

CONFERENCIA 3: INTEGRAL DEFINIDA.®

Conferencia 3: Integral Definida.

Temática:

Concepto de Integral definida. Interpretación Geométrica y económica. Condición de Integrabilidad. Propiedades. Teoremas fundamentales. Cambio de variable en una Integral Definida.

Objetivos:

1. Definir el concepto de Integral Definida.
2. Interpretar geométrica y económicamente la Integral Definida.
3. Reconocer las condiciones de integrabilidad.
4. Reconocer las propiedades y teoremas fundamentales.

Introducción:

Aunque por razones didácticas la Integral Definida se estudia después de la derivada y de la Integral Indefinida, el surgimiento histórico de este concepto no siguió exactamente este orden.

La razón fundamental que propició el origen de la Integral Definida fue la necesidad de calcular áreas de regiones cuyos contornos no estaban formados totalmente por segmentos de rectas, y el cálculo de volúmenes de cuerpos que no estaban limitados solamente por superficies planas.

Es conocido que con anterioridad al año 400 a.n.e. ya en la Antigua Grecia se resolvieron algunos de éstos problemas, empleando los llamados métodos de cuadratura y de exhaución.

En particular Arquímedes (287-212 a.n.e) alcanzó un éxito notable en este sentido, aunque los principales resultados de su trabajo permanecieron perdidos hasta principios del Siglo XX.

Pasaron muchos años después sin que se produjeran resultados relevantes al respecto, hasta que el astrónomo matemático alemán J. Kepler (1571-1630) trabajó intensamente en el cálculo del volumen de 92 tipos de toneles. Otros matemáticos como Fermat, Pascal, etc., realizaron trabajos muy meritorios.

Sin embargo los métodos que se utilizaban hasta ese momento eran muy particulares, difíciles y laboriosos.

Fue el descubrimiento de la relación existente entre el cálculo diferencial y el cálculo integral, lo que permitió el surgimiento de una metodología general para el cálculo de áreas, volúmenes e infinitud de problemas más que presentan características similares.

Este descubrimiento trascendental en la historia de la Matemática, facilitó la creación de una secuencia de pasos lógicos para el cálculo de una Integral Definida.

El honor de haber hecho este descubrimiento la tuvieron el físico y matemático inglés Isacc Newton (1642-1727) y el filósofo matemático alemán Leibnitz (1646-1716) quienes de forma independiente llegaron al mismo resultado.

Con los trabajos de Riemann (1826-1866) alemán y Cauchy (1789-1857) inglés toma su forma actual.

Desarrollo:

Consideremos una figura plana $aABb$ acotada por la gráfica de la función continua y positiva $y = f(x)$, el segmento $[a, b]$ del eje de las x y por las rectas $x = a, x = b$, denominándose trapecio curvilíneo.

Ejemplifiquemos con $y = x^2$.

Mostremos el procedimiento para calcular aproximadamente esta área.

Partimos el segmento $[1, 2]$ en 4 partes por medio de los puntos $a = 1 < 1,25 < 1,50 < 1,75 < 2 = b$.

En todo segmento parcial $[x_{i-1}, x_i]$ tomemos un punto arbitrario $\xi, (x_{i-1} \leq \xi_i \leq x_i)$ y construyamos rectángulos de base $[x_{i-1}, x_i]$ y altura igual a $f(\xi_i), i = 1, 2, \dots, n$.

El área de ΔL_i de éstos rectángulos será igual a $\Delta x_i = x_i - x_{(i-1)}$

Como resultado obtenemos una figura "escalonada" compuesta de un rectángulo.

Su área φ_n será igual a la suma de las áreas de estos rectángulos.

$$L_n = f(\xi_1)\Delta x_1 + f(\xi_2)\Delta x_2 + \dots + f(\xi_n)\Delta x_n = \sum_{i=1}^n f(\xi_i)\Delta x_i$$

suma integral.

En el ejemplo que estamos analizando $y = x^2$ en $[1, 2]$, tomemos $\Delta x = 0,25$

$$\sum_{i=1}^n f(\xi_i)\Delta x_i = (1,44)(0,25) + (1,96)(0,25) + (2,56)(0,25) + (3,24)(0,25) = 2,3$$

El área del trapecio curvilíneo es aproximadamente igual a $2,3u^2$.

¿Cómo creen ustedes será posible obtener una mejor aproximación del área de la región? si partimos el segmento $[a, b]$ en partes cada vez más pequeñas de tal modo que el número de los segmentos parciales aumenten y sus longitudes disminuyan, entonces, la figura "escalonada" se diferenciará cada vez menos del trapecio curvilíneo $aABb$.

La norma de partición pse define como el mayor de los valores x_i se denota por $n(p) = \max x_i, i = 1, 2, \dots, n$. Cuando $n(p) \rightarrow 0$ el número de segmentos parciales crece infinitamente y las longitudes Δx_i de todos los segmentos $\rightarrow 0$, puesto que $0 \leq \Delta x_i \leq n(p), \forall i = 1, \dots, n$.

Si existe el límite finito L del área de la figura escalonada cuando $N(p) = \max \Delta x_i \rightarrow 0, 1 \leq i \leq n$, Entonces lo tomamos por el área del trapecio curvilíneo $aABb$, o sea

$$L = \lim_{N(p) \rightarrow 0} L = \lim_{N(p) \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(\xi_i)(\Delta x_i)$$

Este límite, si existe no depende del modo de la partición del segmento $[a, b]$ en segmentos parciales $[x_{i-1}, x_i]$ y del modo de elección del punto ξ_i en ellos.

De esta manera el problema de hallar el área del trapecio curvilíneo $aABb$ nos ha llevado al cálculo del límite del tipo

$$\lim_{n(p) \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(\xi_i)(\Delta x_i)$$

(1)

Entonces en el ejemplo que hemos analizado $f(x) = x^2$ en $[1, 2]$. Dividamos el intervalo en n partes, en este caso iguales, de donde $\Delta x_i = x_i - x_{i-1} = \frac{2-1}{n} = \frac{1}{n}$ y escojamos un punto ξ_i arbitrarios igual a $1 + \frac{i}{n}$ (extremo superior de cada subintervalo).

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n f(\xi_i)(\Delta x_i) &= \sum_{i=1}^n \left(1 + \frac{i}{n}\right)^2 \frac{1}{n} = \sum_{i=1}^n \left(\frac{1}{n} + \frac{2i}{n^2} + \frac{i^2}{n^3}\right) \\ &= \frac{1}{n}n + \frac{2}{n^2} \sum_{i=1}^n i + \frac{1}{n^3} \sum_{i=1}^n i^2 = 1 + \frac{2}{n^2} \frac{n(n+1)}{2} + \frac{1}{n} \frac{n(n+1)(n+2)}{6} = \frac{14n^2 + 9n + 1}{6n^2} \\ \lim_{n(p) \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(\xi_i)(\Delta x_i) &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{14n^2 + 9n + 1}{6n^2} = \frac{14}{6} = 2,3 \end{aligned}$$

Consideremos el siguiente problema económico:

La función $P(t) = t^2$ establece la productividad del trabajo de un obrero en cualquier instante de tiempo t que se calcula desde el inicio del turno (8 horas) es decir $p(t)$ mide las cantidades de producción por hora de trabajo. Encontrar la producción para la segunda hora de trabajo.

Con este fin, partimos del intervalo de tiempo $[1, 2]$ en n intervalos, mediante una partición $t_0 = 1 < t_1 < t_2 < \dots < t_n = 2$

Supongamos que la productividad $P(t)$ varía poco en todo intervalo $[t_{i-1}, t_i]$ por lo que en este se puede considerar la constante e igual al valor de la productividad en un momento de tiempo $\tau_i \in [t_{i-1}, t_i]$. Entonces la productividad P_i en el tiempo $\Delta t_i = t_i - t_{i-1}$ será aproximadamente igual a $p_i \approx P(\tau_i)\Delta t_i$ y por consiguiente la productividad del trabajo P_n en un intervalo de tiempo dado es

$$P_n = P(\tau_1)\Delta t_1 + \dots + P(\tau_n)\Delta t_n = \sum_{i=1}^n f(\tau_i)\Delta t_i$$

Pasando el límite obtenemos el valor exacto de la productividad y en el ejemplo que planteamos

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{14n^2 + 9n + 1}{6n^2} = \frac{14}{6} = 2,3$$

Es decir en la segunda hora del trabajo la productividad del trabajo del obrero es 2,3. De este modo los dos problemas considerados nos llevan al cálculo de los límites de un mismo tipo (1) y (2) especial. Si estos límites existen se denominan integrales definidas de la función $f(x)$ (o bien $P(t)$) y se denota por el símbolo $\int_a^b f(x)dx$ o bien $\int_a^b p(t)dt$.

Ya estamos preparados para formular las definiciones de función integrables e integral definida.

DEFINICIÓN 0.0.1 *Función integrable:* Una función f definida y acotada en un intervalo $[a, b]$ se dice integrable en dicho intervalo, si sus sumas integrales convergen a un límite finito I , cuando la $n(p) \rightarrow 0$

NOTA 1 *En forma similar a la que utilizamos para demostrar si el límite de una función en un punto si existe es único se puede demostrar que si la función f es integrable el número I , límite de las sumas integrales cuando $N(p) \rightarrow 0$ es único.*

DEFINICIÓN 0.0.2 *Dada una función f integrable en $[a, b]$ al límite $I = \lim_{N(p) \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(\xi_i) \Delta x_i$ lo llamaremos integral definida de $f(x)$ en $[a, b]$ y lo denotaremos*

$$\int_a^b f(x) dx = \lim_{N(p) \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(\xi_i) \Delta x_i$$

a y b son los límites de integración, $f(x)$ integrando. Hemos establecido bajo qué condiciones entendemos que una función f definida y acotada en $[a, b]$ es integrable en dicho intervalo

¿Toda función acotada es integrable?

La respuesta de esta pregunta es negativa, por lo que antes de pretender calcular la integral definida de una función acotada es necesario conocer si la función es integrable o no.

DEFINICIÓN 0.0.3 *Condición de integrabilidad. Toda función continua o que al menos presente un número finito de discontinuidades finitas en dicho intervalo, es integrable en $[a, b]$.*

PROPIEDAD 0.0.1 *Propiedades:*

1. Si f y g son dos funciones integrables. Sea f integrable en $[a, b]$ y $\alpha\gamma\beta \in \mathbb{R} \implies$

$$\int_a^b (\alpha f + \beta g) dx = \alpha \int_a^b f(x) dx + \beta \int_a^b g(x) dx$$

2. Sea f integrable en $[a, b]$ y $a \leq c \leq b \implies$

$$\int_a^b f(x) dx = \int_a^c f(x) dx + \int_c^b f(x) dx$$

3.

$$\int_a^b f(x) dx = - \int_b^a f(x) dx$$

TEOREMA 0.0.1 1. *Segundo Teorema fundamental del cálculo integral: Si f es una función continua en $[a, b]$ y F es una primitiva de f entonces:*

$$\int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a)$$

2. *Primer teorema fundamental: Si la función f es continua en $[a, b]$ y $F(x) = \int_a^x f(t)dt$ entonces F es derivable en $[a, b]$ y $F' = f(x)$ para todo x del $[a, b]$*

EJEMPLO 0.0.1 *Calcular*

1. a) $\int_1^2 x^2 dx = 2, 3$

2. b) $\int_{-1}^1 P(x)dx$ si $P(x) = \begin{cases} 3x^2 + 8x + 5 & -1 \leq x \leq 0 \\ \frac{1}{x+1} & 0 \leq x \leq 1 \end{cases}$ *Respuesta: $2 + \ln 2$*

Cambio de variable en la integral definida:

Sea f una función continua en $[a, b]$ y sea φ una función continua en $[\alpha, \beta]$, tal que $a = \varphi(\alpha) \leq \varphi(t) \leq \varphi(\beta) = b$ para todo t perteneciente al $[\alpha, \beta]$. Si φ tiene derivada continua en el $]\alpha, \beta[$ entonces:

$$\int_a^b f(x)dx = \int_{\alpha}^{\beta} f(\varphi(t))\varphi'(t)dt$$

EJEMPLO 0.0.2 *Calcule:* $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\sec^2 x dx}{\tan(x+1)^2}$

Respuesta:

$u = \tan x + 1$ para $x = 0$ $u = 1$

Respuesta: $\frac{1}{2}$

$du = (\sec x)^2 dx$ $x = \frac{\pi}{2}$ $u = 2$

Conclusiones: Precisar aspectos fundamentales. orientar E.I Ejercicios

16, 17	pág.	1	al	5
1	al	16	pág.	21
8, 9, 12, 13	pág.	22	y	23
4, 7, 14, 15	pág.	22	y	23