

CONFERENCIA 6 INTEGRALES DE LÍNEA®

Conferencia 6 Integrales de Línea.

Objetivos: Definir las integrales de línea en forma vectorial y en su primera y segunda forma escalar.

Temáticas:

Clasificación de curvas. Integral de línea en su segunda forma escalar. Propiedades y cálculos. Integrales de línea en su primera forma escalar. Integral de línea en forma vectorial. Cálculo de estas integrales.

Introducción: Hay muchos problemas ya estudiados como el caso del cálculo del trabajo que realiza una fuerza sobre una partícula o el área que pueden generalizarse dando lugar a un nuevo tipo de integrales. Estas son las llamadas integrales de línea que estudiaremos a continuación. ¿Cómo calcular $\int_A^B \vec{F} d\vec{r}$, donde F es una función vectorial y C una curva sobre la cual se quiere calcular la integral?.

En el transcurso de la conferencia le daremos respuestas a esta pregunta.

Desarrollo:

Antes de definir la integral de línea estudiaremos algunos conceptos necesarios:

DEFINICIÓN 0.0.1 a) Curva simple:

Una curva C de ecuación vectorial $\vec{r}(t) = x(t)\vec{i} + y(t)\vec{j} + z(t)\vec{k}$, donde $x = x(t)$, $y = y(t)$, $z = z(t)$ son las ecuaciones paramétricas de C , se llama simple, si cada uno de sus puntos es obtenido solamente para un valor del parámetro.

EJEMPLO 0.0.1 *Curva simple Curva no simple*

Es evidente que una curva es simple si no se corta a si misma.

DEFINICIÓN 0.0.2 b) Curva Orientada:

Una curva C puede tener un sentido de recorrido asignado, en ese caso se dice que es una curva orientada, o sea, se puede decir que C tiene un punto inicial A y un punto final B .

DEFINICIÓN 0.0.3 c) Curva Cerrada Simple:

Si una curva $\vec{r}(t)$ está definida entre dos valores del parámetro $t = a$ y $t = b$ y ocurre que $\vec{r}(a) = \vec{r}(b)$, la curva simple que tenga esta característica se denomina curva cerrada simple, en este caso el punto donde se cierra la curva es la única excepción donde a 2 valores del parámetro la corresponde un mismo punto de la curva.

Ej.: la Circunferencia.

DEFINICIÓN 0.0.4 d) Curva suave:

Una curva C dada mediante sus ecuaciones paramétricas $x = x(t)$, $y = y(t)$, $z = z(t)$, con $a \leq t \leq b$ se llama suave, si las funciones $x(t)$, $y(t)$, $z(t)$, tienen en el intervalo a, b derivadas continuas $x'(t)$, $y'(t)$, $z'(t)$. Una curva continua, formada por un número finito de trozos suaves se llama suave a trozos.

Integral de Línea en la 2 forma escalar ó con respecto a la longitud de arco.

Sea C una curva simple, suave o suave a trozos, orientada y con punto. inicial A y punto. final B . Sea $f(x, y, z)$ una función escalar definida y acotada sobre C . Consideremos una partición de la curva C , formada por n arcos, mediante los puntos

$A = A, A_1, \dots, A_n = B$, de tal forma que la longitud de arco cualquiera $A_{i-1}A_i$ ($i = 1, 2, \dots, n$) sea Δl_i .

Escogemos un punto arbitrario P_i , sobre cada arco $A_{i-1}A_i$ y formemos la suma integral $\sum_{i=1}^n f(p_i) \Delta l_i$ Si el límite de esta suma cuando la longitud del mayor de los arcos tiende a

$0 : \lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(p_i) \Delta l_i$, existe y es finito, independientemente de los procedimientos aplicados

para dividir la curva AB en partes y elegir los puntos, P_i entonces el límite se llama:

Integral de línea de la función $f(x, y, z)$ con respecto a la longitud de arco, sobre la curva

C desde A hasta B se denota como: $\lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(p_i) \Delta l_i = \int_A^B f(x, y, z) dl$ Si la curva C esta

definida en el plano xy , entonces esta integral toma la forma: $\int_A^B f(x, y) dl$

La integral de línea $\int_A^B f dl$ la llamamos segunda forma escalar de la integral de línea.

Propiedades de la integral de línea en la 2 forma escalar

PROPIEDAD 0.0.1 .

1) La integral de línea sobre la curva C no depende del sentido de recorrido de la misma, o sea, el cambio de orientación no altera el valor de la integral, es decir: $\int_A^B f dl = \int_B^A f dl$
"Cambio de Orientación"

2) Si para cada una de las funciones f y g existe la integral de línea a lo largo de la curva C desde A hasta B y $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, entonces: $\int_A^B [\alpha f + \beta g] dl = \alpha \left[\int_A^B f dl \right] + \beta \left[\int_A^B g dl \right]$
"Linealidad"

3) Si una curva C esta formada por dos partes AD y DB y para la función f existe una integral curvilínea sobre AB ó C , entonces:

$$\int_A^B f dl = \int_A^D f dl + \int_D^B f dl$$

"Aditividad"

4) Si $f \geq 0$ en una curva C , entonces:

$$\int_A^B f dl \geq 0$$

"Permanencia del Signo"

5) Si f es integrable en C , entonces $|f|$ también lo es y

$$\left| \int_A^B f dl \right| \leq \int_A^B |f| dl$$

se llama "Módulo"

Cálculo de la integral en la segunda forma escalar.

Ya conocemos que dada una curva plana de la forma $y = g(x)$; $a \leq x \leq b$, donde $g(x)$ es continuamente derivable en $[a, b]$, la longitud de arco de esta curva del punto $(a, g(a))$ al pto $(b, g(b))$ se calcula mediante la integral

$$l = \int_a^b \sqrt{1 + (g(x'))^2} dx$$

También conocemos que si la curva está dada por sus ecuaciones paramétricas $\{x = x(t), y = y(t), z = z(t), a \leq t \leq b\}$ esta fórmula toma la forma: $l = \int_A^B \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2} dt$

De la misma forma si la curva C está definida en el espacio \Re por sus ecuaciones

$X = x(t), Y = y(t), Z = z(t)$ Donde estas funciones son continuamente derivables en

$[a, b]$ entonces se puede plantear que el diferencial $dl = \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dt}\right)^2} dt$

En la expresión anterior, si t crece, o sea, $dt > 0$ tomaremos $dl = \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dt}\right)^2} dt$ pero si t decrece, o lo que es lo mismo $dt < 0$ entonces es necesario tomar la expresión con signo negativo puesto que la longitud de arco es una magnitud positiva: $dl = -\left(\sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dt}\right)^2} dt\right)$

De manera que la integral de línea $\int_A^B f(x, y, z) dl$ si C viene dada por sus ecuaciones paramétricas $X = x(t), Y = y(t), Z = z(t), a \leq t \leq b$

$$\int_A^B f(x, y, z) dl =$$

$$\int_A^B f(x(t), y(t), z(t)) \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dt}\right)^2} dt,$$

si $t = a$ en A y $t = b$ en B y $a < b$

$$\left[- \int_A^B f(x(t), y(t), z(t)) \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dt}\right)^2} dt \right],$$

$a > b$

[Comentar como queda para el caso de la curva plana en xy].

EJEMPLO 0.0.2 Ejercicio: pág. 337-338 del L/T Orientar E.I y comentarlo como $dl(-)$.

EJEMPLO 0.0.3 Calcular $\int_{(0,0)}^{(1,1)} x dl$ siendo C la recta $y = x$ Parametrizando $x = x$ $dx = dx$, $Y = x, dy = dx$ $dl = \sqrt{\left(\frac{dx}{dx}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} dx = \sqrt{2} dx$ $\int_0^1 x \sqrt{2} dx = \frac{\sqrt{2}}{2}$

$Y=y \quad dy=dx$

Integral de línea en la 1 forma escalar.

Sea C una curva simple, suave a trozos, orientada con un punto inicial A y un punto final B .

Sea $f(x, y, z)$ una función vectorial cuyas funciones componentes son $P(x, y, z), Q(x, y, z), R(x, y, z)$ definida y acotada sobre la curva C , o sea,

$$\vec{F}(x, y, z) = P(x, y, z)\vec{i} + Q(x, y, z)\vec{j} + R(x, y, z)\vec{k}$$

Aplicando el mismo procedimiento de dividir la curva C mediante una partición $A = A_0, A_1, \dots, A_n = B$, donde las coordenadas de cada punto son $(X_0, Y_0, Z_0), \dots, (X_n, Y_n, Z_n)$ respectivamente, tomamos en cada uno de los arcos elementales

$A_{i-1}A_i$, de manera arbitraria un punto

$$(\alpha_i, \beta_i, \gamma_i) = P_i \text{ y formemos la suma } \sum_{i=1}^n [P(\alpha_i, \beta_i, \gamma_i)\Delta x_i + Q(\alpha_i, \beta_i, \gamma_i)\Delta y_i + R(\alpha_i, \beta_i, \gamma_i)\Delta z_i]$$

donde $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$ (proyección del arco $A_{i-1}A_i$ en el eje X)

$\Delta y_i = y_i - y_{i-1}$ (proyección del arco $A_{i-1}A_i$ en el eje Y)

$\Delta z_i = z_i - z_{i-1}$ (proyección del arco $A_{i-1}A_i$ en el eje Z)

Sea Δl la longitud del mayor de los arcos elementales. Si \exists y es finito el

$$\lim_{\Delta l \rightarrow 0} \left[\sum_{i=1}^n [P(p_i)\Delta x_i + Q(p_i)\Delta y_i + R(p_i)\Delta z_i] \right]$$

Entonces este límite se llama integral de línea de la función $f(x, y, z)$ sobre la curva C desde A hasta B y se denota:

$$\int_A^B [P(x, y, z)dx + Q(x, y, z)dy + R(x, y, z)dz]$$

Esta integral se denomina integral de línea de f en C desde el punto A hasta el punto B en su primera forma escalar.

Si la curva C está dada en el plano xy entonces obtenemos:

$$\int_A^B [P(x, y, z)dx + Q(x, y, z)dy]$$

Integral de línea de forma vectorial: Si en la integral de línea en la primera forma escalar donde P, Q, R son las funciones componentes de la función vectorial (campo vectorial)

$$\vec{F}(x, y, z) = P(x, y, z)\vec{i} + Q(x, y, z)\vec{j} + R(x, y, z)\vec{k}$$

La curva C está dada mediante función vectorial:

$\vec{r}(t) = x(t)\vec{i} + y(t)\vec{j} + z(t)\vec{k}$ entonces la integral de línea puede escribirse como:

$$\int_A^B [P(x, y, z)dx + Q(x, y, z)dy + R(x, y, z)dz] = \int_A^B [P\vec{i} + Q\vec{j} + R\vec{k}][dx\vec{i} + dy\vec{j} + dz\vec{k}] = \int_A^B \vec{F} \cdot d\vec{r}$$

donde $d\vec{r} = dx\vec{i} + dy\vec{j} + dz\vec{k}$

Esta integral se denomina integral de línea de forma vectorial.

PROPIEDAD 0.0.2 Las propiedades de la integral de línea en su primera forma escalar y en su forma vectorial se mantienen al igual que para la segunda forma escalar excepto la propiedad de cambio de orientación.

En este caso, el valor de la integral depende del sentido en que se recorra la curva, o sea, Si f es un campo vectorial definido y acotado sobre una curva C , siendo A y B los puntos de C entonces;

$$\int_A^B \overline{F} \cdot d\overline{r} = - \left[\int_B^A \overline{F} \cdot d\overline{r} \right]$$

Este resultado era de esperarse, puesto que en una integral de línea con respecto a x, y ó z , la proyección de un arco de curva dado sobre uno de los ejes coordenadas depende de la dirección en que se toma dicho arco y cambia de signo cuando esta dirección cambia.

Cálculo de la integral de línea en la primera forma escalar.

Utilizaremos la presentación paramétrica de la curva C y consideremos primero el procedimiento para calcular una integral de la forma:

$$\int_A^B f(x, y, z) dx ; \text{ luego la extenderemos a la forma}$$

$$\int_A^B [P(x, y, z)dx + Q(x, y, z)dy + R(x, y, z)dz]$$

El procedimiento viene expresado por el siguiente TEOREMA.

TEOREMA 0.0.1 Sea C una curva dada por $X = x(t) Y = y(t) Z = z(t)$ Si $f(x, y, z,)$ es continua a lo largo de C y $x(t), y(t), z(t)$ tienen primeras derivadas continuas con respecto

$$\text{a } t, \text{ entonces } \int_A^B f(x, y, z) dx = \int_a^b f(x(t), y(t), z(t)) x'(t) dt$$

Donde $t = a$ en A y $t = b$ en B .

Orientar E.I Demostración en la pág. 326 LT.

Para la integración con respecto a "y" y a "z" se obtienen fórmulas similares. Así pues, la integral de línea en la primera forma escalar se calcula mediante la integral definida que se muestra a continuación.

$$\int_A^B Pdx + Qdy + Rdz = \int_a^b [P(x(t), y(t), z(t))x'(t) + Q(x(t), y(t), z(t))y'(t) + R(x(t), y(t), z(t))z'(t)] dt$$

Comentar qué hacer para llegar a esta expresión dadas la integral de línea en la primera forma escalar y la curva C en forma paramétrica, comentar además, como queda esta fórmula en el plano xy y el caso particular cuando en este plano la curva C está dada por la ecuación explícita $y = y(x)$, para $a \leq x \leq b$, aquí puede considerarse x como un parámetro, sustituyendo a t , es decir las ecuaciones paramétricas de C serán: $x = xy = y(x)$ para $a \leq x \leq b$. Y la integral queda:

$$\int_A^B Pdx + Qdy = \int_a^b [P(x(t), y(t), z(t))x'(t) + Q(x(t), y(t), z(t))y'(t)] dx$$

(explicar como queda si se toma "y" como parámetro)

Como la integral de línea en forma vectorial se obtiene por la igualdad:

$$\int_A^B \overline{F} \cdot d\overline{r} = \int_A^B Pdx + Qdy + Rdz$$

Su cálculo se reduce al de una integral de línea en la primera forma escalar .

EJEMPLO 0.0.4 Ej. Comentar ejercicio LT pág. 331

Calcular $\int_{(0,3)}^{(3,0)} \bar{F} d\bar{r}$ siendo $\bar{F} = (y^2 - x^2)\bar{i} + 3x\bar{j}$ y C es la curva $y = 3 - x$

Respuesta:

$$\int_{(0,3)}^{(3,0)} \bar{F} d\bar{r} = -\left(\frac{27}{2}\right)$$

Conclusiones:

En esta conferencia se analizó un nuevo tipo de integral, más general que la integral definida.

Esta integral puede venir dada por la 1 y 2 formas escalares, pero también se pueden calcular si la función del integrando es un campo vectorial (función vectorial).

Para desarrollar este tema fue necesario estudiar la clasificación de curvas:

- Curvas Simples.
- Curvas Orientadas
- Curvas cerrada simple
- Curva suave
- Curva rectificable.

Integrales de Línea:

- Integrales de Línea en la 1 forma escalar
- Integrales de Línea en la 2 forma escalar - Integrales de Línea en forma vectorial.

Preguntas de control:

1. ¿Cómo calcular la long de arco de una curva?
2. ¿Qué relación existe entre la integral de línea de forma vectorial y la que viene dada en 1 forma escalar?.

Orientar E.I Aplicaciones de la integral de línea.

La próxima actividad será sobre un Teorema que facilita muchos cálculos .

La integral de línea (Teorema de Greem).

Ej.1, 2, 31, 51, 52 (pág. 428 a 434)