

CLASE PRÁCTICA No.17: INTEGRALES
DE SUPERFICIE. FORMA ESCALAR Y
VECTORIAL.®

Clase práctica No.17: Integrales de superficie. Forma escalar y vectorial.

Objetivos: Contribuir al desarrollo de habilidades en la resolución de integrales de superficie tanto en forma escalar como en forma vectorial.

Introducción: Rememorar a través de preguntas con los estudiantes los principales conceptos tratados en la conferencia anterior.

1. Forma vectorial de la integral de superficie.
2. Obtención del ds en dependencia de cómo esté dada la superficie.
3. Propiedades de la integral de superficie
4. Forma escalar de la integral de superficie.
5. Método para calcular esta integral.

Desarrollo:

EJERCICIO 0.1

1 Calcule: $\int \int_S \vec{f} \cdot \vec{n} ds$ si S es la porción del plano $2x + 3y + 6z = 6$ comprendido en el primer octante y $\vec{f} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$.

Considere \vec{n} con componentes positivos.

$R/\varphi = 2x + 3y + 6z - 6$

$$\vec{n} = \frac{\vec{\nabla}\varphi}{\|\vec{\nabla}\varphi\|} = \frac{2\vec{i} + 3\vec{j} + 6\vec{k}}{\sqrt{49}}$$

$$ds = \frac{dxdy}{|\vec{n} \cdot \vec{k}|} = \frac{dxdy}{\frac{6}{7}}$$

$$\int \int_S (x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}) \left(\frac{2}{7}\vec{i} + \frac{3}{7}\vec{j} + \frac{6}{7}\vec{k} \right) \frac{7dxdy}{6} = \int \int dxdy = \int_0^2 dy \int_0^{\frac{6-3y}{2}} dx = 3$$

2 Calcular $\int \int_S x(y+z)ds$ siendo S la superficie $y+z=2$ limitado por el cilindro $x^2+y^2=4$ en el primer octante. Considere \vec{n} con componentes positivos.

$\varphi = y + z - 2$

$$\vec{n} = \frac{\vec{\nabla}\varphi}{\|\vec{\nabla}\varphi\|} = \frac{\vec{j} + \vec{k}}{\sqrt{2}}$$

$$ds = \frac{dxdy}{|\vec{n} \cdot \vec{k}|} = \frac{dxdy}{\frac{1}{\sqrt{2}}} = \sqrt{2}dxdy$$

$$\int \int_S x(y+z)\sqrt{2}dxdy = \int \int 2x\sqrt{2}dxdy = 2\sqrt{2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos\theta d\theta \int_0^2 \rho^2 d\rho = \frac{16}{3}\sqrt{2}$$

3 Calcule $\int \int_S \bar{f} \bar{n} ds$ si S es la superficie de cilindro parabólico $2y = x^2$ comprendido en el primer octante y limitado por $1 \leq z \leq 4, 0 \leq x \leq 2$ y $\bar{f} = \bar{i} - x\bar{j} + 3z\bar{k}$.

Considere \bar{n} con componentes positivos.

$$R/\varphi = x^2 - 2y$$

$$\begin{aligned}\bar{n} &= \frac{\bar{\nabla}\varphi}{\|\bar{\nabla}\varphi\|} \\ &= \frac{2x\bar{i} - 2\bar{j}}{\sqrt{4x^2 + 4}} = \frac{x\bar{i} - \bar{j}}{\sqrt{x^2 + 1}} \\ ds &= \frac{dydz}{|\bar{n} \cdot \bar{i}|} = \frac{dydz}{\frac{x}{\sqrt{x^2 + 1}}}\end{aligned}$$

$$\int \int_S (\bar{i} - x\bar{j} + 3z\bar{k}) \left(\frac{x\bar{i} - \bar{j}}{\sqrt{x^2 + 1}} \right) \left(\frac{\sqrt{x^2 + 1} dx dy}{x} \right) = \int \int \frac{2x}{x} dy dz = 2 \int_1^4 dz \int_0^2 dy = 12$$

NOTA 1 Analizar por qué no proyectar en el plano xy

4 Calcule $\int \int_S \bar{f} \bar{n} ds$ si S es la superficie de cilindro $x^2 + y^2 = 4$ comprendido en el primer octante y limitado por $z = 2, z = 0$ y $\bar{f} = x\bar{i} + y\bar{j} + z^2\bar{k}$.

Considere \bar{n} con componentes positivos.

$$R/\varphi = x^2 + y^2 - 4$$

$$\begin{aligned}\bar{n} &= \frac{\bar{\nabla}\varphi}{\|\bar{\nabla}\varphi\|} = \frac{2x\bar{i} + 2y\bar{j}}{\sqrt{4x^2 + 4y^2}} = \frac{2x\bar{i} + 2y\bar{j}}{2\sqrt{x^2 + y^2}} \\ ds &= \frac{dx dz}{|\bar{n} \cdot \bar{j}|} = \frac{dx dz}{\frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\int \int_S (x\bar{i} + y\bar{j} + z^2\bar{k}) \left(\frac{x\bar{i} + y\bar{j}}{\sqrt{x^2 + y^2}} \right) \left(\frac{\sqrt{x^2 + y^2} dx dz}{y} \right) &= \int \int \frac{x^2 + y^2}{y} dx dz = \\ 4 \int_0^2 dz \int_0^2 \frac{dx}{\sqrt{4 - x^2}} &= 4\pi\end{aligned}$$

5 Calcular $\int \int_s (x^2 + y^2) ds$ siendo S es la porción del cono $x^2 + y^2 = z^2$, para $z \geq 0$ limitado por el cilindro $x^2 + y^2 = 4$ en el primer octante.

Considere \bar{n} con componentes positivos. $R/\varphi = x^2 + y^2 - z^2$

$$\begin{aligned}\bar{n} &= \frac{\bar{\nabla}\varphi}{\|\bar{\nabla}\varphi\|} = \frac{2x\bar{i} + 2y\bar{j} - 2z\bar{k}}{2\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} = \frac{x\bar{i} + y\bar{j} - z\bar{k}}{\sqrt{z^2 + z^2}} \\ ds &= \frac{dx dy}{|\bar{n} \cdot \bar{k}|} = \frac{\sqrt{2} dx dy}{|-z|} = \sqrt{2} \frac{dx dy}{z} = \sqrt{2} \frac{dx dy}{x^2 + y^2}\end{aligned}$$

$$\int \int_S z^2 \frac{\sqrt{2} dx dy}{z} = \sqrt{2} \int \int x^2 + y^2 dx dy = \sqrt{2} \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^2 \rho^3 d\rho = \frac{16}{4}(\sqrt{2})2\pi = 8\sqrt{2}\pi$$

Conclusiones:

En cada ejercicio se habrá hecho énfasis en los aspectos de mayores dificultades.

Insistir en los pasos a seguir para calcular una integral de superficie.

Insistir en las expresiones para calcular el dz en cada plano.

Insistir en que la proyección sobre uno de los planos coordenados tiene que ser una región plana que no puede ser una curva.

Insistir también en que siempre debemos hacer esta proyección de forma tal que la expresión del integrando quede de la forma más sencilla posible.

Orientar E.I pág. 480-487, preparación para la próxima clase mixta.