



**Universidad de Matanzas
Facultad de Ciencias Técnicas
Departamento de Mecánica**

Mecánica Teórica II

Conferencia #5

**“Cinética de la partícula: método
de leyes de conservación”**

Profesor: Alejandro González González
e-mail: alejandro.glez@umcc.cu

Sumario

Tema 1. Dinámica del Sistema de Partículas.

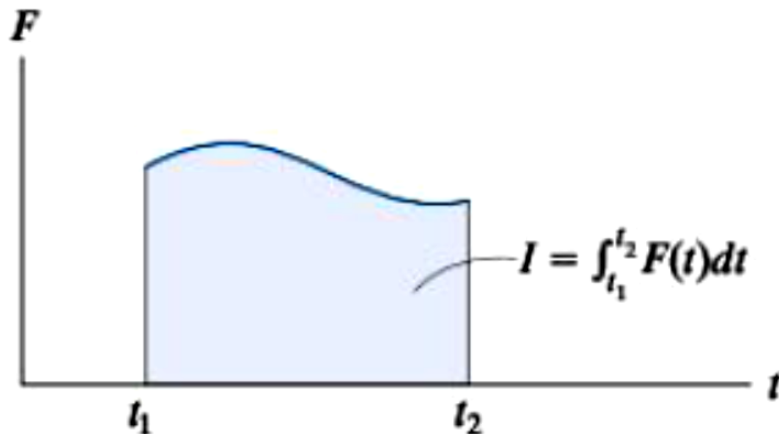
Objetivo: Describir las leyes y principios de conservación de energía y momentos que rigen sobre el movimiento de una partícula.

Contenido: Cantidad de movimiento lineal y angular. Impulso de una fuerza. Sistemas de partículas. Principio del impulso y la cantidad de movimiento. Relación entre el momento de una fuerza y la cantidad de movimiento angular. Conservación de la cantidad de movimiento.

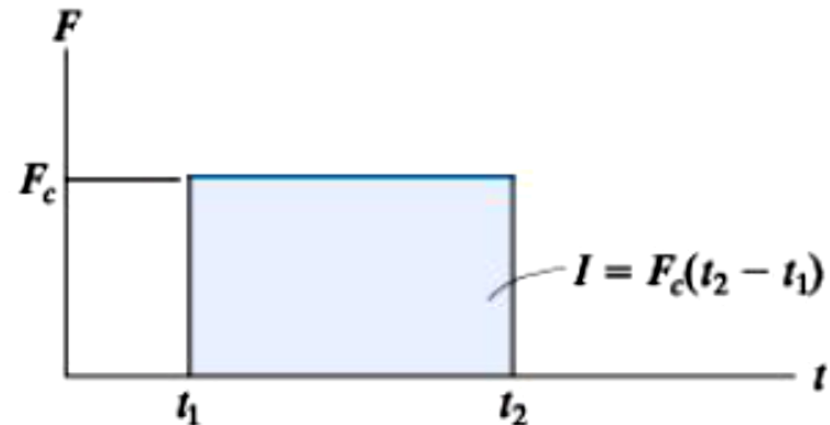
Impulso de una fuerza

$$\vec{I} = \int_{t_0}^{t_f} \vec{F} dt$$

Es una magnitud vectorial con la misma dirección y sentido que la fuerza. Mide el efecto de la fuerza en un intervalo de tiempo.



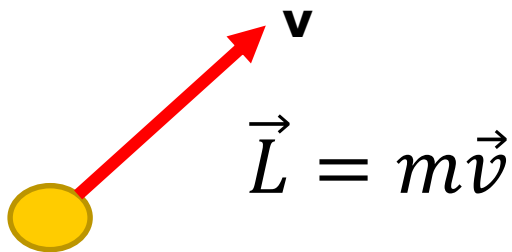
Fuerza variable



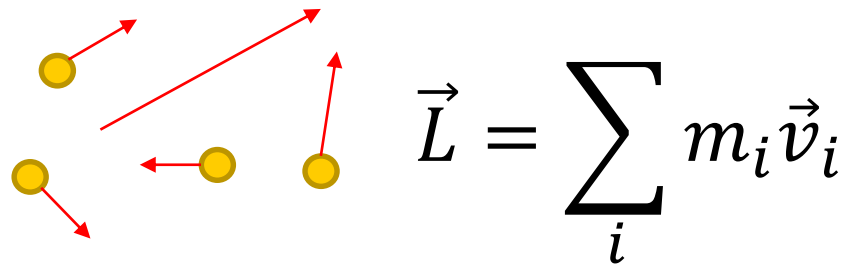
Fuerza constante

Momentum lineal

Partícula



Sistema de partículas



El momentum lineal o cantidad de movimiento lineal es una magnitud física fundamental. Es un vector en la misma dirección y sentido que la velocidad de la partícula. Con ella seremos capaces de establecer una ley de conservación y estudiar la simetría de invarianza de traslación, importante en la Física.

Impulso y cantidad de movimiento

$$\mathbf{F} = \frac{d}{dt}(m\mathbf{v})$$

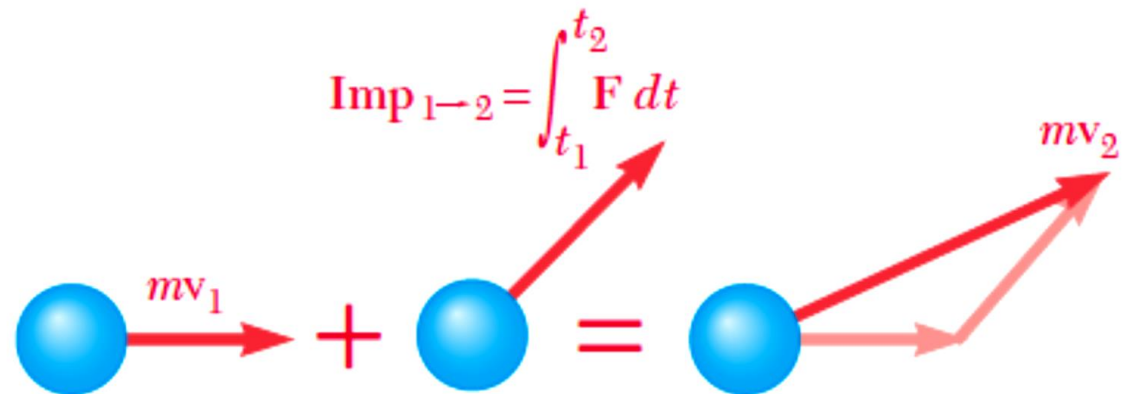
$$\mathbf{F} dt = d(m\mathbf{v})$$

$$\int_{t_1}^{t_2} \mathbf{F} dt = m\mathbf{v}_2 - m\mathbf{v}_1$$

$$\text{Imp}_{1 \rightarrow 2} = \int_{t_1}^{t_2} \mathbf{F} dt$$

$$= \mathbf{i} \int_{t_1}^{t_2} F_x dt + \mathbf{j} \int_{t_1}^{t_2} F_y dt + \mathbf{k} \int_{t_1}^{t_2} F_z dt$$

$$\text{N} \cdot \text{s} = (\text{kg} \cdot \text{m/s}^2) \cdot \text{s} = \text{kg} \cdot \text{m/s}$$



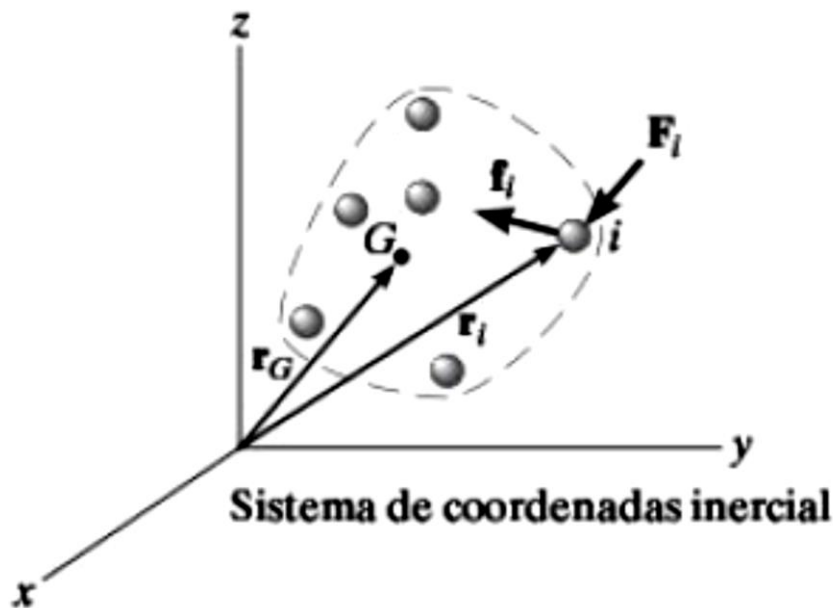
$$m\mathbf{v}_1 + \text{Imp}_{1 \rightarrow 2} = m\mathbf{v}_2$$

Impulso y cantidad de movimiento

Sistema de partículas

$$\Sigma \mathbf{F}_i = \Sigma m_i \frac{d\mathbf{v}_i}{dt}$$

Las fuerzas internas (\mathbf{f}_i) ocurren en pares colineales opuestos y se cancelan por la tercera ley de Newton.



$$\Sigma m_i (\mathbf{v}_i)_1 + \Sigma \int_{t_1}^{t_2} \mathbf{F}_i dt = \Sigma m_i (\mathbf{v}_i)_2$$

$$m \mathbf{v}_G = \Sigma m_i \mathbf{v}_i$$

$$m (\mathbf{v}_G)_1 + \Sigma \int_{t_1}^{t_2} \mathbf{F}_i dt = m (\mathbf{v}_G)_2$$

Conservación de la cantidad de movimiento lineal

Para una partícula: $L = m\mathbf{v}$

$$\frac{dL}{dt} = \dot{L} = \frac{d}{dt}(m\mathbf{v}) = m \frac{d\mathbf{v}}{dt} = m\mathbf{a}$$

$$\therefore \dot{L} = \sum F_{ext}$$

Cuando $\sum F_{ext} = 0$ entonces:

$$L_{antes} = L_{después}$$

$$v_{inicial} = v_{final}$$

$$\dot{L} = 0$$

Vector Nulo

Cuando la sumatoria de las fuerzas externas es nula, se conserva la cantidad de movimiento lineal.

Conservación de la cantidad de movimiento lineal

Para varias partículas: $\Sigma m\mathbf{v}_1 + \Sigma \mathbf{F} \Delta t = \Sigma m\mathbf{v}_2$

Esta ecuación es válida para fuerzas impulsivas: que actúan en un Δt muy corto y son de gran intensidad. Por ejemplo, la fuerza de un bate sobre una pelota.

$$\Sigma m\mathbf{v}_1 + \cancel{\Sigma \mathbf{F} \Delta t}^0 = \Sigma m\mathbf{v}_2$$

$$\Sigma m\mathbf{v}_1 = \Sigma m\mathbf{v}_2$$

$$(\mathbf{v}_G)_1 = (\mathbf{v}_G)_2$$

Si la suma de las fuerzas (externas) sobre las partículas se anula, entonces la cantidad de movimiento total del sistema de partículas se conserva.

Análisis de Impacto

Impacto: Choque entre dos cuerpos en un intervalo de tiempo muy pequeño y con fuerzas de interacción mutuas muy grandes.

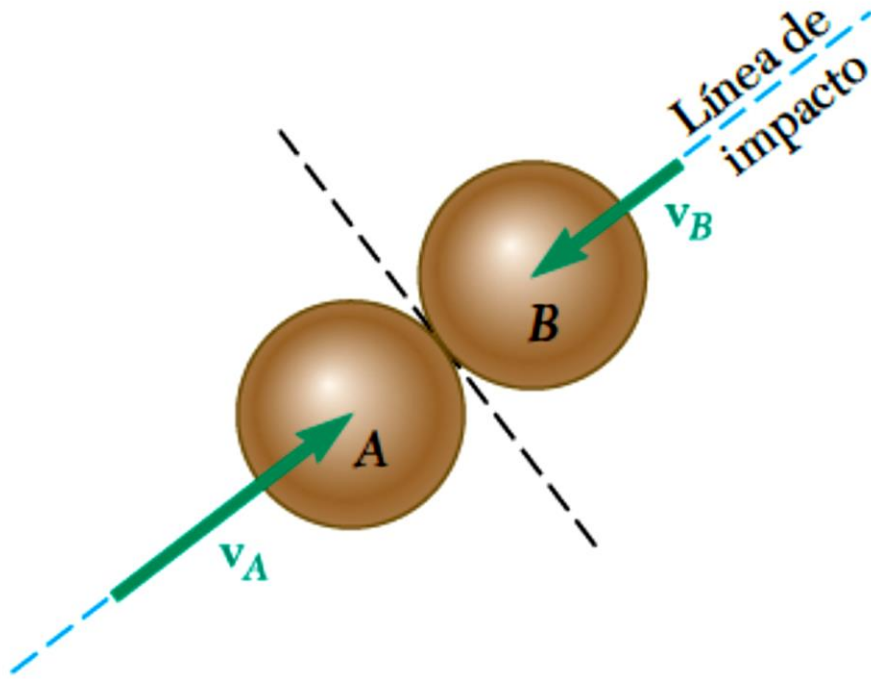
Línea de impacto: Normal común a las superficies en contacto.

Impacto Central: Cuando los centros de masa de los cuerpos que chocan están sobre la línea de impacto.

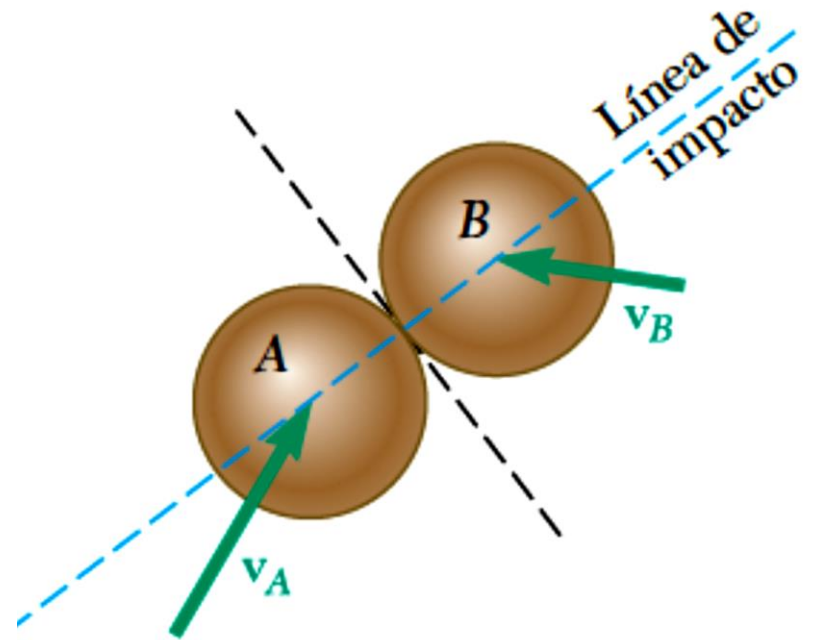
Impacto Excéntrico: Cuando no ocurre lo anterior.

El análisis de impacto excéntrico entre sólidos se analizará en el siguiente tema del curso.

Tipos de Impacto

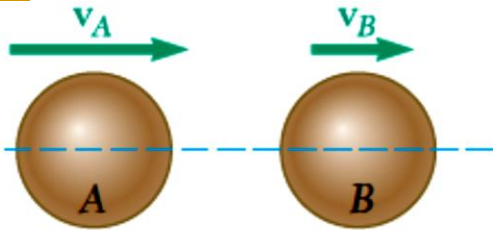


a) Impacto central directo

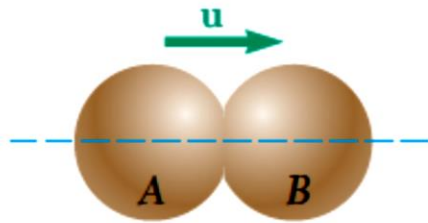


b) Impacto central oblicuo

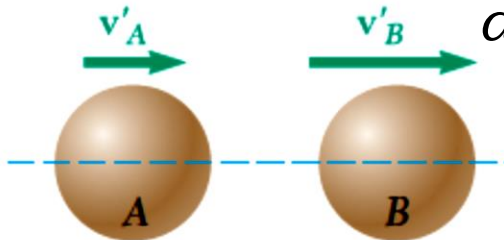
Impacto central directo



a) Antes del impacto



b) En la deformación máxima

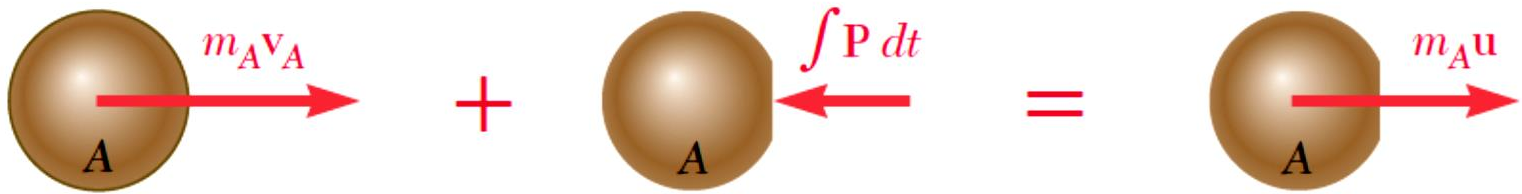


c) Después del impacto

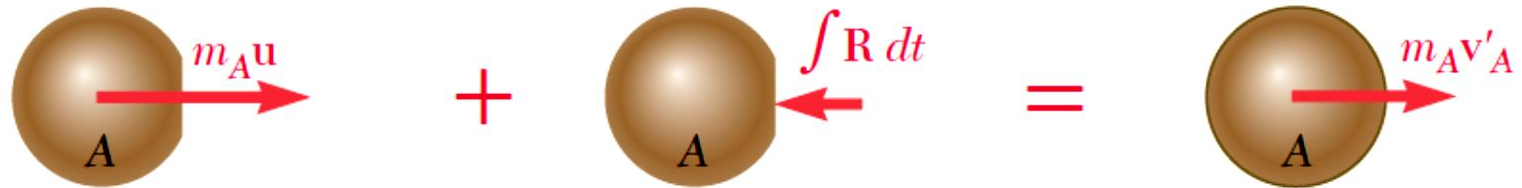
En el impacto entre dos cuerpos hay un primer período (deformación), donde ambas partículas tienen la misma velocidad \mathbf{u} y otro período final (restitución) donde al final las partículas recobran su forma (o no).

Se define el coeficiente de restitución como la relación entre la magnitud del impulso de restitución respecto al de deformación:

$$e = \frac{\int R dt}{\int P dt}$$



a) Periodo de deformación



b) Periodo de restitución

$$m_A \mathbf{v}_A + m_B \mathbf{v}_B = m_A \mathbf{v}'_A + m_B \mathbf{v}'_B \quad e = \frac{(u - v'_A) + (v'_B - u)}{(v_A - u) + (u - v_B)} = \frac{v'_B - v'_A}{v_A - v_B}$$

$$m_A v_A + m_B v_B = m_A v'_A + m_B v'_B$$

$$v'_B - v'_A = e(v_A - v_B)$$

$$m_A v_A - \int P dt = m_A u$$

$$m_A u - \int R dt = m_A v'_A$$

$$e = \frac{u - v'_A}{v_A - u}$$

$$e = \frac{v'_B - u}{u - v_B}$$

Resolver simultáneamente
para hallar las dos
velocidades después del
impacto

Tipos de impacto directo

- ✓ $e = 0$. (**Impacto perfectamente plástico**). $v'_B = v'_A$.
No hay período de restitución:

$$m_A v_A + m_B v_B = (m_A + m_B) v'$$

- ✓ $e = 1$ (**Impacto perfectamente elástico**). $v'_B - v'_A = v_A - v_B$. Se conserva la cantidad de movimiento la energía del sistema:

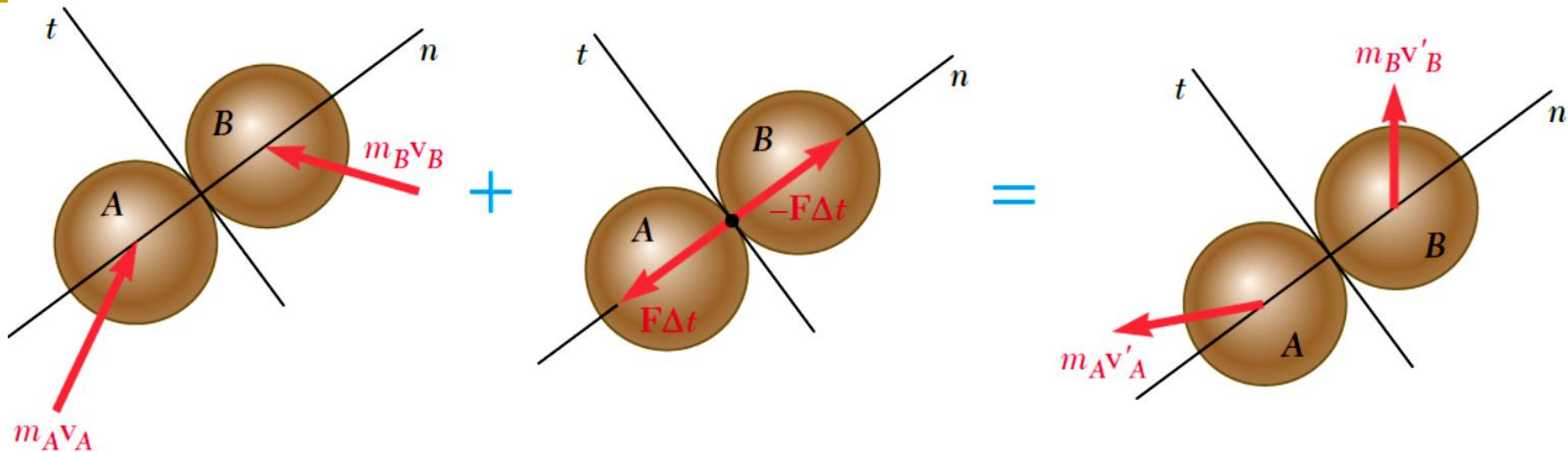
$$m_A(v_A - v'_A) = m_B(v'_B - v_B)$$

$$v_A + v'_A = v_B + v'_B$$


lo que conduce a:

$$\frac{1}{2}m_A v_A^2 + \frac{1}{2}m_B v_B^2 = \frac{1}{2}m_A (v'_A)^2 + \frac{1}{2}m_B (v'_B)^2$$

Impacto oblicuo



$(v_A)_t = (v'_A)_t$ $(v_B)_t = (v'_B)_t$  Se conserva la componente (t) *individual* del momentum

$m_A(v_A)_n + m_B(v_B)_n = m_A(v'_A)_n + m_B(v'_B)_n$  Se conserva la componente (n) del momentum del sistema.

$$(v'_B)_n - (v'_A)_n = e[(v_A)_n - (v_B)_n]$$

Cant. de mov. angular

$$\mathbf{H}_O = \mathbf{r} \times m\mathbf{v}$$

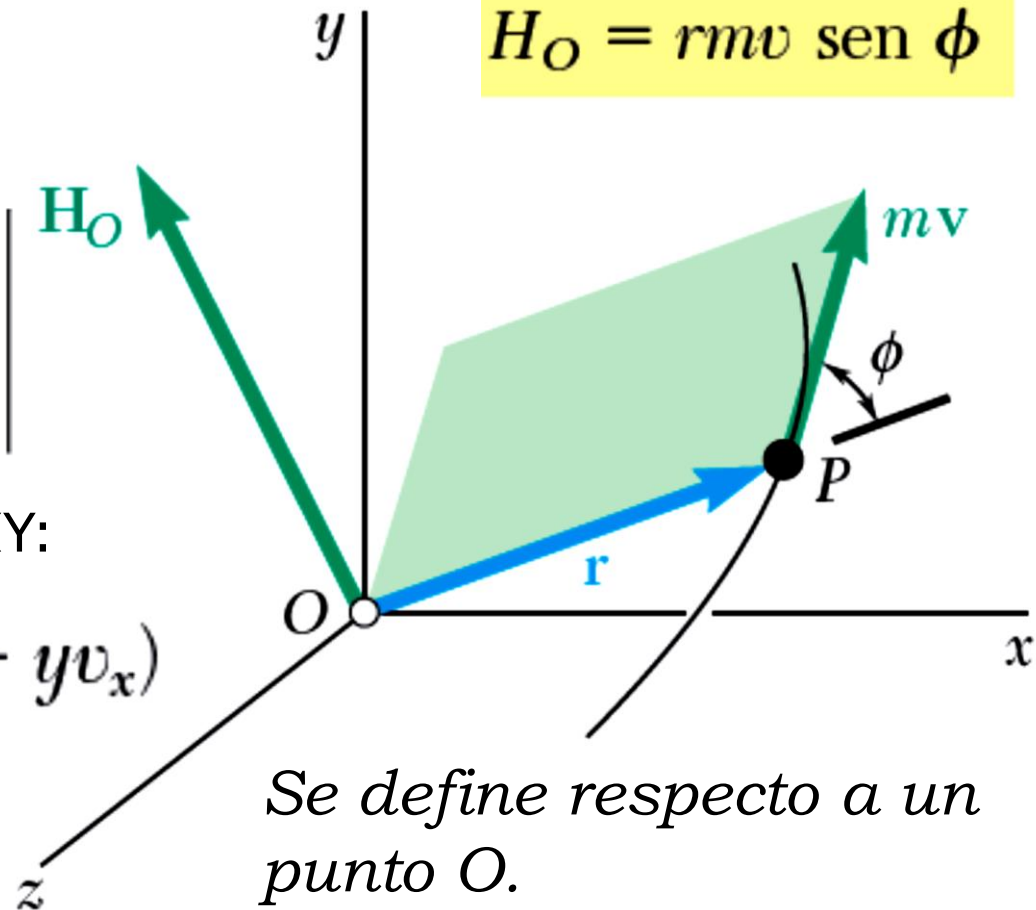
$$H_O = rmv \sin \phi$$

$$\mathbf{H}_O = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ x & y & z \\ mv_x & mv_y & mv_z \end{vmatrix}$$

Para el movimiento en XY:

$$H_O = H_z = m(xv_y - yv_x)$$

$$[H_0] = kg \frac{m^2}{s}$$



Relación entre el momento de una fuerza (\mathbf{M}_O) y cantidad de movimiento angular (\mathbf{H}_O)

Para la partícula:

$$\Sigma \mathbf{F} = m \dot{\mathbf{v}}$$

$$\Sigma \mathbf{M}_O = \mathbf{r} \times \Sigma \mathbf{F} = \mathbf{r} \times m \dot{\mathbf{v}}$$

$$\dot{\mathbf{H}}_O = \frac{d}{dt}(\mathbf{r} \times m \mathbf{v})$$

$$= \cancel{\dot{\mathbf{r}} \times m \mathbf{v}} + \mathbf{r} \times m \dot{\mathbf{v}}$$

$$\Sigma \mathbf{M}_O = \dot{\mathbf{H}}_O$$

Para el sistema de partículas:

$$(\mathbf{r}_i \times \mathbf{F}_i) + (\mathbf{r}_i \times \mathbf{f}_i) = (\dot{\mathbf{H}}_i)_O$$

Los momentos de las fuerzas internas se cancelan

$$\Sigma(\mathbf{r}_i \times \mathbf{F}_i) + \cancel{\Sigma(\mathbf{r}_i \times \mathbf{f}_i)} = \Sigma(\dot{\mathbf{H}}_i)_O$$

$$\Sigma \mathbf{M}_O = \dot{\mathbf{H}}_O$$

La expresión es la misma pero significa cosas diferentes. A la derecha, $\dot{\mathbf{H}}_O$ es la razón de cambio en el tiempo de la cantidad de movimiento angular TOTAL del sistema respecto al punto O.

$$\text{impulso angular} = \int_{t_1}^{t_2} \mathbf{M}_O dt = \int_{t_1}^{t_2} (\mathbf{r} \times \mathbf{F}) dt$$

*Para una
partícula*

$$\Sigma \mathbf{M}_O = \dot{\mathbf{H}}_O \quad \Rightarrow \quad \left(\Sigma M_O \right) dt = dH_O$$

$$\Sigma \int_{t_1}^{t_2} \mathbf{M}_O dt = (\mathbf{H}_O)_2 - (\mathbf{H}_O)_1$$

***Principio del impulso
y la cantidad de
movimiento angular***

$$\Sigma (\mathbf{H}_O)_1 + \Sigma \int_{t_1}^{t_2} \mathbf{M}_O dt = \Sigma (\mathbf{H}_O)_2$$

*Para el sistema de
partículas*

*Cantidades de movimiento angular de todas las
partículas en los instantes t_1 y t_2*

Conservación de H_0

PARTÍCULA

$$(\mathbf{H}_O)_1 + \Sigma \int_{t_1}^{t_2} \mathbf{M}_O dt = (\mathbf{H}_O)_2$$

$$(\mathbf{H}_O)_1 = (\mathbf{H}_O)_2$$

SISTEMA DE PARTÍCULAS

$$\Sigma(\mathbf{H}_O)_1 + \Sigma \int_{t_1}^{t_2} \mathbf{M}_O dt = \Sigma(\mathbf{H}_O)_2$$

$$\Sigma(\mathbf{H}_O)_1 = \Sigma(\mathbf{H}_O)_2$$

$$\Sigma \mathbf{H}_O = \Sigma (\mathbf{r}_i \times m \mathbf{v}_i)$$

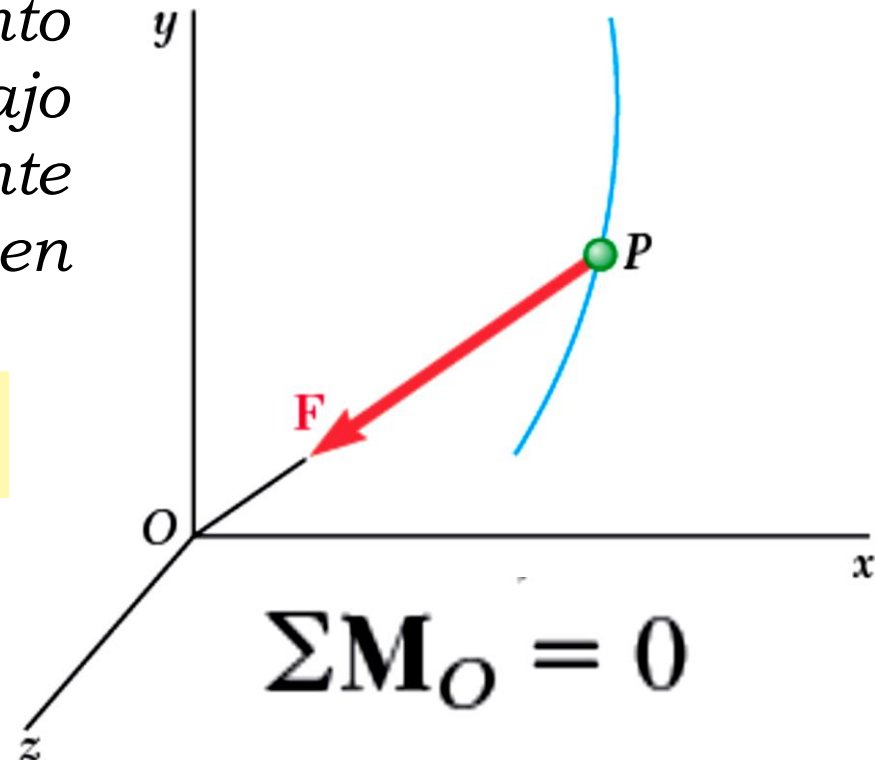
El momentum angular de la partícula o el sistema de partículas se conserva cuando los momentos de todas las fuerzas son nulos.

Fuerzas centrales

La cantidad de movimiento angular de una partícula bajo fuerza central es constante (tanto en dirección como en magnitud)

$$\mathbf{r} \times m\mathbf{v} = \mathbf{H}_O = \text{constante}$$

La partícula se mueve en un plano fijo perpendicular a \mathbf{H}_O .



$$\Sigma \mathbf{M}_O = 0$$

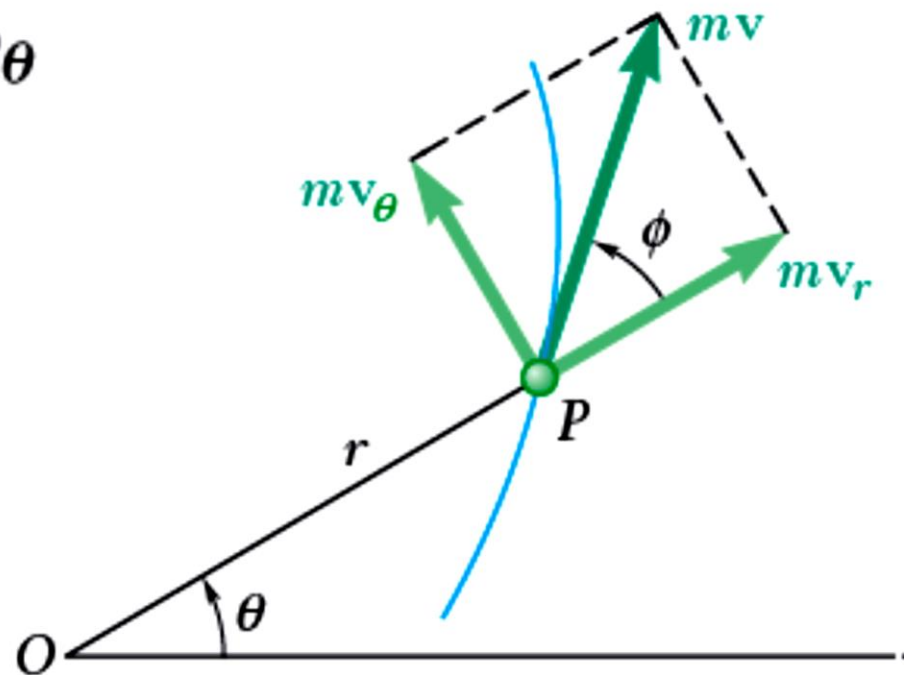
$$\dot{\mathbf{H}}_O = 0$$

Momentum angular en coordenadas polares

$$H_O = rmv \sin \phi = rmv_\theta$$

$$v_\theta = r\dot{\theta}$$

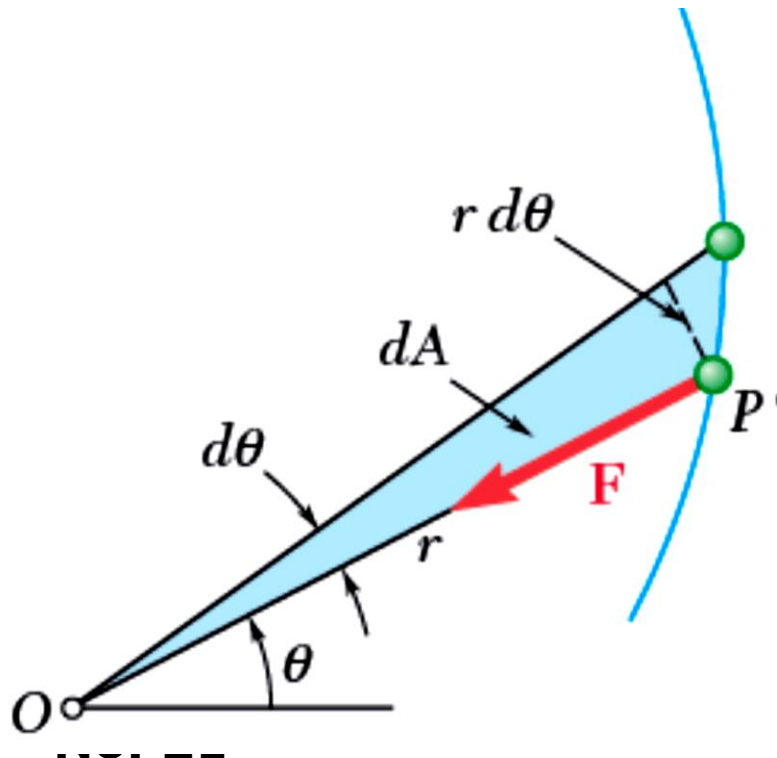
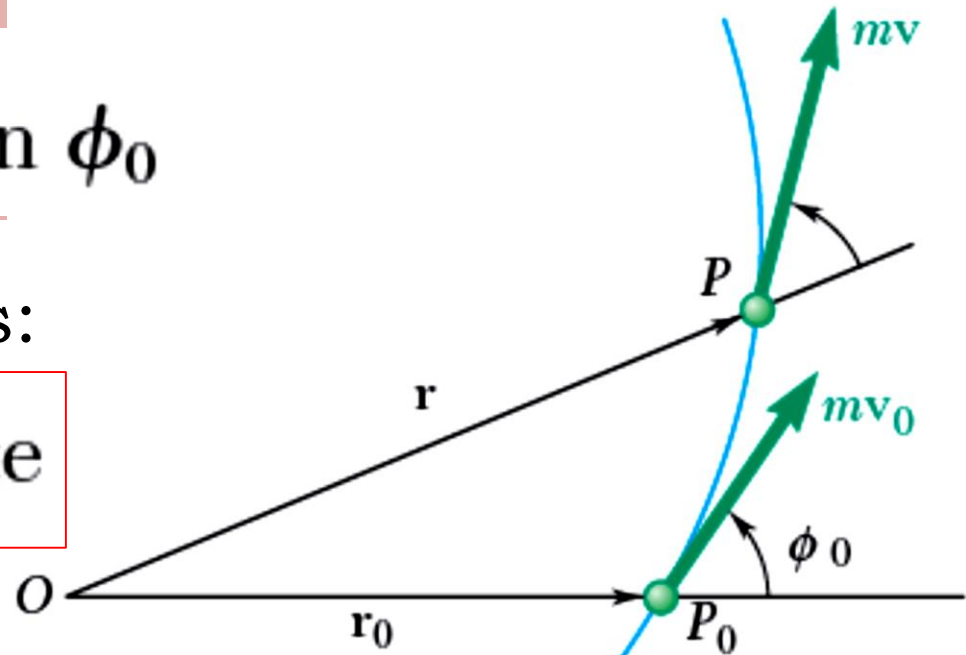
$$H_O = mr^2\dot{\theta}$$



$$rmv \sin \phi = r_0 m v_0 \sin \phi_0$$

En coordenadas polares:

$$mr^2\dot{\theta} = H_O = \text{constante}$$



$$\frac{H_0}{m} = h = r^2 \dot{\theta} = r^2 \frac{d\theta}{dt} = \text{const}$$

$$dA = \frac{1}{2} r^2 d\theta,$$

$$\therefore \frac{dA}{dt} = \frac{1}{2} r^2 \dot{\theta} = \text{const}$$

Resumen de Impulsos

$$m\mathbf{v}_1 + \sum \int_{t_1}^{t_2} \mathbf{F} dt = m\mathbf{v}_2$$

$$(\mathbf{H}_O)_1 + \sum \int_{t_1}^{t_2} \mathbf{M}_O dt = (\mathbf{H}_O)_2$$

Formulación escalar del Principio del Impulso y el Momentum Lineal para XY

Formulación escalar del Principio del Impulso y el Momento Angular para el eje Z

cuando el movimiento es en el plano XY



$$m(v_x)_1 + \sum \int_{t_1}^{t_2} F_x dt = m(v_x)_2$$

$$m(v_y)_1 + \sum \int_{t_1}^{t_2} F_y dt = m(v_y)_2$$

$$(H_O)_1 + \sum \int_{t_1}^{t_2} M_O dt = (H_O)_2$$

Resumen de leyes de conservación

La cantidad de movimiento lineal se conserva si la *sumatoria de las fuerzas externas es nula*

$$\Sigma m_i(\mathbf{v}_i)_1 + \Sigma \int_{t_1}^{t_2} \mathbf{F}_i dt = \Sigma m_i(\mathbf{v}_i)_2$$

$$\Sigma m \mathbf{v}_1 = \Sigma m \mathbf{v}_2$$

La cantidad de movimiento angular se conserva si la *sumatoria de los momentos de las fuerzas externas es nula*.

$$\Sigma (\mathbf{H}_O)_1 + \Sigma \int_{t_1}^{t_2} \mathbf{M}_O dt = \Sigma (\mathbf{H}_O)_2$$

$$\Sigma (\mathbf{H}_O)_1 = \Sigma (\mathbf{H}_O)_2$$

Resumen de métodos cinéticos

- **Método de la 2da Ley de Newton.**

Determina directamente las aceleraciones y desde ahí las velocidades y posiciones.

- **Método del Trabajo y la Energía.**

Debe complementarse con el primer método cuando se requiere hallar una fuerza normal o una aceleración.

- **Método del Impulso y la Cantidad de Movimiento.**

Para problemas de impacto o de conservación de la energía donde existan fuerzas impulsivas por un corto intervalo de tiempo.

Conclusiones

- ¿Cómo se definen la cantidad de movimiento lineal y angular para una partícula?
- ¿Cómo se definen el impulso lineal y angular?
- ¿Bajo qué condiciones se conserva la cantidad de movimiento lineal y la angular?
- ¿Qué relación hay entre el momento de una fuerza la cantidad de movimiento angular?
- ¿Qué establecen los principios del impulso y el momentum lineal y angular?

Bibliografía

- Beer. F.P.; Johnston, E.R., 2010, *Mecánica Vectorial para Ingenieros-Dinámica*, 9na. Edición., México DF (México): McGraw-Hill Interamericana [Texto Básico].
- Hibbeler, R.C., 2010, *Ingeniería Mecánica: Dinámica*, 12ma Edición, Pearson Educación (México): Prentice-Hall, [disponible en el sitio Moodle].
- Myszha, D.H. , 2012, *Máquinas y Mecanismos*, 4ta Edición, Pearson Educación (México), Prentice-Hall, [disponible en el sitio Moodle].

Bibliografía

- Shigley, J.E.; Uicker, J.J., 1988, *Teoría de Máquinas y Mecanismos*, 1ra. Edición., México DF (México): McGraw-Hill Interamericana [disponible en el sitio Moodle].
- Mesherski, I., 1974, *Problemas de Mecánica Teórica*, Editorial MIR, Moscú [disponible en el sitio Moodle y en la biblioteca de ciencias técnicas].