

CLASE PRÁCTICA No.5: INTEGRAL
DEFINIDA. INTEGRALES IMPROPIAS.®

Clase Práctica No.5: Integral definida. Integrales impropias.

Objetivos:

Contribuir al desarrollo de habilidades para:

1. Resolver integrales definidas aplicando métodos de integración.
2. Determinar la convergencia de las integrales impropias.

Introducción:

Recordar métodos de integración y tipos y vías de solución para las integrales impropias.

Desarrollo:

Se podrán realizar ejercicios como los siguientes

EJERCICIO 0.1

1 Calcule:

$$\bullet \int_0^1 \frac{xdx}{x^2 + 2}$$

Aplicando sustitución

$$u = x^2 + 2 \quad du = 2xdx$$

$$= \frac{1}{2} \int \frac{du}{u} = \frac{1}{2} \ln |u| + c = \frac{1}{2} \ln |x^2 + 2| + c \text{ Entonces } \left[\frac{1}{2} \ln |x^2 + 2| \right]_0^1 = \ln \left(\frac{\sqrt{3}}{2} \right)$$

o cambiando los límites de integración, es decir: $x = 0 \quad u = 2 \quad x = 1 \quad u = 3$

$$\bullet \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 x \cos x dx = \int_0^1 u^2 du = \frac{1}{3}$$

$$\text{con } u = \sin x \quad du = \cos x dx$$

$$\bullet \int_0^1 x \sinh x dx = x \cosh x \Big|_0^1 - \int_0^1 \cosh x dx = 1 \cosh 1 - \sinh x \Big|_0^1 = \frac{1}{e}$$

Analizar que este resultado se ha obtenido de utilizar las igualdades:

$$\cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2} \quad \sinh x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$$

ambas aparecen en la tabla de integrales.

$$\bullet \int_0^{2\pi} x \sin x dx = -x \cos x \Big|_0^{2\pi} + \int_0^{2\pi} \cos x dx = -2\pi + (\sin x) \Big|_0^{2\pi} = -2\pi$$

$$\text{con } u = x \quad du = dx \quad v = -\cos x \quad dv = \sin x$$

2 Calcular el área de la figura limitada por la parábola $y = x^2 - 1$, la recta $x = 2y$ y el eje coordenado "x".

$$\int_1^2 (x^2 - 1) dx = \frac{4}{3} u^2$$

3 Calcular el área de la figura limitada por las rectas $y = x - 1$, $y = 1$ y la curva $y = \ln x$

Calculemos los interceptos

$$y = 1, y = x - 1 \quad x = 2$$

$$y = 1, y = \ln x \quad x = e$$

$$A_r = \int_0^1 (e^y - (y + 1)) dy = e - \frac{5}{2}$$

o por

$$A_r = \int_1^2 ((x - 1) - (\ln x)) dx + \int_2^e (1 - \ln x) dx = e - \frac{5}{2}$$

Podrán realizarse alguno más según el tiempo como:

EJERCICIO 0.2

1) Calcular el área de la figura limitada por $y = e^x$, $y = e^{-x}$ y la recta $x = 1$

Calcule si es posible

EJERCICIO 0.3

$$a) \int_0^4 \frac{dx}{(x-1)^2} = \lim_{b \rightarrow 1^-} \int_0^b \frac{dx}{(x-1)^2} + \lim_{a \rightarrow 1^+} \int_a^4 \frac{dx}{(x-1)^2} =$$

$$-1 - \frac{1}{3} + \lim_{b \rightarrow 1^-} \frac{-1}{(b-1)} + \lim_{a \rightarrow 1^+} \frac{-1}{(a-1)} = +\infty$$

\therefore

Divergente

Se podrán utilizar los análisis gráficos.

$$b) \int_{-\infty}^0 x e^x dx = \lim_{a \rightarrow -\infty} \int_a^0 x e^x dx = \lim_{a \rightarrow -\infty} (x-1)e^x \Big|_a^0 = \lim_{a \rightarrow -\infty} (-1 - (a-1)e^a) = -1$$

ANALIZAR QUE EN ESTE CASO

$\lim_{a \rightarrow -\infty} (a-1)e^a = 0$ es de la forma $0 \cdot \infty$ y al aplicar la regla de L'Hospital se obtiene ese resultado.

$$c) \int_0^{+\infty} \frac{x dx}{(x^2+1)^2} = \lim_{b \rightarrow +\infty} \int_0^b \frac{x dx}{(x^2+1)^2} =$$

$$= \frac{1}{2} \lim_{b \rightarrow +\infty} \frac{-1}{(1+x^2)} \Big|_0^b = \frac{1}{2} \lim_{b \rightarrow +\infty} \frac{-1}{(b^2+1)} + 1 = \frac{1}{2}$$

\therefore

Convergente

$$d) \int_{-\infty}^{+\infty} x^3 e^{-x^4} dx = \lim_{a \rightarrow -\infty} \int_a^0 x^3 e^{-x^4} dx + \lim_{b \rightarrow +\infty} \int_0^b x^3 e^{-x^4} dx =$$

$$= \lim_{a \rightarrow -\infty} \frac{-1}{4} (1 - e^{-a^4}) + \lim_{b \rightarrow +\infty} \frac{-1}{4} (-1 + e^{-b^4}) = 0$$

\therefore

Converge.

$$e) \int_{-1}^{+\infty} \frac{dx}{\sqrt[3]{(4-x)^2}} = \lim_{b \rightarrow 4^-} \int_{-1}^b \frac{dx}{\sqrt[3]{(4-x)^2}} + \lim_{a \rightarrow 4^+} \int_a^5 \frac{dx}{\sqrt[3]{(4-x)^2}} + \lim_{c \rightarrow +\infty} \int_5^c \frac{dx}{\sqrt[3]{(4-x)^2}}$$

NOTA 1 $\int \frac{dx}{\sqrt[3]{(4-x)^2}}$
 Para su solución hacer $t = 4 - x$

\therefore
Divergente

Conclusiones: Precisar dificultades. Orientar E.I y clase práctica en DERIVE.