



GEOMETRÍA: CUBIERTA CONVEXA (CONVEX HULL)

Autores:

Colectivo de Entrenadores ACM-ICPC UM

Diciembre / 2018

ENTRENAMIENTO PARA CONCURSANTES
ACM-ICPC DE LA UNIVERSIDAD DE
MATANZAS

Conocimientos previos

Problema de la cubierta convexa

Aplicaciones

Soluciones

Ejercicios

Conocimientos previos

- ▶ Dada una tripleta ordenada de puntos $\langle p, q, r \rangle$ en el plano, decimos que tienen una orientación positiva si definen un triángulo en sentido contrario a las manecillas del reloj.
- ▶ Tienen una orientación negativa si forman un triángulo en sentido de las manecillas del reloj.
- ▶ Y una orientación cero si son colineales (incluyendo el caso donde dos o más puntos son idénticos)

Conocimientos previos

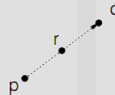
Orientación
positiva



Orientación
negativa



Orientación
cero



Conocimientos previos

- ▶ Dados dos vectores, el ángulo θ entre ellos puede encontrarse:

$$\theta = \cos^{-1} \left(\frac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{\|\vec{u}\| \|\vec{v}\|} \right)$$

- ▶ La desventaja del coseno es que no permite distinguir ángulos positivos de los negativos.

Conocimientos previos

- Por otra parte el seno del ángulo $\theta = \angle pqr$ (el ángulo con signo del vector p-q al vector r-q) puede ser calculado así:

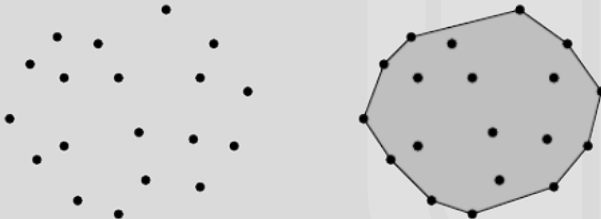
$$\theta = \sin^{-1} \left(\frac{\text{Orient}(q, p, r)}{\|p - q\| \|r - q\|} \right)$$

Conocimientos previos

- ▶ Por tanto: $\text{Orient}(q,p,r) = \overrightarrow{p-q} \cdot \overrightarrow{r-q}$

Problema de la cubierta convexa

- ▶ El día de hoy vamos a estudiar un concepto fundamental en geometría computacional, llamado cubierta convexa.
- ▶ Intuitivamente, una cubierta convexa puede definirse como una banda elástica que rodea una colección de puntos, la cual se ajusta exactamente al contorno de los puntos.



Problema de la cubierta convexa

- ▶ El problema (planar) de la cubierta convexa se define de la siguiente forma
- ▶ Dado un conjunto P de n puntos en el plano, calcular la representación del polígono convexo cerrado que representa la cubierta convexa de P .
- ▶ La representación más simple de una cubierta convexa es la enumeración en el sentido inverso a las manecillas del reloj (⌚) de sus vértices.
- ▶ Idealmente la cubierta convexa debe consistir sólo de los puntos extremos, en el sentido que si tres puntos caen en un vértice de la frontera de la cubierta convexa, entonces el punto medio no debe ser tomado en cuenta como parte de la cubierta.

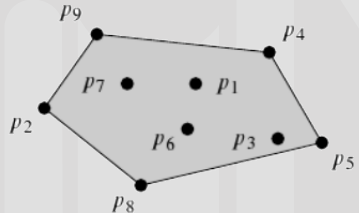
Problema de la cubierta convexa

input = set of points:

$p_1, p_2, p_3, p_4, p_5, p_6, p_7, p_8, p_9$

output = representation of the convex hull:

p_4, p_5, p_8, p_2, p_9



Aplicaciones

- ▶ Es una de las aproximaciones de forma de un conjunto de puntos más simples (otras incluyen rectángulos, círculos, etc.).
- ▶ Puede ser usada para aproximar formas más complejas (cubiertas convexas de polígonos o poliedros).
- ▶ Algunos algoritmos calculan la cubierta convexa como una etapa inicial (preprocesamiento) de su ejecución (filtrar puntos irrelevantes).

Soluciones

- ▶ Aplicando fuerza bruta.
- ▶ Algoritmo Incremental.
- ▶ La Caminata de Jarvis.

Soluciones

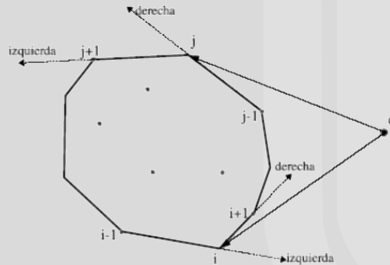
- ▶ Algoritmo QuickHull.
- ▶ Algoritmo de Cubierta Convexa aplicando Técnica de Divide y Vencerás.
- ▶ Algoritmo de Graham o Exploración Graham (Graham Scan).
- ▶ Convex hull (Andrew's Monotone Chain).

Soluciones - Aplicando fuerza bruta

- ▶ Se verifican $n^2 - n$ pares de puntos. Cada par se compara con otros $n - 2$ puntos, lo que toma $O(n^3)$. El paso final toma $O(n^3)$. El tiempo total de ejecución es $O(n^3)$, ¿Podrá hacerse más eficientemente?

Soluciones - Algoritmo Incremental

- Supone el problema resuelto para tamaño n y en cada paso se añade un nuevo punto para resolver $n+1$. Para añadir cada nuevo punto p_{i+1} basta con lanzar tangentes (superior e inferior) desde dicho punto hasta el polígono convexo obtenido en el paso anterior.



Soluciones - Algoritmo Incremental

Orden de ejecución:

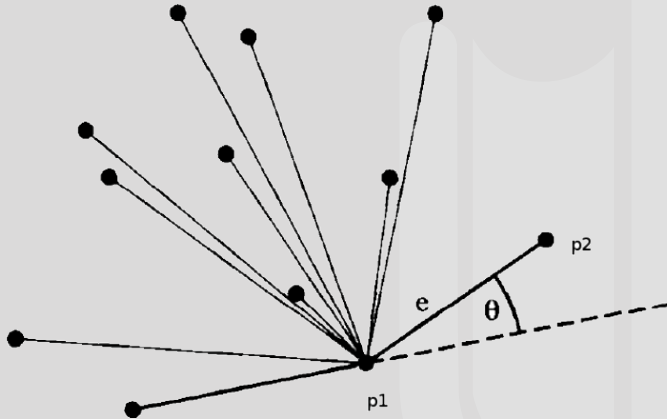
- ▶ La operación de ordenación con coste $O(n \log n)$.
- ▶ Cada uno de los $n-3$ puntos que añaden necesitan calcular las dos tangentes, operación lineal en el peor de los casos.

Aunque se puede mejorar, en el peor de los casos tiene un tiempo de $O(n^2)$.

Soluciones - La Caminata de Jarvis

- ▶ El algoritmo de Caminata de Jarvis también es conocido como el método de *envoltura de regalo*. Dado un conjunto S de n puntos en el plano, supongamos que movemos una línea L recta barriendo el plano hasta que L haga contacto con un punto p_1 de S . El punto p_1 debe estar en la frontera de la cubierta convexa de S dado que hasta ese momento, todos los puntos de S están situados a un lado de la línea L y p_1 sobre la línea.

Soluciones - La Caminata de Jarvis



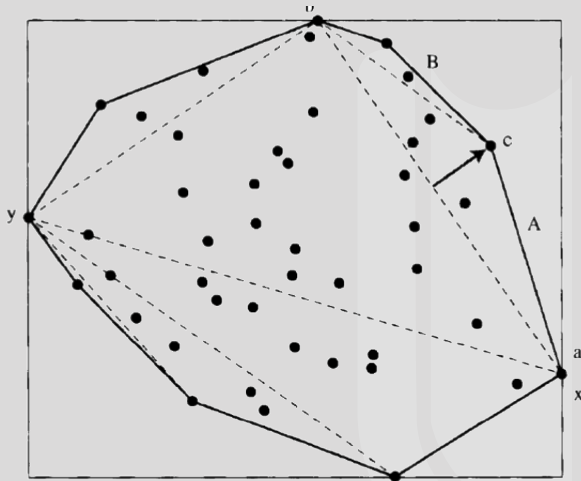
Soluciones - La Caminata de Jarvis

- ▶ El algoritmo de Caminata de Jarvis corren en tiempo $O(kn)$. Notemos que si k es asintóticamente más pequeño que $\log n$ ($o(\log n)$) entonces este algoritmo es mejor que el de Graham, ya que correría en tiempo lineal. Sin embargo, si k es más grande, de manera que $k = O(n)$, entonces la complejidad temporal del algoritmo de Caminata de Jarvis es $O(n^2)$.

Soluciones - Algoritmo QuickHull

- ▶ Al igual que el *QuickSort* corre en tiempo $O(n \log n)$ para entradas favorables pero puede tomar tiempo $O(n^2)$ con datos desfavorables. Sin embargo, a diferencia del *QuickSort*, no hay una forma obvia de convertirlo en un algoritmo aleatorizado con tiempo de ejecución esperado $O(n \log n)$. No obstante, *QuickHull* tiende a desempeñarse muy bien en la práctica.

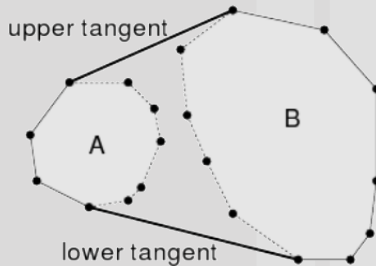
Soluciones - Algoritmo QuickHull



Soluciones - Algoritmo de Cubierta Convexa aplicando Técnica de Divide y Vencerás

- ▶ Algoritmo de orden $O(n \log n)$ el cual está basado en la técnica de diseño conocida como Divide y Vencerás que permite resolver el problema de construcción de la cubierta convexa para un conjunto P de puntos en el plano.
- ▶ Puede ser vista como una generalización del famoso algoritmo de ordenamiento *MergeSort*. El funcionamiento del algoritmo es de la siguiente forma:
 1. Ordenar los puntos en P de acuerdo a su coordenada x .
 2. Particiona el conjunto de puntos P en dos conjuntos A y B , donde A consiste de los $\lceil n/2 \rceil$ puntos con las coordenadas x más pequeñas (izq.) y B los $\lfloor n/2 \rfloor$ puntos restantes (der.).
 3. Calcula recursivamente $H_A = \text{conv}(A)$ y $H_B = \text{conv}(B)$

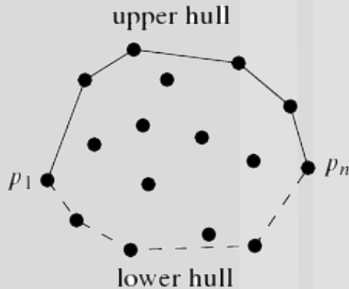
Soluciones - Algoritmo de Cubierta Convexa aplicando Técnica de Divide y Vencerás



Soluciones - Algoritmo de Graham o Exploración Graham (Graham Scan)

- ▶ El algoritmo está basado en un enfoque de solución común para construir estructuras geométricas llamado construcción incremental. En la construcción incremental los objetos (puntos) se agregan uno a la vez, y la estructura (cubierta convexa) se actualiza con cada nueva inserción.
- ▶ Considera el orden de la inserción. Simplifica esto agregando los puntos en algún orden apropiado, en nuestro caso, en orden incremental de la coordenada x .

Soluciones - Algoritmo de Graham o Exploración Graham (Graham Scan)

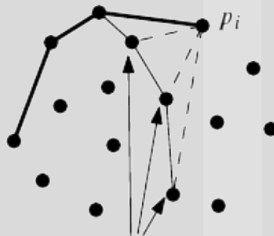


Soluciones - Algoritmo de Graham o Exploración Graham (Graham Scan)

El algoritmo de Graham trabaja de la siguiente forma:

- ▶ Sea p_i el próximo punto que se agregará al ordenamiento de izquierda a derecha de los puntos.
- ▶ Si la tripleta p_i , $H.first$, $H.second$ tiene orientación positiva, entonces podemos simplemente agregar p_i a la pila
- ▶ Sino, se puede inferir que el punto medio de la tripleta $H.first$ no puede estar en la cubierta convexa
- ▶ Por lo tanto lo borramos de la pila.
- ▶ Ésto es repetido hasta alcanzar una tripleta con orientación positiva, o haya menos de dos elementos en la pila

Soluciones - Algoritmo de Graham o Exploración Graham (Graham Scan)



Soluciones - Convex hull (Andrew's Monotone Chain)

- ▶ El algoritmo de Andrew's Chain Monotone es optimización del algoritmo de Exploración Graham para determinar la cubierta convexa. Este caso se halla de manera separada las cubiertas superior e inferior de la cubierta.

Ejercicios

- ▶ COJ 3365 - Guarding Bananas
- ▶ UVA 109 SCUD Busters
- ▶ UVA 218 Moth Eradication
- ▶ UVA 11626 Convex Hull
- ▶ UVA 681 Convex Hull Finding

UNIVERSIDAD DE MATANZAS

cosechando el saber

FIN