

# Mecánica Teórica II

## Conferencia #1

“Cinemática de la partícula en movimiento rectilíneo”

**Profesor: Alejandro González González**  
**e-mail: [alejandro.glez@umcc.cu](mailto:alejandro.glez@umcc.cu)**



# Sumario

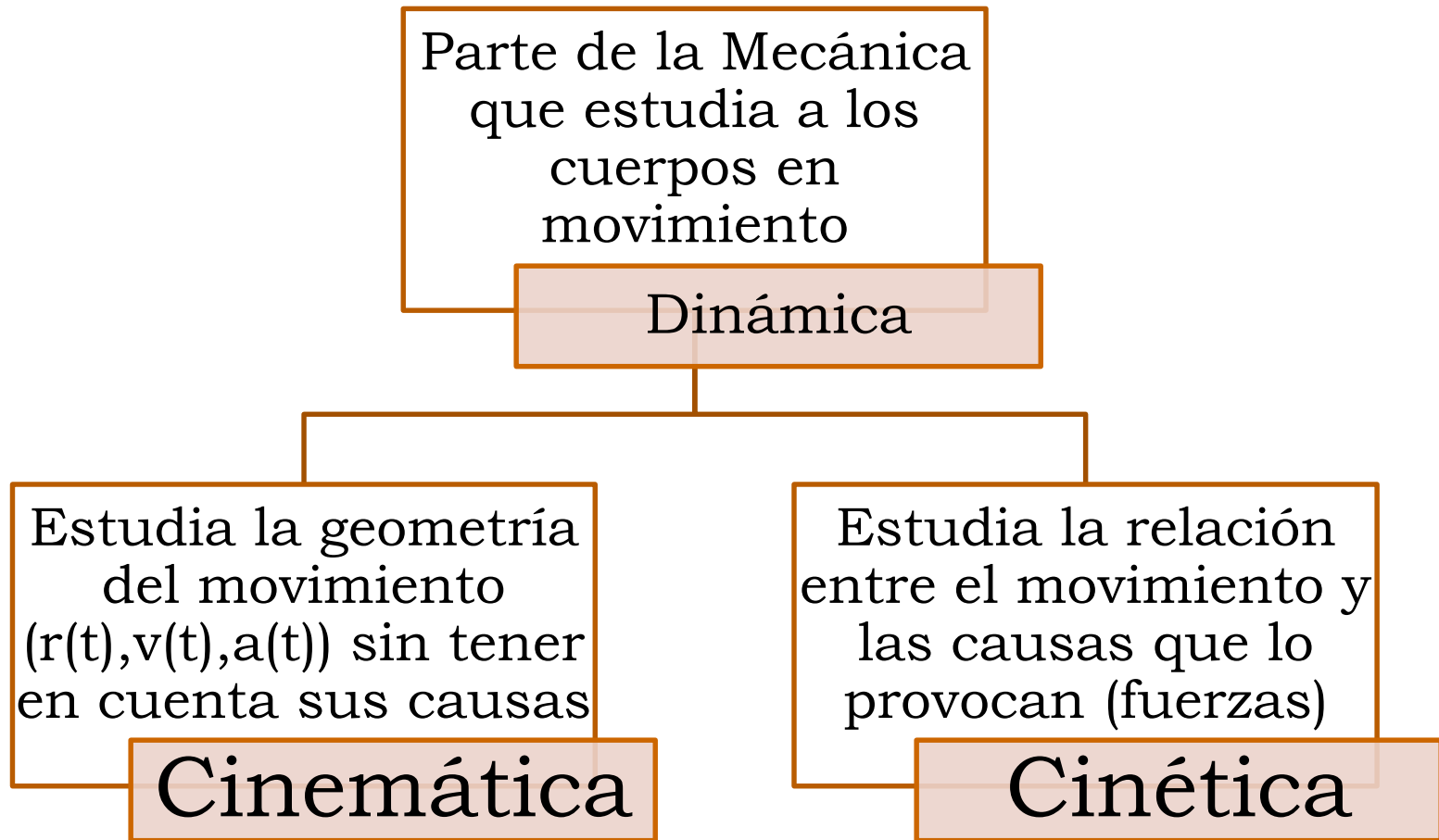
---

## **Tema 1. Dinámica de la Partícula.**

**Objetivo:** Describir las leyes y principios que relacionan los parámetros cinemáticos en el movimiento de un sistema de partículas.

**Contenido:** Introducción a la dinámica. Concepto de partícula. Caracterización cinemática del movimiento de partículas: posición, velocidad y aceleración. Determinación del movimiento. MRU. MRUV. Movimiento relativo. Movimiento restringido: ligaduras.

# Introducción a la Dinámica



# Introducción a la Dinámica

Algunos científicos que han contribuido a la dinámica:



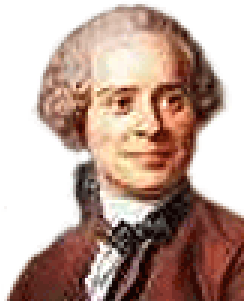
*Galileo Galilei*  
(1564-1642)



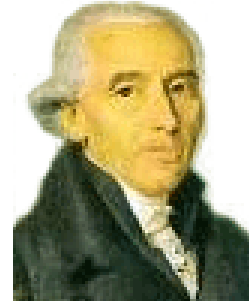
*Sir Isaac Newton*  
(1642-1727)



*Leonard Euler*  
(1707-1783)



*Jean le Rond D'Alembert*  
(1717-1783)



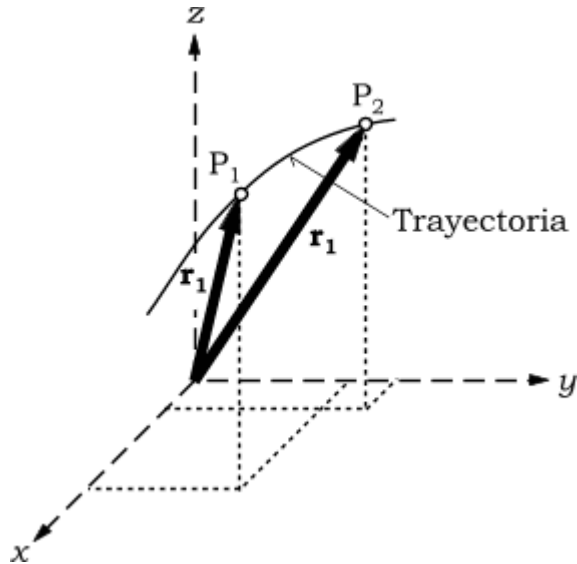
*Joseph Louis Lagrange*  
(1736-1813)

# Concepto de Partícula

Se considera **partícula**, a aquel cuerpo al cual es posible realizarle un análisis dinámico, prescindiendo de sus dimensiones.

En Física diríamos que cualquier objeto, por grande que sea, puede considerarse como una partícula si sus dimensiones (o su dimensión característica) es muy pequeña (100 veces o más) respecto a la longitud de la trayectoria del movimiento.

# Movimiento de una Partícula



Para definir la posición,  $P$ , que ocupa una partícula, en un instante de tiempo dado,  $t$ , se utiliza el radio vector,  $\mathbf{r}$ , que va desde el origen de coordenadas hasta el punto  $P$ .  $\mathbf{r}$  se denomina *vector de posición* y, es función del tiempo:

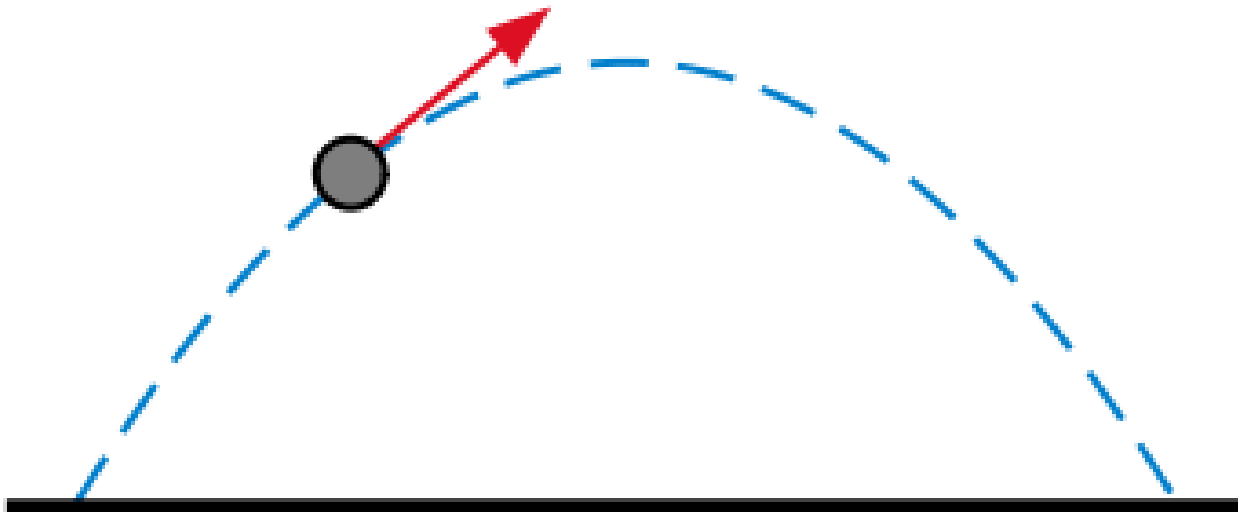
$$\mathbf{r} = \mathbf{r}(t)$$

Usualmente, el vector de posición se expresa mediante sus coordenadas rectangulares:

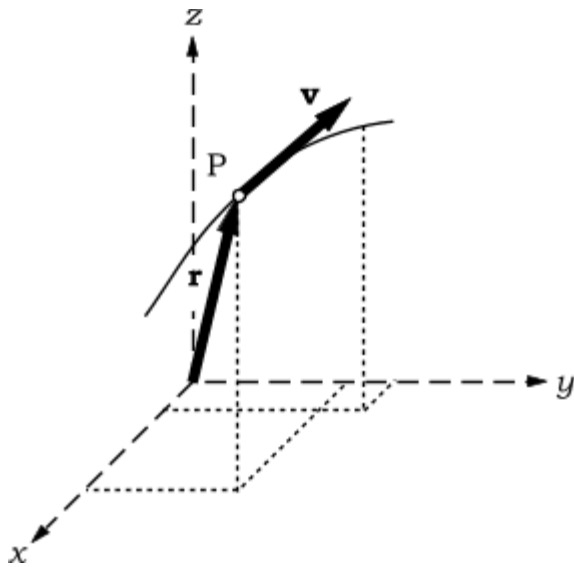
$$\mathbf{r} = x(t)\mathbf{i} + y(t)\mathbf{j} + z(t)\mathbf{k}$$

# Trayectoria

La trayectoria de una partícula es la traza o curva que ella realiza en su movimiento por el espacio. En la figura se muestra una trayectoria parabólica del lanzamiento de un proyectil.



# Velocidad



Se llama *velocidad instantánea*,  $\mathbf{v}$ , de una partícula en movimiento a la derivada:

$$\mathbf{v} = \frac{d\mathbf{r}}{dt}$$

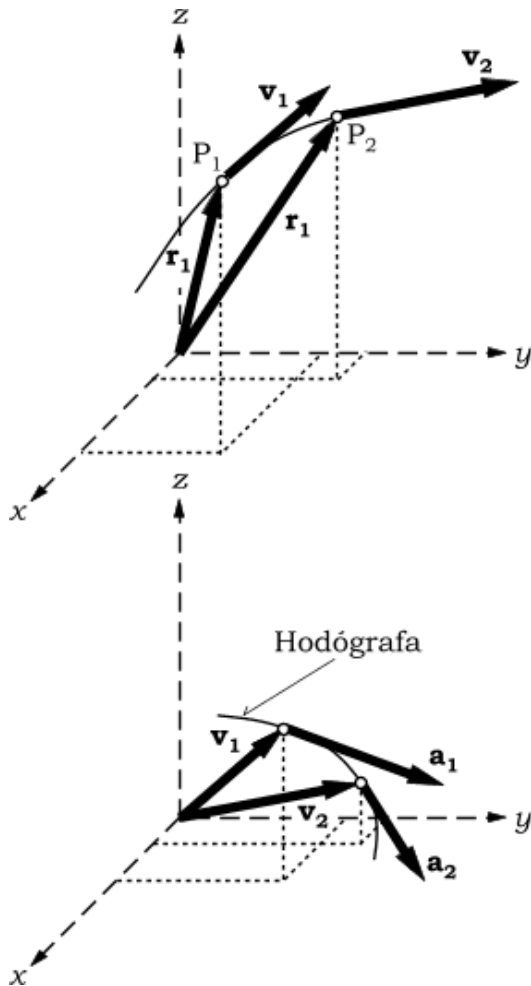
La velocidad es una magnitud vectorial, y su dirección es tangencial a la trayectoria.

Al valor modular de la velocidad se le llama *rapidez*,  $v$ , y puede obtenerse derivando, con respecto al tiempo, la longitud,  $s$ , del arco descrito por la partícula:

$$v = |\mathbf{v}| = \frac{ds}{dt}$$



# Aceleración



La *aceleración instantánea*,  $\mathbf{a}$ , de una partícula representa la variación de su velocidad, y se calcula como:

$$\mathbf{a} = \frac{d\mathbf{v}}{dt} = \frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2}$$

La aceleración, es tangente a la curva generada por los extremos de los vectores de velocidad, si son representados sobre un origen común. A esta curva se le denomina *hodógrafa*. En general, la aceleración no es tangente a la trayectoria.

# Componentes Rectangulares

Para una partícula, cuya posición en un instante dado,  $t$ , está descrita por la expresión:

$$\mathbf{r} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$$

la velocidad y la aceleración pueden expresarse a través de sus respectivas componentes rectangulares, de la forma:

$$\mathbf{v} = v_x\mathbf{i} + v_y\mathbf{j} + v_z\mathbf{k}$$

$$\mathbf{a} = a_x\mathbf{i} + a_y\mathbf{j} + a_z\mathbf{k}$$

donde:


$$\begin{aligned} v_x &= \frac{dx}{dt} & v_y &= \frac{dy}{dt} & v_z &= \frac{dz}{dt} \\ a_x &= \frac{dv_x}{dt} & a_y &= \frac{dv_y}{dt} & a_z &= \frac{dv_z}{dt} \end{aligned}$$

# Determinación del movimiento

- ✓ **Problema Directo de la Cinemática:** Se conoce la ley de movimiento ( $\vec{r}(t)$ ) y para conocer las velocidades y aceleraciones en cada eje coordenado se aplica la operación matemática de derivación.
- ✓ **Problema Inverso de la Cinemática:** Se conoce la aceleración de la partícula y para hallar las velocidades y posiciones se aplica la operación matemática de integración. Este es el tipo de especificación del movimiento más frecuente en la práctica.

En cada caso las operaciones se aplican a las componentes k-ésimas de los vectores.

# Especificaciones de la aceleración

1.  $a = f(t)$   
$$\begin{cases} v(t) = v_0 + \int_{t_0}^t f(t) dt \\ x(t) = x_0 + \int_{t_0}^t v(t) dt \end{cases}$$

2.  $a = g(x)$  Si  $v = v(x(t))$  entonces:

$$a = \frac{dv}{dt} = \frac{dv}{dx} \frac{dx}{dt} = \frac{dv}{dx} v = g(x), \quad \text{luego: } v dv = g(x) dx$$

$$\int_{v_0}^{v(t)} v dv = \int_{x_0}^x g(x) dx$$

al integrar:  $\frac{v^2}{2} - \frac{v_0^2}{2} = \int_{x_0}^x g(x) dx$  (se obtiene  $v(x)$ )

$$dt = \frac{dx}{v(x)} \quad \therefore t - t_0 = \int_{x_0}^x \frac{dx}{v(x)}$$



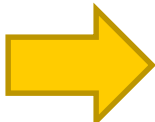
A resolver por  
métodos numéricos

# Especificaciones de la aceleración


$$3. \quad a = f(v) = \left\{ \begin{array}{ll} v \frac{dv}{dx} \xrightarrow{\text{yellow arrow}} dx = \frac{v dv}{f(v)} & \text{Relación entre } x \text{ y } v \\ \frac{dv}{dt} \xrightarrow{\text{yellow arrow}} dt = \frac{dv}{f(v)} & \text{Relación entre } v \text{ y } t \end{array} \right.$$

Ahora lo complementamos con  $v = \frac{dx}{dt}$

# Movimiento Rectilíneo Uniforme

- ✓  $\vec{v} = \text{const}$  Un vector constante implica que no puede cambiar su módulo ni puede rotar (cuando el vector rota, su módulo puede ser constante pero las componentes cambian), luego el movimiento es recto.
- ✓ Se toma un eje de coordenadas (X)  $y = 0, z = 0$
- ✓  $v = \frac{dx}{dt} = v_0$    $x = x_0 + v_0 t$

# MRUA (aceleración constante)

✓  $\frac{dv}{dt} = a = \text{const}$  

$$v = v_0 + at$$

✓  $\frac{dx}{dt} = v = v_0 + at$

$$\int_{x_0}^x dx = \int_0^t (v_0 + at) dt$$

$$x - x_0 = v_0 t + \frac{1}{2}at^2$$

$$x = x_0 + v_0 t + \frac{1}{2}at^2$$

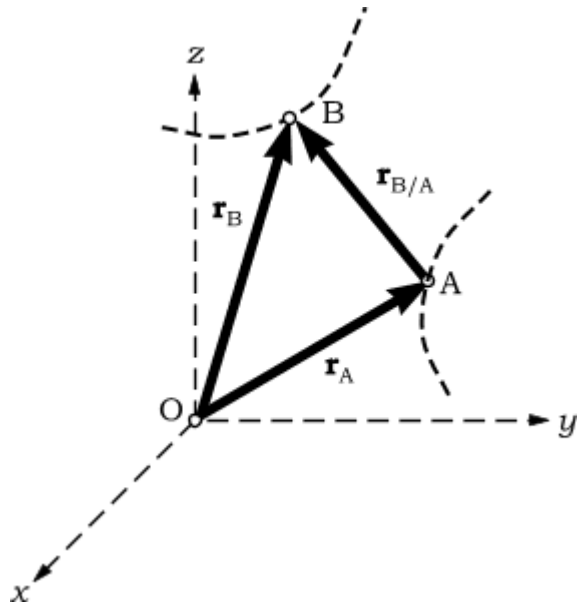
✓  $v \frac{dv}{dx} = a \quad v dv = a dx$

$$\int_{v_0}^v v dv = a \int_{x_0}^x dx$$

$$\frac{1}{2}(v^2 - v_0^2) = a(x - x_0)$$

$$v^2 = v_0^2 + 2a(x - x_0)$$

# Movimiento Relativo



Si dos partículas A y B, se mueven según las trayectorias  $\mathbf{r}_A$  y  $\mathbf{r}_B$ , y sea  $\mathbf{r}_{B/A}$ , **la posición de B con respecto a A**, entonces, se cumple que:

$$\mathbf{r}_B = \mathbf{r}_A + \mathbf{r}_{B/A}$$

Y, además:

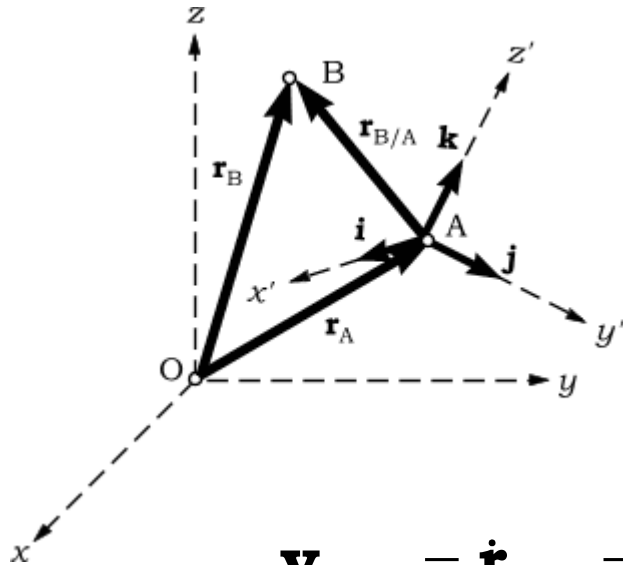
$$\mathbf{v}_B = \mathbf{v}_A + \mathbf{v}_{B/A}$$

$$\mathbf{a}_B = \mathbf{a}_A + \mathbf{a}_{B/A}$$

$$\mathbf{v}_{B/A} = \frac{d\mathbf{r}_{B/A}}{dt}$$



# Movimiento Relativo



Si se considera un sistema de coordenadas  $x'y'z'$ , fijo al punto A y moviéndose con él, donde  $\mathbf{r}_{B/A} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$ , entonces la velocidad y la aceleración relativas están dadas por:

$$\mathbf{v}_{B/A} = \dot{\mathbf{r}}_{B/A} = (\dot{x}\mathbf{i} + \dot{y}\mathbf{j} + \dot{z}\mathbf{k}) + (x\dot{\mathbf{i}} + y\dot{\mathbf{j}} + z\dot{\mathbf{k}})$$

$$\mathbf{a}_{B/A} = \ddot{\mathbf{r}}_{B/A} = (\ddot{x}\mathbf{i} + \ddot{y}\mathbf{j} + \ddot{z}\mathbf{k}) + 2(\dot{x}\dot{\mathbf{i}} + \dot{y}\dot{\mathbf{j}} + \dot{z}\dot{\mathbf{k}}) + (x\ddot{\mathbf{i}} + y\ddot{\mathbf{j}} + z\ddot{\mathbf{k}})$$

En el caso particular, en que el sistema  $x'y'z'$  no rota:

$$\mathbf{v}_{B/A} = (\dot{x}\mathbf{i} + \dot{y}\mathbf{j} + \dot{z}\mathbf{k})$$

$$\mathbf{a}_{B/A} = (\ddot{x}\mathbf{i} + \ddot{y}\mathbf{j} + \ddot{z}\mathbf{k})$$

# Movimiento Restringido

Es aquel donde el movimiento de las partículas está restringido o limitado. En el mismo se llama:

- *Ligadura cinemática*: Restricción geométrica al movimiento de las partículas.
- *Ecuaciones de ligadura*: Expresión matemática que describe la ligadura cinemática en función de sus coordenadas o sus derivadas.
- *Coordenadas independientes*: Aquellas que no están sujetas a restricciones entre sí,
- *Grados de libertad*: Número de coordenadas de posición independientes que se requieren para describir la configuración del conjunto.

# Movimiento Restringido

Las ligaduras pueden clasificarse, en dependencia de la forma de sus ecuaciones, como:

- *Ligaduras holónomas*: Se establecen mediante ecuaciones de igualdad (por ejemplo, la posición de dos partículas unidas por una cuerda inextensible:  $x_A - x_B = h$ ). Son las más comunes e importantes dentro del campo de la ingeniería.
- *Ligaduras no holónomas*: Se establecen mediante ecuaciones de desigualdad (por ejemplo, la posición de una partícula contenida en un tanque esférico:  $|\mathbf{r} - \mathbf{r}_0| \leq R$ ). Tienen mayor interés desde el punto de vista físico.

# Movimiento Restringido

También pueden clasificarse, en dependencia de su dependencia con respecto al tiempo, como:

- *Reónomas*: Cuando dependen del tiempo (por ejemplo, un collarín que se desliza a velocidad constante por un brazo móvil).
- *Esclerónomas*: Cuando no dependen del tiempo (por ejemplo, dos partículas unidas por una cuerda inextensible).

# Movimiento Restringido

La cantidad de grados de libertad,  $F$ , de un sistema de  $N$  partículas, con  $k$  ligaduras **holónomas**, se puede determinar como:

$$F = 3N - k \text{ (para movimiento en el espacio)}$$

$$F = 2N - k \text{ (para movimiento en el plano).}$$

# Procedimiento para resolver problemas dinámicos

1. Leer cuidadosamente el problema y tratar de correlacionar la situación física real con la teoría estudiada.
2. Dibujar los diagramas necesarios y extraer los datos del problema.
3. Establecer un sistema de coordenadas y aplicar los principios relevantes de la mecánica.
4. Resolver algebraica o numéricamente las ecuaciones necesarias. Utilizar un sistema de unidades consistentes. Dar los resultados con no más cifras significativas que los datos.

Continúa...

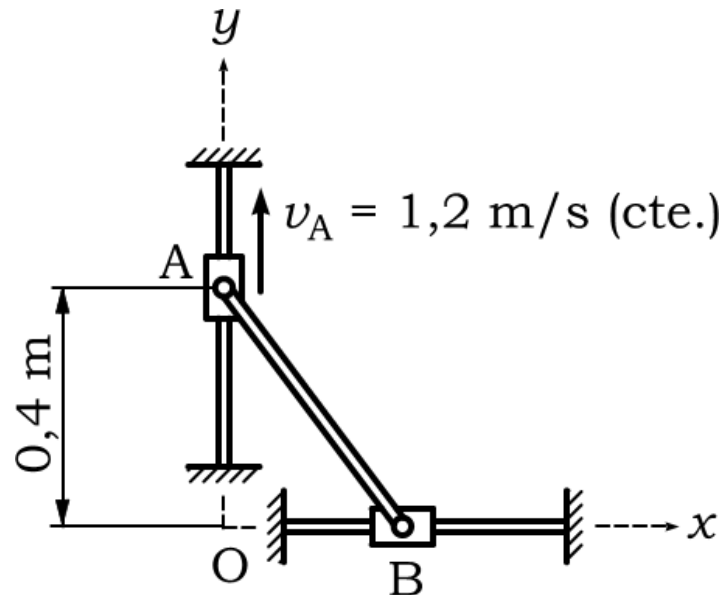
# Procedimiento para resolver problemas dinámicos

Procedimiento... (continuación):

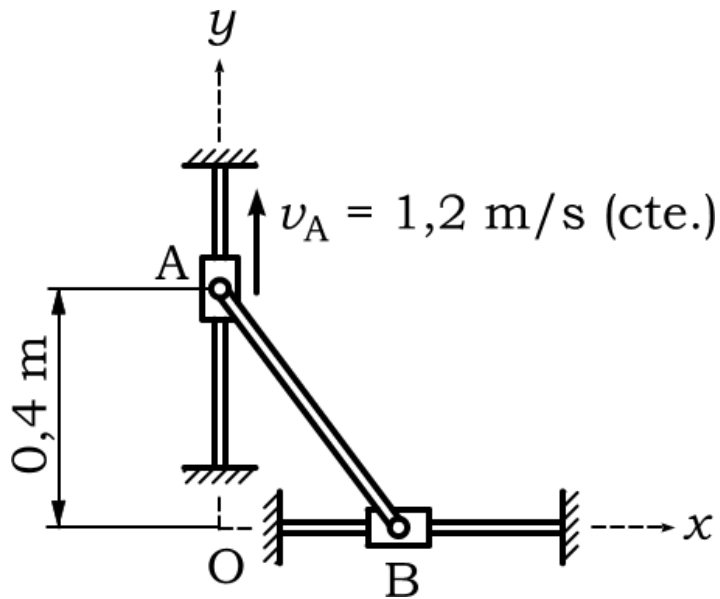
5. Analizar los resultados usando criterios técnicos y sentido común para determinar si parecen razonables.
6. Una vez que la solución ha sido completada revise el problema. Trate de pensar otras formas de obtener el mismo resultado.

# Ejemplo Resuelto

Dos collarines, A y B, se mueven por barras fijas, la primera en dirección vertical y la segunda horizontal. Ambas están unidas entre sí por una barra de longitud,  $L = 0,5 \text{ m}$ . Si el collarín A se mueve hacia arriba con una rapidez constante  $v_A = 1,2 \text{ m/s}$ , y se encuentra a una distancia de  $0,4 \text{ m}$  del punto O donde se intersecan los ejes de ambas barras fijas, calcule la velocidad y la aceleración del collarín B







$$x_A = 0, \quad y_B = 0$$

$$y_A^2 + x_B^2 = L^2 = \text{const}$$

$$F = 2N - k = 2(2) - 3 = 1$$

Con un solo grado de libertad es posible determinar el movimiento del sistema.

$$v_A^2 + y_A a_A + v_B^2 + x_B a_B = 0$$

$$a_B = -\frac{v_A^2 + v_B^2}{x_B} = -\frac{v_A^2 + v_B^2}{\sqrt{L^2 - y_A^2}}$$

$N$ : Cantidad de partículas  
 $k$ : Cantidad de ecuaciones

$$\frac{d}{dt}[y_A^2 + x_B^2] = \frac{dL^2}{dt} = 0$$

$$y_A v_A + x_B v_B = 0$$

$$v_B = -\frac{y_A v_A}{x_B} = -\frac{y_A v_A}{\sqrt{L^2 - y_A^2}}$$

$$\frac{d}{dt}[y_A v_A + x_B v_B] = 0$$

$$v_B = -\frac{0,4 * 1,2}{\sqrt{0,5^2 - 0,4^2}} = -1,6 \frac{m}{s}$$

$$a_B = -\frac{1,6^2 + 1,2^2}{\sqrt{0,5^2 - 0,4^2}} = -13,33 \frac{m}{s^2}$$

# Conclusiones

- ¿Qué sentido físico tiene la velocidad y aceleración de una partícula?
- ¿Cómo justificaría usted, desde el punto de matemático, el que la velocidad instantánea sea tangencial a la trayectoria?
- ¿Qué utilidad tienen expresar el movimiento de una partícula en componentes tangencial y normal o radial y transversal?
- ¿A qué se denomina ligadura en un sistema de partículas?

# Bibliografía

- Beer. F.P.; Johnston, E.R., 2010, *Mecánica Vectorial para Ingenieros-Dinámica*, 9na. Edición., México DF (México): McGraw-Hill Interamericana [Texto Básico].
- Hibbeler, R.C., 2010, *Ingeniería Mecánica: Dinámica*, 12ma Edición, Pearson Educación (México): Prentice-Hall, [disponible en el sitio Moodle].
- Myszka, D.H. , 2012, *Máquinas y Mecanismos*, 4ta Edición, Pearson Educación (México), Prentice-Hall, [disponible en el sitio Moodle].

# Bibliografía

- Shigley, J.E.; Uicker, J.J., 1988, *Teoría de Máquinas y Mecanismos*, 1ra. Edición., México DF (México): McGraw-Hill Interamericana [disponible en el sitio Moodle].
- Mesherski, I., 1974, *Problemas de Mecánica Teórica*, Editorial MIR, Moscú [disponible en el sitio Moodle y en la biblioteca de ciencias técnicas].