

CONFERENCIA 4: SISTEMA DE
COORDENADAS POLARES. CÁLCULO DE
ÁREAS EN COORDENADAS POLARES.®

Conferencia 4: Sistema de coordenadas polares. Cálculo de áreas en coordenadas polares.

Objetivos: Reconocer cómo utilizar el sistema de coordenada polares en el cálculo de integrales y sus aplicaciones.

Introducción

Preguntas iniciales.

1. ¿Cómo usted procedería para calcular $\int_0^1 \frac{dx}{x \ln^3 x}$
2. ¿En qué casos la integral según Riemann puede considerarse como un caso particular de las integrales impropias?

Desarrollo

El propósito de nuestra conferencia es estudiar el sistema de coordenadas polares, que fue considerado por primera vez por el matemático suizo Jacobo Bernoulli (1654-1705). La idea de este sistema es muy sencilla, ilustraremos por qué debemos considerar este sistema con el siguiente ejemplo:

EJEMPLO 0.0.1 *Supongamos que una pieza de artillería debe eliminar cierto objetivo que se encuentra fuera del alcance de la vista de los que sirven esta pieza. Este problema se resuelve si se le indica a los apuntadores a qué distancia y a qué dirección se encuentra el objetivo.*

Si se considera que la pieza de artillería se encuentra en el centro de una familia de circunferencias concéntricas y a partir de dicho centro se trazan rayos:

El problema queda resuelto en cuanto se les informe a los apuntadores:

¿sobre cuál de estas circunferencias y sobre cuál de los rayos se encuentra el objetivo?

La circunferencia quedará determinada en cuanto se dé su radio (la distancia hasta el objetivo) mientras que el rayo se puede especificar mediante un ángulo que se mida a partir de un rayo que se considera fijo desde el principio.

De tal forma, que, tomando como centro del plano el lugar en que se encuentra la pieza de artillería, todo otro punto quedará determinado por números positivos y un ángulo.

El gráfico recuerda la proyección polar con las que en geografía se representan los alrededores de los polos de la tierra. De aquí el nombre de coordenadas polares, el cual es precisamente el objetivo de estudio de la clase de hoy.

El sistema de coordenadas polares está constituido por una semirrecta fija llamada eje polar y por un punto fijo llamado polo.

Además se utiliza la unidad de longitud para medir la distancia del polo a un punto dado. Las coordenadas de un punto P del plano son la longitud del segmento \overline{OP} y el ángulo θ formado por el eje polar y el segmento \overline{OP} , o sea, $P(\rho, \theta)$ donde:

ρ : longitud del segmento \overline{OP} , se le denomina radio vector.

y $\rho \geq 0$

θ : ángulo formado por el eje polar con el segmento \overline{OP} y se denomina argumento o ángulo vector del punto P.

Este se mide en radianes, considerando el eje polar como lado inicial y \overline{OP} como lado final del ángulo θ es "+" si se mide en sentido contrario a las manecillas del reloj y "-" si se mide en el sentido de las manecillas del reloj.

El polo tiene coordenadas $(0, \theta) \forall \theta$.

Para situar un punto $P(\rho, \theta)$.

1. Situar un ángulo θ a partir del eje polar, según el convenio de signos establecidos.
2. Situar el radio vector ρ , tomando a partir del polo un segmento de longitud ρ .

EJEMPLO 0.0.2 *Situar los puntos:* $P_1(2, \frac{\pi}{4})$, $P_2(1, -\frac{\pi}{2})$, $P_3(3, 3\frac{\pi}{2})$, $P_4(2, 9\frac{\pi}{4})$, $P_5(2, \frac{\pi}{3})$

Obsérvese que en general cada par de valores (ρ, θ) , determinan un único punto P del plano, sin embargo un punto P puede ser expresado por varios pares de valores (ρ, θ) .

Ej. $(P_1 y P_4)$. En general, cualquier punto P puede expresarse por los pares $P(\rho, \theta + 2k\pi), k \in \mathbb{Z}$

Relaciones entre el sistema de coordenadas cartesianas y el sistema de coordenadas polares.

Hagamos coincidir el origen del sistema cartesiano con el polo del sistema polar. Sea P un punto cualquiera en coordenada $P(x, y)$ y coordenadas polares $P(\rho, \theta)$. Entonces:

$$\begin{aligned} \cos \theta &= \frac{\text{cat.ady.}}{\text{hip}} & \cos \theta &= \frac{x}{\rho} \\ \sin \theta &= \frac{\text{cat.opuesto}}{\text{hip}} & \sin \theta &= \frac{y}{\rho} \end{aligned}$$

de donde:

$$x = \rho \cos \theta \quad y = \rho \sin \theta$$

fórmula de transformación del sistema coordenadas polares a sistemas cartesianos.

$$\text{Por otra parte: } x^2 = \rho^2 \cos^2 \theta \quad y^2 = \rho^2 \sin^2 \theta$$

$$x^2 + y^2 = \rho^2 \cos^2 \theta + \rho^2 \sin^2 \theta$$

$$\rho = \sqrt{x^2 + y^2}$$

$$\frac{y}{x} = \frac{\rho \sin \theta}{\rho \cos \theta} = \tan \theta$$

Fórmula para obtener ρ , y , θ a partir de las coordenadas (x, y) del punto P.

EJEMPLO 0.0.3

1) *Determinar las coordenadas cartesianas del punto $P(3, \frac{3\pi}{2})$*

$$x = \rho \cos \theta = 3 \cos \frac{3\pi}{2} = 3 \cdot 0 = 0$$

$$y = \rho \sin \theta = 3 \sin \frac{3\pi}{2} = 3 \cdot (-1) = -3$$

$$P(0, -3)$$

2) *Expresa la ecuación $(x^2 + y^2)^2 = x^2 - y^2$ en coordenadas polares.*

$$\rho^4 = \rho^2 \cos^2 \theta - \rho^2 \sin^2 \theta$$

$$\rho^4 = \rho^2 \cos 2\theta$$

$$\rho = \sqrt{\cos 2\theta}$$

Esta ecuación representa la curva conocida como Lemniscata de Bernoulli, cuyas ecuaciones (de acuerdo a su posición) en forma general son:

$$\rho^2 = a^2 \cos 2\theta$$

$$\rho^2 = -a^2 \cos 2\theta$$

$$\rho^2 = a^2 \sin 2\theta$$

$$\rho^2 = -a^2 \sin 2\theta, \text{ con } a \in \mathbb{R}, a > 0$$

E.I Estudiar cardiodes y Lemniscatas (epígrafe 13.5, pág 463 I y II) Ejercicio 13.8 cardioide. Ejercicio 13.9 Lemniscata

Algunas rectas en polares

Ecuaciones en cartesianas y su correspondiente ec. en polares.

$$y = mx \quad \tan \theta = m, \text{ es decir, } \theta = k$$

$$x = p \quad \rho \cos \theta = p$$

ó

$$\rho \cos \theta = -p$$

$$y = p \quad \rho \sin \theta = p$$

ó

$$\rho \sin \theta = -p$$

Algunas circunferencias

$$x^2 + y^2 = a^2 \quad \rho^2 = a^2$$

$$(x - a)^2 + y^2 = a^2 \quad \rho = 2a \cos \theta$$

$$(y - a)^2 + x^2 = a^2 \quad \rho = 2a \sin \theta$$

Área en coordenadas polares

Estudiemos ahora, cómo calcular el área de las regiones limitadas por curvas referidas al sistema de coordenadas polares. Consideremos una curva C dada en coordenadas polares, cuya ecuación es $\rho = f(\theta)$ donde f es una función definida, positiva y continua en $[\alpha, \beta]$

Hacemos una partición de $[\alpha, \beta]$ en subintervalos $[\theta_i, \theta_{i+1}]$ y en cada uno seleccionamos un punto arbitrario φ_i . Consideremos el sector circular de radio $f(\varphi_i)$ y $\angle \triangle \varphi_i = \varphi_{i+1} - \varphi_i$.

El área de cada sector es

$$\triangle A_i = \frac{1}{2} f^2(\varphi_i) \triangle \theta_i, \text{ por lo que la suma integral quedaría ,}$$

$$\sum_{i=1}^n \frac{1}{2} f^2(\varphi_i) \triangle \theta_i \approx A$$

cuando $N_p \rightarrow 0$, el valor del límite converge al valor del área y: $A = \lim_{N_p \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n \frac{1}{2} f^2(\varphi_i) \triangle \theta_i =$

$$\frac{1}{2} \int_{\alpha}^{\beta} f^2 \theta d\theta$$

Ver L.T pág. 485-489. $\triangle A = \frac{1}{2} r^2 \theta$

Ahora bien, si deseamos calcular el área entre dos curvas $\rho = f(\theta)$ y $\rho = g(\theta)$

$$A = \frac{1}{2} \int_{\alpha}^{\beta} (f^2(\theta) - g^2(\theta)) d\theta$$

EJEMPLO 0.0.4

1) Calcular el área de la región:

$$R = \{(\rho, \theta) : \rho \leq 1, \rho \leq 2 \cos \theta\}$$

$$\rho = 1 \quad \rho = 2 \cos \theta \longrightarrow \theta = \frac{\pi}{3}$$

$$A = \frac{1}{2} \int_0^{\frac{\pi}{3}} d\theta + \int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} (2 \cos \theta)^2 d\theta$$

Orientar cálculo de la integral.

2) Calcular el área de:

$$R : \{(\rho, \theta) : \frac{3}{2} \sec \theta \leq \rho \leq 2 \cos \theta\}$$

$$\rho = \frac{3}{2 \cos \theta} \longrightarrow \rho \cos \theta = \frac{3}{2} \longrightarrow x = \frac{3}{2}$$

$$2 \cos \theta = \frac{3}{\cos \theta} \implies \cos \theta = \frac{\sqrt{3}}{2} \implies \theta = \pm \frac{\pi}{6}$$

$$A = \frac{1}{2} \int_{-\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{6}} (4(\cos \theta)^2 - \frac{9}{4}(\sec \theta)^2) d\theta = \frac{\pi}{3} - \frac{\sqrt{3}}{4} u^2$$

Conclusiones: Rememorar los aspectos fundamentales y orientar el E:I