

CONFERENCIA 1: INTEGRAL INDEFINIDA.®

Conferencia 1: Integral indefinida.

Temática:

Definición de integral indefinida. Interpretación geométrica. Uso de tablas. Método de sustitución.

Objetivos:

1. Definir integral indefinida.
2. Interpretar el concepto de integral indefinida.
3. Reconocer la utilización de tablas como medio de calcular integrales.
4. Conocer el método de sustitución para el cálculo de integrales.

Introducción:

Analizar con los estudiantes que durante el semestre estudiarán el cálculo integral.

Dar a conocer el sistema de evaluación y cómo se continuará utilizando el SOFTWARE DERIVE.

Desarrollo:

En muchos problemas de la ciencia y la técnica conocemos la derivada de una función, pero la solución del problema exige que se determine cuál es la función.

Por ejemplo, conocida la velocidad instantánea de la partícula cuyo movimiento está descrito por $s = s(x)$ es $V = \frac{ds}{dt}$

¿Cómo obtener la ecuación de la trayectoria de la partícula $s = s(t)$?

Observe que en este caso se nos plantea el problema inverso al que estudiamos en el primer semestre. Este proceso se conoce con el nombre de integración y que dará inicio al estudio del cálculo integral cuyas premisas nos vienen de la época de Newton y Leibnitz como una necesidad derivada de la magnitud variable de Descartes que provocó un viraje en las matemáticas, y la incorporación a éstas del movimiento y la dialéctica como en tal sentido fue apreciado por Engels en su dialéctica de la naturaleza.

Leonardo Euler (1707-1783) desempeñó un papel de primer orden en la formulación general y sistemática del Cálculo Integral, haciendo un amplio aporte, baste señalar que los textos actuales (200 años después) son sólo modificaciones del tratado de Euler, sólo renovaciones en lo relativo al lenguaje, incluso los métodos de integración alcanzaron su nivel actual en la segunda mitad del siglo XVIII.

En esencia en la conferencia nos plantearemos el siguiente problema:

Dada una función f ¿Existe F tal que $F' = f$?, si \exists como obtener F ? Planteémonos esta pregunta con la función $f(x) = 2x$.

Sea $f(x) = 2x$ ¿Podemos encontrar una función F tal que: $f(x) = F'(x)$?

$\mathbb{R} / x^2, x^2 + 1, x^2 + 2, x^2 + \sqrt{2}, \dots$

Observe que no es única la función, sino que hay un conjunto de funciones de la forma $F(x) = x^2 + c$ que satisface la condición: $F'(x) = f(x)$

Este análisis lo concluimos con la siguiente :

DEFINICIÓN 0.0.1 10,1 pág 110. *Tomo II (rojo): Se dice que una función $F(x)$ es una primitiva de otra función $f(x)$ en un cierto intervalo I si para todo punto x de dicho intervalo, se tiene que $F'(x) = f(x)$*

. Con el análisis que intuitivamente realizamos en el ejemplo, realizaremos la siguiente pregunta.

Si F_1 , es una primitiva de f , ¿ bajo qué condiciones F_2 será una primitiva de f en $]a, b[$? La respuesta está en el siguiente teorema.

TEOREMA 0.0.1 10.1 pág, 111. *Dos funciones $F_1(x)$ y $F_2(x)$ son primitivas de una función $f(x)$ en un cierto intervalo $I \iff \exists$ una constante c tal que $F_2(x) = F_1(x) + C \quad \forall x \in I$*

Demostración: Sea F_1 una primitiva de f en $]a, b[$ y supongamos F_2 otra primitiva de f en el mismo intervalo, entonces $\forall x \in]a, b[\quad F_1' = f(x) = F_2'$

entonces: $(F_1 - F_2)'(x) = F_1' - F_2' = f(x) - f(x) = 0 \therefore F_1 - F_2$ es una constante. en el intervalo

l.q.q.d

Obtengamos junto a los estudiantes algunas primitivas.

$$1. f(x) = \cos x \longrightarrow F(x) = \sin x + c$$

$$2. g(x) = x^2 - 1 \longrightarrow G(x) = \frac{x^3}{3} - x + c$$

$$3. h(t) = e^t \longrightarrow H(t) = e^t + c$$

$$4. k(u) = 1 \longrightarrow K(u) = u + c$$

¿ Toda función tiene primitivas en un intervalo?

No, por ejemplo $\frac{1}{x-1}$ en el intervalo $] - 2; 2[$.

Entonces es necesario analizar una condición suficiente para la existencia de primitivas en un intervalo.

Si $f(x)$ es continua en I , entonces \exists una primitiva de $f(x)$ en dicho intervalo.

Ahora podemos dar una definición muy importante, relacionada con este concepto de primitiva.

DEFINICIÓN 0.0.2 *Definición de integral indefinida. (10.2 pág 113)*

Si $f(x)$ posee una primitiva en un cierto intervalo I , el conjunto de todas las primitivas de $f(x)$ (en I) se denomina integral indefinida de $f(x)$ (en I) y se denota por el símbolo $\int f(x)dx$.

Esto lo expresamos

$$\int f(x)dx = F(x) + c$$

, c constante arbitraria.

\int integral (introducido por Leibnitz (1646-1716)

$f(x)$ integrando.,

dx diferencial de la variable respecto a la cual buscamos la primitiva (conjunto de ellas);

o sea,

$$\int f(x)dx = \int dF(x) = \int F'(x)dx$$

Como ocurre con otras notaciones, el símbolo x se puede sustituir por otra letra cualquiera.

$$\int f(x)dx, \int f(y)dy, \int f(t)dt$$

. Sin embargo en el caso en que el integrando contenga diferentes símbolos, el diferencial nos indicará cual de ellos se considera variable de integración, las demás letras se consideran constantes.

Observe este caso: $f(x) = 2xyz$, si deseamos hallar el conjunto de primitivas respecto a X , entonces "y" y "z" son constantes. $\int 2xyzdx = yz \int 2xdx = 2yz \frac{x^2}{2} + c = x^2yz + c$

$$\int 2xyzdy = 2xz \int ydy = 2xz \frac{y^2}{2} + c = y^2xz + c$$

$$\int 2xyzdz = 2xz \int zdz = z^2xy + c$$

Como se observa todos los resultados son diferentes. Retomemos el ejemplo inicial.

$$f(x) = 2x \quad \int 2xdx = x^2 + c$$

¿Cómo podemos caracterizar geoméricamente el conjunto de todas las primitivas de f ?

Int. geoméricamente.

La integral indefinida se puede interpretar geoméricamente como una familia de curvas cada una de las cuales se obtiene por el desplazamiento de una de ellas a través del eje y (paralelamente al eje x)

PROPIEDAD 0.0.1 *Propiedades de integral indefinida (Teorema 10.3 pág 118-119), (colorario 10.4 y 10.5 pág 119), (teorema 10.2, pág 115)*

1. Si $a, b \in \mathbb{R} \implies f, g$ son integrables. $\int (af(x) + bg(x))dx = a \int f(x)dx + b \int g(x)dx$
(linealidad)

2. $\int df(x) = \int f'(x)dx = f(x) + c$ siendo f derivable.

3. $d \int f(x)dx = f(x)dx$

Observen que: $\int f(x)g(x)dx \neq \int f(x)dx \int g(x)dx$

¿Cómo calcular la integral indefinida de una función?

Fórmulas de integración inmediata.

De la definición se deduce que para hallar $\int f(x)dx$ es necesario encontrar una función F tal que $F'(x) = f(x)$ Por tanto, toda fórmula de derivación engendra una fórmula de integración, las más frecuentes son:

Pág 116-117 del texto (primeras de la tabla) hablar de como trabajar con ellas y comentar algunas .

Veamos dos ejemplos:

EJEMPLO 0.0.1

$$\int (2x^3 + x^2 + 3)dx = 2\frac{x^4}{4} + \frac{x^3}{3} - 3x + c$$

$$\int \frac{\cos^2 x}{\sin x + 1} dx = \int \frac{1 - \sin^2 x}{\sin x + 1} dx$$

$$\int (1 - \sin x) dx = x + \cos x + c$$

Método de integración por sustitución

Se fundamenta en el siguiente teorema:

TEOREMA 0.0.2 10.6 pág 154. Sea $F(x)$ una primitiva de $f(x)$ en el intervalo I_x y sea $X = \varphi t$ una función con derivada continua en el intervalo I_t tal que $\varphi(I_t) \subset I_x$, entonces una primitiva de la función $f(\varphi(t)) \cdot \varphi(t)' dt$ en el int. I_t , es la función $F(\varphi(t))$ es decir:

$$\int f(\varphi(t)) \cdot \varphi(t)' dt = \int f(x) dx = F(\varphi(t)) + c$$

es decir; $x = \varphi(t)$ $dx = d(\varphi(t))$ $dx = \varphi(t)' dt$

Comentar el teorema, auxiliándonos de la regla de la cadena. El método se utiliza en dos variantes.

I.- Si deseamos calcular $\int f(\varphi(x)) \cdot \varphi(x)' dx$ y podemos realizar la sustitución $u = \varphi(x)$ por lo que $du = \varphi(x)' dx$, entonces nos queda $\int f(u) du$. Al analizar este análisis debe enfatizarse en que el método es útil siempre que $\int f(u) du$ sea más simple que la inicial.

Al plantear $f(u) du$ sólo puede quedar la nueva variable

II). Si deseamos calcular $\int f(x) dx$ escogemos la sustitución $x = \varphi(t)$ donde $dx = \varphi(t)' dt$ y nos queda

$$\int f(\varphi(t)) \cdot \varphi(t)' dt$$

EJEMPLO 0.0.2

$$1. \int (3 + \sin x)^3 \cos x dx = \int u^3 du = \frac{(3 + \sin x)^4}{4} + c$$

$$u = 3 + \sin x \quad du = \cos x dx$$

$$2. \int \frac{x-1}{\sqrt{1-x^2}} dx = \int \frac{(\sin t - 1) \cos t}{\sqrt{1 - \sin^2 t}} dt = \int \frac{(\sin t - 1) \cos t}{\sqrt{\cos^2 t}} dt =$$

$$\int (\sin t - 1) dt = -\cos \arcsin x - \arcsin x + c = -\sqrt{1-x^2} - \arcsin x + c$$

$$x = \sin t \quad dx = \cos t dt \quad \text{ó} \quad t = \arcsin x$$

$$\cos t = \sqrt{1 - \sin^2 t} = \sqrt{1 - \sin^2(\arcsin x)} = \sqrt{1 - x^2}$$

Conclusiones:

¿ Cuándo se dice que F es una primitiva de f en $]a, b[$?

¿ Cómo calcular? $\int e^{2x} dx$

Orientar E.I Calcule:

$$1. \int \frac{\sqrt{x} - x^3 e^x + x^2}{x^3} dx$$

$$2. \int \frac{\sqrt{x^2 - 4}}{x} dx \text{ F.118}$$

$$3. \int \frac{dx}{(x^2 + 1)(\sqrt{x^2 - 1})} \text{ F.148}$$

$$4. \int x^3 (\ln x)^2 dx \text{ F.293}$$

$$5. \int \frac{\cos^6 x}{\sin^5 x} dx \text{ F.231}$$