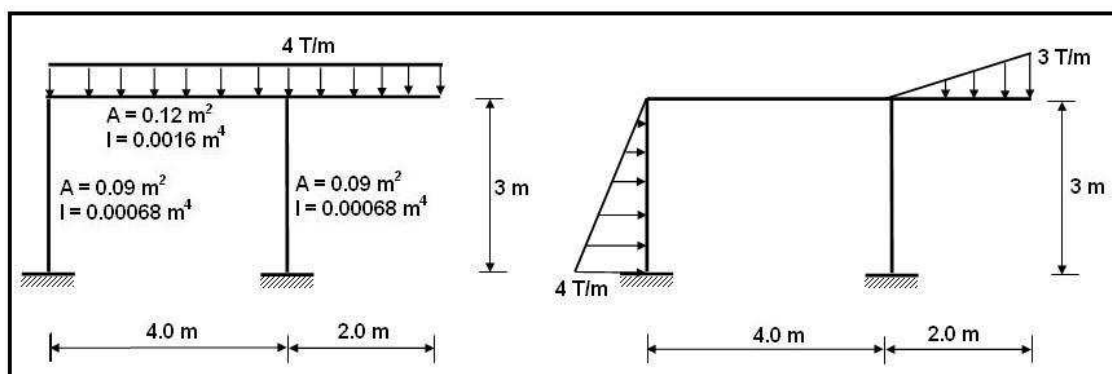


Ejercicio N.- 8



Ejercicio N.- 9

Ejercicio N.- 10



El módulo de elasticidad en estos dos ejercicios es $E = 2173706.51 \text{ T/m}^2$. Por otra parte para el ejercicio N.- 10 los datos de la estructura son los mismos del ejercicio N.- 9.