

Razonamiento Aproximado. Ingeniería Informática. 2do Año.

Tema I: Introducción a las Probabilidades.

L/T. Walpole (pág. 35-80); L/T. Miller (45-80)

Introducción a las probabilidades. Fenómenos aleatorios. Definiciones de Probabilidad. Propiedades. Principio de multiplicación. Análisis Combinatorio.

La Teoría de Probabilidades y la Estadística Matemática, son disciplinas matemáticas relativamente jóvenes por sí mismas, donde la Teoría de Probabilidades, como teoría independiente, que incluye a su vez numerosas disciplinas especiales y campos de aplicación, y como fundamento de la estadística matemática, posee una significación particular.

La Teoría de las probabilidades se inicia a principio del siglo XVII, como resultado de investigaciones sobre diversos juegos de azar realizados por algunos matemáticos como: Huygens, Fermat, Pascal, Bernoulli y otros. Ya en los siglos XVIII y XIX, los resultados teóricos probabilísticos fueron llevados a un sistema único, construido sobre conceptos básicos rigurosamente definidos. Así surgía la Teoría de Probabilidades como una nueva disciplina matemática, este hecho fue consecuencia de diversos trabajos realizados por eminentes matemáticos de la época como: Gauss, Laplace, De Moivre, Poisson, entre otros.

Son muchos los ejemplos de aplicación de esta ciencia a problemas prácticos, pero además muchas disciplinas se benefician con sus teorías y métodos, como son: la física, la química, la biología, la IO y todas las ramas de la ingeniería.

¿Qué es la Teoría de Probabilidades?

La teoría de probabilidades proporciona modelos matemáticos para la descripción de fenómenos sujetos a influjos casuales, y tiene como objetivo esencial la comprensión matemática de las regularidades de los fenómenos aleatorios.

La teoría de probabilidades se construye de forma axiomática, de acuerdo con un procedimiento probado y muy utilizado hoy en día, y se sirve en gran medida de los métodos y resultados del análisis.

Puede decirse en sentido general que esta teoría es la parte de la matemática que trata de cuantificar la incertidumbre. Por ejemplo cuando en el pronóstico del tiempo se dice que la probabilidad de lluvia mañana es de un 80%, no se afirma que mañana será un día lluvioso, pero salga mañana con paraguas para evitar un catarro.

En este curso trataremos de abordar los elementos principales de esta teoría junto a elementos de estadística que complementarán todo el estudio de la relación entre ambas disciplinas.

Formalmente podemos decir que la teoría de probabilidades estudia las leyes que rigen ciertos tipos de fenómenos naturales o producto de experimentos realizados por el hombre, llamados *fenómenos aleatorios*.

Fenómeno o experimento aleatorio: Es aquel cuyo resultado es incierto en el marco de distintas posibilidades y se puede repetir un número de veces arbitrario (al menos mentalmente), manteniendo las mismas condiciones exteriores que caracterizan a dicho experimento.

Ejemplos:

- 1- Lanzamiento de una moneda. (posibles resultados “cara” o “escudo”)
- 2- El lanzamiento de un dado. (posibles resultados el número que aparece en la cara superior)

Punto muestral: Cada uno de los posibles resultados de un fenómeno aleatorio.

En el ejemplo del lanzamiento de una moneda estos serán: cara y escudo.

Espacio muestral: Es el conjunto de todos los puntos muestrales del fenómeno aleatorio. Lo denotaremos por S .
Ejemplos:

1. En el lanzamiento de una moneda.
 $S: \{c, e\}$
2. En el lanzamiento del dado de seis caras,
 $S: \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ o $S: \{n \in \mathbb{N} / n < 7\}$

Evento o suceso aleatorio: Un resultado de un experimento aleatorio. (Constituye un subconjunto del espacio muestral del experimento). Por tanto puede presentarse o no.

Ejemplo:

En el lanzamiento del dado de seis caras, cuyo espacio muestral era $S: \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$

1. El evento que el dado muestre un número par después de ser lanzado:
 $A = \{2, 4, 6\}$
2. El evento que el dado muestre un número primo:
 $B = \{1, 2, 3, 5\}$
3. El evento que el dado muestre el número seis:
 $C = \{6\}$

Eventos tales como el C , que solo contienen un punto muestral se denominan simples. Nótese como el espacio muestral de un experimento constituye un evento en si mismo.

Ocurrencia de un evento. Sea A un evento de un cierto experimento E . Diremos que el evento A ocurre cuando al realizar el experimento E , el resultado que obtenemos es un punto muestral que pertenece a A .

Evento cierto: Un evento se llama cierto si siempre que se realiza el experimento E , este ocurre. Lo denotaremos por S .

Evento imposible: Un evento se denomina imposible si para toda realización del experimento E , este nunca ocurre. Lo denotaremos por ϕ .

Es obvio que un experimento E , el evento cierto es el espacio muestral, pues el espacio muestral es el conjunto de todos los puntos muestrales, siempre ocurrirá. El evento imposible es aquel que nunca ocurrirá

Complemento de A . Sea un evento A . El evento que no ocurra A , se denomina el evento complemento de A . Lo denotaremos A^c ; \bar{A} o A' .

Ejemplo:

Considere el experimento E : Extraer una bola de una urna que contiene nueve bolas numeradas del 1 al 9.

Una de las familias de eventos de este experimento es la formada por los eventos:

- A : que la bola extraída muestre un número par
 B : que la bola extraída muestre un número impar
 C : que la bola extraída muestre un múltiplo de tres
 D : que la bola extraída muestre un múltiplo de cuatro
 G : que la bola extraída muestre un número divisor de veinticuatro.

El espacio muestral S del experimento E . Es:

$$S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$$

Los evento mencionados serían:

$$A = \{2, 4, 6, 8\} \quad B = \{1, 3, 5, 7, 9\} \quad C = \{3, 6, 9\} \quad D = \{4, 8\} \quad G = \{1, 2, 3, 4, 5, 8\}$$

Fijémonos como el evento D es un suceso de A , o sea $D \subset A$

Operaciones entre eventos.

En algunos casos puede ser interesante analizar la ocurrencia simultánea de dos o más eventos, o la ocurrencia de al menos uno de ellos; por lo que se hace necesario definir operaciones que representen esos hechos, estas operaciones son equivalentes a la teoría de conjuntos, de hecho, si se sustituyen los sucesos que aparecen por conjuntos, surgen siempre proposiciones verdaderas de la teoría de conjuntos y viceversa.

Intersección o producto de eventos. Llamaremos intersección o producto de los eventos A y B al evento que consiste en la ocurrencia simultánea de A y B. Lo denotaremos por $A \bullet B$ o $A \cap B$

Del ejemplo anterior:

M: La bola extraída sea impar y múltiplo de tres.

$M =$ ocurran exactamente B y C, define el evento $M = B \bullet C = \{3,9\}$

Cuando la ocurrencia simultánea de dos eventos es el evento imposible, decimos que los eventos son mutuamente excluyentes, o sea A y B son mutuamente excluyentes si $A \bullet B = \phi$.

Unión de eventos. Llamaremos unión de los eventos A y B, al evento que consiste en la ocurrencia del evento A o del B. Lo denotaremos por $A \cup B$.

Ejemplo: Del ejemplo anterior

R: la bola extraída sea par o múltiplo de tres.

$R = A \cup C = \{2,3,4,6,8,9\}$

Cuando el evento $A \cup B = S$, decimos que los eventos A y B son exhaustivos.

Recomendar en estudio independiente la generalización de estos conceptos a cualquier número de eventos.

Nota: Es importante conocer las leyes de Morgan para operaciones de conjunto que son aplicables a los eventos y que en algunos casos permiten resolver problemas de forma más fácil, estas son:

$$\overline{(A \cap B)} = \overline{A} \cup \overline{B}. \quad \overline{(A \cup B)} = \overline{A} \cap \overline{B}.$$

Probabilidad clásica.

La noción de probabilidad, como medida numérica de la posibilidad real de ocurrencia de un evento, se ha expresado, de manera consecuente, con la categoría de los problemas a los que se ha aplicado a través de las diferentes definiciones dadas, hasta llegar a su conceptualización.

Probabilidad (Definición Clásica). Si S es un espacio finito y equiprobable, entonces para cualquier evento A en S la probabilidad de ocurrencia del evento A es:

$$P(A) = \frac{N(A)}{N(S)}$$

Donde:

$N(A)$: es el número de puntos muestrales de A o medida de A.

$N(S)$: es el número de puntos muestrales de S o medida de S.

Ejemplo:

Para el experimento del dado, la probabilidad de ocurrencia del evento

$A = \{2,4,6\} = \{2\} \cup \{4\} \cup \{6\}$

Es: $P(A) = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$

Probabilidad frecuencial o estadística

En muchos fenómenos de la vida real puede comprobarse que la frecuencia de ocurrencia de ciertos eventos en una serie relativamente grande de observaciones, se mantiene casi constante.

La definición de probabilidad estadística se basa en el concepto de frecuencia relativa de ocurrencia de un evento, la que a su vez presupone la repetición de un experimento un número considerable de veces.

La probabilidad de un evento (que suceda o que resulte) es la proporción de veces que el evento sucedería en una serie prolongada de experimentos repetidos.

Cuando un experimento se repite un número considerable de veces y la frecuencia relativa de un evento permanece alrededor de determinado valor, nos induce a pensar que existe cierta regularidad en la ocurrencia de un fenómeno a la cual denominamos regularidad estadística, esta regularidad en los fenómenos aleatorios es la que permite postular la existencia de una constante llamada *probabilidad estadística de ocurrencia de un evento*.

Formalización del concepto de Probabilidad Matemática.

Como ya vimos, una probabilidad es un valor numérico entre cero y uno, asociado a la posibilidad de ocurrencia de un evento. En este orden de ideas, la probabilidad matemática es la consecuencia de establecer una ley de correspondencia entre el conjunto de eventos de un espacio muestral y el intervalo $[0,1]$ de números reales.

Probabilidad (Definición axiomática):

Sea S un espacio muestral, a todo evento A de S , está asociado un número real, llamado probabilidad de A , el cual cumple para eventos A, B de S , los siguientes axiomas:

1. $0 \leq P(A) \leq 1$
2. $P(S) = 1$
3. $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$, si $A \cap B = \emptyset$

$$P: A \rightarrow [0,1]$$

$$A \rightarrow P(A)$$

Propiedades:

Dado un espacio de probabilidad (S, A, P)

1. La probabilidad del evento imposible es cero.
 $P(\emptyset) = 0$
2. Si A es un evento aleatorio del espacio de probabilidad, entonces:
 $P(A^c) = 1 - P(A)$
3. Si A y B son eventos aleatorios del espacio de probabilidad, entonces:
 $P(A \cap B^c) = P(A) - P(A \cap B)$
4. Si A y B son eventos aleatorios de un espacio de probabilidad, entonces:
 $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$
5. Si A y B son eventos aleatorios del espacio de probabilidad, tales que $A \subset B$, entonces:
 $P(A) \leq P(B)$
6. Si A_1, A_2, \dots, A_n son eventos excluyentes de (S, A, P) , entonces:
 $P(A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n) = P(A_1) + P(A_2) + \dots + P(A_n)$

Veremos ejemplos de aplicación de estos elementos:

Ejemplos:

1- En un grupo de 35 alumnos hay 14 varones. Si se selecciona un alumno al azar, ¿Cuál es la probabilidad de los siguientes eventos?

- a) A- Sea un varón.
- b) B- Sea una hembra.

R/ **Experimento aleatorio:** *Seleccionar un alumno. (Experimento finito y equiprobable, aplicamos definición clásica)*

a) A- Seleccionar un varón.

b) B- Seleccionar una muchacha.

$$P(A) = \frac{14}{35} = \frac{2}{5}$$

$$P(B) = \frac{21}{35} = \frac{3}{5} \quad \text{o} \quad P(B) = P(A^c) = 1 - P(A) = 1 - \frac{2}{5} = \frac{3}{5}$$

(Como podemos apreciar existen varias vías para resolver de forma general estos tipos de problemas)

2- Sean A y B tal que: $P(A \cup B) = \frac{3}{4}$; $P(A^c) = \frac{2}{3}$; $P(A \cap B) = \frac{1}{4}$. Hallar:

a) $P(A)$

b) $P(B)$

c) $P(A \cap B^c)$

R/ a) $P(A) = 1 - P(A^c) = 1 - \frac{2}{3} = \frac{1}{3}$.

b) $P(B) = P(A \cup B) + P(A \cap B) - P(A) \quad P(B) = \frac{3}{4} + \frac{1}{4} - \frac{1}{3} = \frac{9+3-4}{12} = \frac{8}{12} = \frac{2}{3}$

c) $P(A \cap B^c) = P(A) - P(A \cap B) = \frac{1}{3} - \frac{1}{4} = \frac{1}{12}$.

Principio de multiplicación:

Si un suceso cualquiera puede ocurrir de n maneras diferentes y, después que ha ocurrido de una cualquiera de esas maneras, un segundo suceso puede ocurrir de p maneras diferentes, entonces los dos sucesos, en ese orden, pueden ocurrir de np maneras.

Ejemplo: Una clave de entrada a cierto sistema está formado por dos lugares. Se conoce que el primer elemento es una vocal y el segundo un número. ¿Cuántas variantes de clave existe de este tipo?

R/ El primer elemento es una vocal y conocemos que existen 5 vocales.

El segundo elemento es un número, pero como tiene un solo lugar puede ser cualquiera desde 0-9, por lo que existen 10 variantes.

Aplicando el principio de multiplicación existen $5 \cdot 10 = 50$ variantes de claves posibles.

Estudio Independiente:

Ejercicios L/T. Walpole pág. 42. Ejercicios L/T Miller pág. 53; 63

L/T. Walpole pág. 44. (Estudiar epígrafe 2.3 Conteo de puntos muestrales) Ejercicios pág. 51.

Ejercicios L/T. Walpole pág. 59.

Ejercicios Guía Tema I-Introducción a las Probabilidades.

Probabilidad Condicional e Independencia. Fórmula de la probabilidad total. Fórmula de Bayes.

En ocasiones es interesante calcular probabilidades de ocurrencia de un suceso bajo el supuesto de la ocurrencia de otro anterior relacionado con el mismo experimento aleatorio.

Ejemplo 1: De una urna que contiene una bola blanca, una verde y una roja se extraen dos bolas una a una sin reposición:

a) dos verdes

b) una verde y una roja

c) no salga blanca

d) la segunda sea verde

Aquí tenemos: EXP: Extraer dos bolas de una urna una a una sin reposición.

$$S = \{(V, R), (V, B), (R, V), (R, B), (B, V), (B, R)\} \text{ es decir } N(S)=6$$

A → Salgan dos bolas verdes. $N(A)=0 \quad P(A) = 0$

B → Salga una verde y una roja. $N(B)=2 \quad P(B) = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$

C → No salga blanca. $N(C)=2 \quad P(C) = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$

D → La segunda sea verde. $N(D)=2 \quad P(D) = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$

Calculemos ahora la probabilidad del siguiente evento:

E → La segunda sea verde si en la primera extracción salió una blanca.

Aquí ya vemos que el suceso está condicionado por la ocurrencia de otro anterior, por lo que el espacio muestra ha cambiado: $S = \{(B, V)(B, R)\}$ es decir $N(S)=2$.

Por tanto $P(E) = 1/2$.

Como podemos apreciar en algunos casos el hecho de condicionar la ocurrencia de un suceso a la de otro hace que las probabilidades cambien. A esta última se le llama probabilidad condicionada.

Ejemplo 2: En un aula se forman 4 brigadas estudiantiles con la siguiente composición:

Brigada	Hombres	Mujeres
1	5	5
2	6	4
3	3	8
4	7	3

Si se escoge aleatoriamente un estudiante calcule la probabilidad de que sea:

a.1) Mujer.

a.2) Que sea mujer si se conoce que el seleccionado es de la brigada 2

a.1) Aquí tenemos: EXP: Seleccionar un estudiante de un aula. $N(S)= 41$

A_1 : Ser mujer $P(A_1) = 20/41$

a.2) Aquí tenemos: EXP: Seleccionar un estudiante de una brigada. $N(S)= 10$

A_2 : Ser mujer si el estudiante extraído es de la brigada 2 $P(A_2) = 4/10$

Si denotáramos A cómo ser mujer y B como ser de la brigada 2, la probabilidad pedida sería denotaría como $P(A/B)$ o sea probabilidad de que ocurra A dado que ocurre B.

Probabilidad condicional.

Sea $(S; A, P)$ un espacio de probabilidad, A y B eventos de ese espacio tales que $P(B) > 0$; entonces la probabilidad condicional de A dado B ($P(A/B)$) es:

$$P(A/B) = \frac{P(A \cdot B)}{P(B)}$$

Algunas propiedades de la probabilidad condicional (Se mantienen las propiedades vistas pero bajo la condición):

1- $P(S/C) = 1$

2- $P(A/C) = 1$, si $C \subset A$

3- $P(A \cup B/C) = P(A/C) + P(B/C) - P(A \cap B/C)$

4- $P(A^c/C) = 1 - P(A/C)$

En ocasiones resulta más fácil calcular la probabilidad condicionada de forma directa y entonces despejando la fórmula tenemos una variante para calcular la probabilidad de la intersección de dos sucesos (probabilidad conjunta):

$$P(A \cap B) = P(A/B) \cdot P(B) = P(B/A) \cdot P(A)$$

Independencia estadística.

Sean A y B eventos definidos en un mismo espacio muestral. Los eventos A y B son estadísticamente independientes si y sólo si:

$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$$

De aquí se deduce que $P(A/B) = P(A)$; $P(B/A) = P(B)$

Estas expresiones son equivalentes.

Ejemplo 3: Se conoce a partir de datos históricos que en cierto país las probabilidades de que ejerza una pareja el derecho al voto se comporta como sigue: de que un hombre casado vote = 0.6; de que una mujer casada vote = 0.5; de que la mujer vote dado que su esposo lo hizo = 0.7; a partir de los datos anteriores calcule las siguientes probabilidades:

- a) voten los dos integrantes
- b) voten al menos uno de los dos
- c) vote el hombre dado que su esposa lo hizo
- d) no vote ninguno
- e) vote solo el hombre
- f) vote solo uno
- g) no vote la mujer dado que el esposo votó.

Sea: $H \rightarrow$ Hombre casado vote.

$M \rightarrow$ Mujer casada vote.

Se tiene: $P(H) = 0,6$; $P(M) = 0,5$; $P(M/H) = 0,7$.

a) $P(M \cap H) = P(M/H)P(H) = 0,7 \cdot 0,6 = 0,42$

b) $P(M \cup H) = P(M) + P(H) - P(M \cap H) = 0,5 + 0,6 - 0,42 = 0,68$

c) $P(H/M) = \frac{P(H \cap M)}{P(M)} = \frac{0,42}{0,5} = 0,84$

d) $P(M^c \cap H^c) = P[(M \cup H)^c] = 1 - P(M \cup H) = 1 - 0,68 = 0,32$

e) $P(M^c \cap H) = P(H) - P(M \cap H) = 0,6 - 0,42 = 0,18$

f) $P[(M^c \cap H) \cup (M \cap H^c)] = P(M^c \cap H) + P(M \cap H^c) = P(H) - P(M \cap H) + P(M) - P(M \cap H)$
 $= 0,6 - 0,42 + 0,5 - 0,42 = 0,26$

g) $P(M^c/H) = 1 - P(M/H) = 1 - 0,7 = 0,3$

Las fórmulas que veremos a continuación facilitan el cálculo de las probabilidades como vía lógica para la solución de algunos problemas.

Fórmula de la probabilidad total (Veamos un ejemplo para después generalizar):

Ejemplo 4: Se tienen 3 urnas que contienen bolas negras y blancas. La primera urna contiene 2 bolas negras y una blanca, la segunda urna contiene 5 bolas blancas y la tercera urna contiene 3 bolas negras y 4 blancas. El experimento consiste en escoger una urna al azar y se extrae de ella, aleatoriamente una bola.

Calculemos la probabilidad del evento B- Extraer una bola negra.

La probabilidad de B estará sujeta a la urna de donde se saque, por tanto definamos los eventos:

- A_1 - Seleccionar la urna 1
- A_2 - Seleccionar la urna 2
- A_3 - Seleccionar la urna 3

Veamos que aquí:

$A_1 \cap A_2 \cap A_3 = \emptyset$ y $A_1 \cup A_2 \cup A_3 = S$ (Son eventos excluyentes y exhaustivos)

Además: $B = (B \cap A_1) \cup (B \cap A_2) \cup (B \cap A_3)$

Por tanto: $P(B) = P(B \cap A_1) + P(B \cap A_2) + P(B \cap A_3)$

De aquí: $P(B) = P(B/A_1)P(A_1) + P(B/A_2)P(A_2) + P(B/A_3)P(A_3)$

Calculando: $P(B) = \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{3} + 0 \cdot \frac{1}{3} + \frac{3}{7} \cdot \frac{1}{3} = \frac{2}{9} + 0 + \frac{1}{7} = \frac{23}{63}$

Consideremos un experimento que se realiza en dos etapas: en la primera, los sucesos posibles, $A_1; A_2; \dots; A_n$ son mutuamente excluyentes y exhaustivos, con probabilidades conocidas, $P(A_i)$, tales que $\sum P(A_i) = 1$. En la segunda etapa, los resultados posibles, B_j , dependen de los de la primera, y se conocen las probabilidades condicionadas $P(B_j/A_i)$ de obtener cada posible resultado B_j cuando aparece en la primera etapa el A_i .

De forma general tenemos para un resultado B en particular:

$$P(B) = \sum_{i=1}^n P(B/A_i) P(A_i) \quad (\text{Fórmula de la Probabilidad Total})$$

Fórmula de Bayes:

Esta fórmula nos permite calcular la probabilidad condicional de un evento cualquiera perteneciente a una familia de eventos exhaustivos y mutuamente excluyentes, si sabemos que ha ocurrido un evento B del espacio y conocidas las probabilidades indicadas para el caso anterior.

Partiremos del mismo ejemplo:

Supongamos ahora que conocemos que se ha extraído una bola negra, pero queremos saber cuál es la probabilidad de que haya sido seleccionada de la urna 1.

$$\text{Aquí se pide: } P(A_1/B) = \frac{P(A_1 \cdot B)}{P(B)} = \frac{P(B/A_1)P(A_1)}{P(B)} = \frac{2/3 \cdot 1/3}{23/63} = 14/23$$

De manera general podemos decir:

$$P(A_i/B) = \frac{P(A_i \cdot B)}{P(B)}$$

Aplicando la fórmula de la probabilidad total y para la intersección de eventos tenemos:

$$P(A_i/B) = \frac{P(B/A_i)P(A_i)}{\sum_{j=1}^n P(B/A_j)P(A_j)} \quad (\text{Fórmula de Bayes})$$

Estudio Independiente:

Ejercicios L/T. Walpole pág. 69.

L/T. Walpole pág. 72. (Estudio Regla de Bayes y Probabilidad Total).

Ejercicios L/T. Walpole pág. 76.

Ejercicios L/T Miller pág. 75; 78

Ejercicios Guía Tema I-Introducción a las Probabilidades.