

Mecánica Teórica-II

Tema 1: Dinámica de la partícula

Laboratorio #1: Dinámica y Cinemática de la partícula

Objetivo: Desarrollar scripts de MATLAB para calcular numéricamente diferentes magnitudes dinámicas y cinemáticas en problemas con fuerzas variables o constantes donde se apliquen las leyes de Newton y los principios de conservación de la energía, del trabajo y la energía y de la cantidad de movimiento lineal.

PROBLEMA #1

Enunciado: Un pequeño bloque de 3.0 kg está en reposo en la parte superior de una superficie cilíndrica. Al bloque se le da una velocidad inicial v_0 hacia la derecha de magnitud 3.0 m/s lo que provoca que se deslice sobre la superficie cilíndrica. (a) Desarrolle un script en MATLAB para determinar $v(t)$ y $\theta(t)$ mediante un sistema de ecuaciones diferenciales de primer orden. (b) Grafique N vs θ para determinar el ángulo para el cual la normal se anula y el cuerpo pierde contacto con la superficie cilíndrica. Haga los cálculos para diferentes valores del coeficiente de fricción cinética entre el bloque y la superficie ($0 \leq \mu_k \leq 0.4$).

Sugerencias:

- Plantee el sistema de fuerzas en una posición arbitraria entre la vertical y el ángulo de despegue (θ_0) para hallar la aceleración tangencial y la normal o centrípeta. Con ello se debe obtener una ecuación para $\frac{dv}{dt}$ eliminando la normal de la ecuación.
- Complete el sistema mediante la ecuación $\frac{d\theta}{dt} = \frac{v(t)}{R}$.
- Resuelva el sistema de forma numérica en MATLAB y grafique $v(t)$, $\theta(t)$
- Para cada valor de tiempo, grafique N vs θ . ¿Cómo determinaría Ud. (numéricamente) el valor de θ para el cual $N = 0$? Diga al menos 2 variantes.
- Repita los cálculos para diferentes valores del coeficiente de fricción cinética.

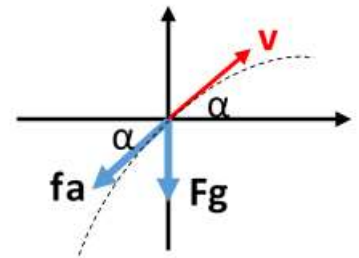
PROBLEMA #2

Enunciado: Se desea estudiar el comportamiento de un proyectil lanzado desde el suelo con una velocidad inicial $v_0 = 1450 \text{ m/s}$ a un ángulo $\theta = 55^\circ$ con la dirección horizontal. En una primera aproximación se requiere estudiar el lanzamiento sin resistencia del aire (solución exacta) y después estudiar el lanzamiento bajo la influencia de una fuerza de arrastre del aire proporcional al cuadrado de la velocidad ($F_D = Dv^2$) con un coeficiente de arrastre $D = 8.5 \times 10^{-5} \text{ kg/m}$. En cada caso se quiere determinar el tiempo de subida (t_{sub}) hasta la altura máxima, el tiempo de vuelo (t_{vuelo}), la altura máxima alcanzada por el proyectil (H_{max}) y el alcance máximo horizontal (R_{max}).

Sugerencias:

Del diagrama de la derecha se puede apreciar que la fuerza de arrastre (f_a) es siempre tangente a la trayectoria por lo que está en la misma dirección que la velocidad instantánea del proyectil pero en sentido contrario y en cada instante de tiempo forma un ángulo (α) con la dirección horizontal tal que:

$$\alpha(t) = \tan^{-1} \left(\frac{v_y(t)}{v_x(t)} \right)$$



El módulo de la fuerza de arrastre es $|\vec{f}_a| = Dv^2 = D(v_x^2 + v_y^2)$ e implícitamente depende del tiempo. Las componentes de la fuerza de arrastre son:

$$f_{ax} = f_a \cos(\alpha)$$

$$f_{ay} = f_a \sin(\alpha)$$

luego las ecuaciones (no lineales) son:

$$\text{Eje X: } -f_{ax} = m \frac{d^2x}{dt^2} \quad \text{Eje Y: } -f_{ay} - mg = m \frac{d^2y}{dt^2}$$

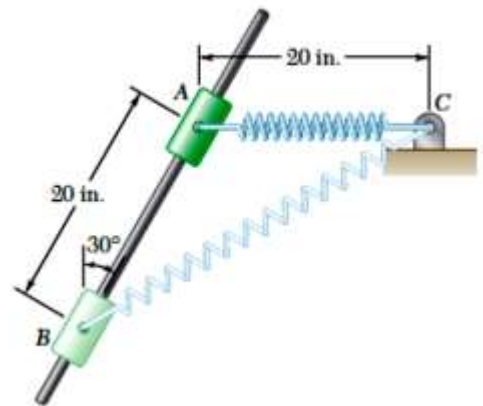
y solo pueden resolverse por métodos numéricos pues no es posible hallar una solución analítica. Las ecuaciones diferenciales resultantes de la aplicación de la 2^{da} Ley de Newton son de 2^{do} orden y deben reescribirse en forma de un sistema de ecuaciones de 1^{er} orden:

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= v_x & x(0) &= 0 \\ \frac{dv_x}{dt} &= -\frac{D}{m}(v_x^2 + v_y^2) \cos\left(\tan^{-1}\left(\frac{v_y}{v_x}\right)\right) & v_x(0) &= v_0 \cos(\theta) \\ \frac{dy}{dt} &= v_y & y(0) &= 0 \\ \frac{dv_y}{dt} &= -\frac{D}{m}(v_x^2 + v_y^2) \sin\left(\tan^{-1}\left(\frac{v_y}{v_x}\right)\right) - g & v_y(0) &= v_0 \sin(\theta) \end{aligned}$$

- Utilice un esquema de Runge-Kutta de orden medio (ode45) con tolerancia relativa de 10^{-4} y una tolerancia absoluta de 10^{-5} para cada una de las cuatro variables.
- Utilice un controlador de eventos para detectar cuándo la velocidad vertical es nula y de ahí determinar el tiempo de subida y la altura máxima y otro controlador para detectar cuándo $y(t) = 0$ y determinar de ahí el tiempo de vuelo y el alcance máximo horizontal.

PROBLEMA #3

Enunciado: Un collarín de 12 lb está unido a un resorte anclado en el punto C y puede deslizarse sobre una varilla sin fricción que forma un ángulo de 30° con la dirección vertical. El resorte tiene una constante k y no está estirado cuando el collarín se encuentra en A. Si se sabe que el collarín se suelta desde el reposo en A, utilice un script de MATLAB para determinar la velocidad del collarín en el punto B para valores de k desde 0.1 hasta 2.0 lb/in.

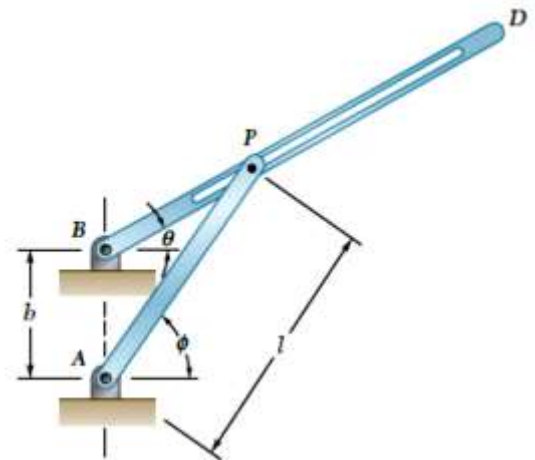


Sugerencias:

- Aplique conservación de la energía entre el punto A y el C. Tenga en cuenta que aquí solo actúan fuerzas conservativas. Tome el nivel cero de energía potencial en el punto B.
- Para calcular cuánto ha bajado el collarín en la vertical, calcule el coseno en el triángulo de 30° .
- Para calcular la longitud estirada del resorte ($L = x_0 + x$), con x siendo la deformación, aplique la ley de los cosenos en el triángulo ABC teniendo en cuenta que el ángulo BAC es igual a $90^\circ + 30^\circ$.
- Debe obtener una expresión de la velocidad en función de k .

PROBLEMA #4

Enunciado: El mecanismo que se muestra en la figura se conoce como mecanismo de retorno rápido de Whitworth. La varilla de entrada **AP** gira a una razón constante $\dot{\phi}$ y el pasador **P** tiene la libertad de deslizarse en la ranura de la varilla de salida **BD**. Use software para graficar $\theta(\phi)$ y $\dot{\theta}(\phi)$ para una revolución de la varilla **AP**. Suponga que $\dot{\phi} = 1 \text{ rad/s}$, $l = 4 \text{ in.}$ y a) $b = 2.5 \text{ in.}$, b) $b = 3 \text{ in.}$, c) $b = 3.5 \text{ in.}$



Sugerencias:

- Determine la relación entre el movimiento de la varilla AP y la barra ranurada BC. Fíjese en la geometría del problema.
- Escriba las ecuaciones para el movimiento de la varilla ranurada BD. Para ello determine la posición en el tiempo en coordenadas polares del pasador P, o sea, determine $r(t)$ y $\theta(t)$. ¿Cómo relacionaría Ud. la posición del punto P (pasador) con el ángulo de la varilla **AP**?

PROBLEMA #5

Enunciado: El movimiento tridimensional de una partícula se define mediante el vector de posición $\vec{r}(t) = Rt \cos(\omega t) \hat{i} + ct \hat{j} + Rt \sin(\omega t) \hat{k}$. (a) Determine las magnitudes de la velocidad y la aceleración de la partícula en el tiempo y gráfíquelas. (b) Grafique la trayectoria de la partícula. (c) Determine el radio de curvatura como función del tiempo. (d) Determine el plano osculador para diferentes valores del tiempo ($t = 0, 1, 2, 3s$). (Los incisos c y d debe realizarlos de forma analítica primero y numéricamente después para comparar los resultados)

Sugerencias:

- Determine la velocidad y la aceleración mediante las derivadas de $r(t)$.
- El radio de curvatura se determina por $\rho = \frac{|\dot{\vec{r}}|^3}{|\dot{\vec{r}} \times \ddot{\vec{r}}|}$
- El vector tangente se puede determinar mediante $\hat{e}_T = \frac{\vec{v}}{v}$
- El vector normal se puede determinar mediante la ecuación (11.38) del libro de Beer:
$$\frac{d\hat{e}_T}{dt} = \frac{v}{\rho} \hat{e}_N$$
- Recuerde que debe realizar los cálculos de forma analítica y numérica. Debe repasar los contenidos de Matemática III (cálculo numérico) para ver como se calcula una derivada numérica.