

**Razonamiento Aproximado. Ingeniería Informática. 2do Año.**

**Tema I: Introducción a las Probabilidades.**

L/T. Walpole (pág. 81-224); L/T. Miller (81-174)

**Variables aleatorias. Variables aleatorias discretas. Funciones de probabilidad y distribución.**

Hasta el momento hemos visto el cálculo de probabilidades dirigidos a la aplicación en ciertos experimentos aleatorios a partir de los espacios muestrales de los elementos básicos de probabilidad, calculando, en todos los casos, probabilidades a sucesos donde es aplicable la definición clásica o utilizando las propiedades comunes a todas las probabilidades.

A partir de ahora pasaremos a una etapa superior donde trataremos de realizar generalizaciones en el enfoque con que estudiaremos, en su comportamiento probabilístico, los fenómenos aleatorios. Pasaremos a estudiar los conceptos de variables aleatorias y sus funciones de distribución o leyes de probabilidad.

A partir de aquí integraremos los conocimientos generales sobre las leyes de probabilidad y sus momentos para describir adecuadamente algunos fenómenos aleatorios que se presentan con frecuencia en la práctica, a partir de la determinación de la ley de probabilidad que estos siguen.

Fundamentalmente veremos en esta parte modelos univariantes los cuales se presentan con cierta frecuencia en problemas prácticos.

Hasta ahora hemos realizado una descripción cualitativa de los fenómenos aleatorios, a través del concepto de *espacio muestral*. Sin embargo, en la práctica usualmente el aspecto que puede ser de interés es el estudio de elementos cuantitativos de un fenómeno aleatorio. Por ejemplo:

Ejemplo 1: Consideremos una urna que contiene 5 bolas: 3 blancas y 2 negras. Si realizamos el experimento de extraer una muestra de tamaño 2, de una en una sin reemplazamiento, la cantidad de bolas blancas que contiene cualquiera de las muestras extraídas es una variable aleatoria.

Variable Aleatoria: Es una función de  $S$  en  $R$ , que a cada posible resultado de un experimento le hace corresponder un solo valor numérico:

$$\begin{array}{ccc} X: S & \longrightarrow & R \\ S & \longrightarrow & X(s) \end{array}$$

En el ejemplo:

$$N(S) = 5 \cdot 4 = 20$$

$X$ : # de bolas blancas en la muestra.

$X$ : 0, 1, 2

$$P(X = 0) = 2/20 = 0.1$$

$$P(X = 1) = 12/20 = 0.6$$

$$P(X = 2) = 6/20 = 0.3$$

$$P(X = 0) + P(X = 1) + P(X = 2) = 1$$

(Estas variables aleatorias sirven para definir eventos)

En el ejemplo:

1- Que haya exactamente una bola blanca en la muestra ( $X=1$ )

2- Que haya al menos una bola blanca en la muestra ( $X>0$ ) o ( $X \geq 1$ )

(Por tanto a partir de este momento en algunos ejercicios lo primero que debemos definir es la variable aleatoria a analizar).

Las variables aleatorias son clasificadas en dependencia de los valores que ella puede tomar en: **discreta y continuas**. Las discretas se caracterizan por tomar un conjunto de valores numerables, que pueden ser finitos o infinitos, por ejemplo: número de bolas blancas, número de estudiantes que aprueban una asignatura, cantidad de personas que llegan a una cola, en un intervalo de tiempo  $t$ . Las variables continuas siempre toman todos los valores de un cierto intervalo de  $R$ . Por ejemplo: la estatura de una persona, el que demora en ser transmitida cierta información, etc.

#### Leyes de probabilidad de las variables aleatorias:

El concepto de v.a nos permite, como hemos visto, definir eventos y calcular la probabilidad de ocurrencia de los mismos, a continuación estudiaremos diferentes tipos de funciones asociadas a las variables aleatorias que nos posibilitarán el cálculo de probabilidades.

- Función de probabilidad de una v.a discreta:

Se llama función de probabilidad de una v.a.d. a la función  $p(x) = P(X = x)$  para todo número real  $x$ . ( $f(x)$ )

Propiedades:

1.  $p(x) \geq 0$
2.  $\sum_{\forall x \in R} p(x) = 1$

Ejemplo:

X	0	1	2	3	4	5
p	0,2	0,2	0,1	0,1	0,1	0,3

$$\sum_{\forall x \in R} p(x) = 1$$

Nótese como

$$P(X > 2) = 0,1 + 0,1 + 0,3 = 0,5$$

$$P(1 \leq X \leq 4) = 0,2 + 0,1 + 0,1 = 0,4$$

$$P(X < 3) = 0,2 + 0,2 + 0,1 = 0,5$$

- Función de distribución de una v.a.

Se llama función de distribución de una v.a. a la función  $F_x(t) = P(X \leq t)$ , para todo  $t$  real.

(De aquí se infiere que tanto a una variable discreta como aleatoria se puede asociar una función de distribución)

$$F_x(t) = P(X \leq t) = \sum_{x \leq t} p(x)$$

Podemos entonces afirmar:

Ejemplo:

$$F_x(-1) = P(X \leq -1) = 0$$

$$F_x(0) = P(X \leq 0) = 0,2$$

$$F_x(0,5) = P(X \leq 0,5) = P(X = 0) = 0,2$$

$$F_x(1) = P(X \leq 1) = 0,4$$

$$F_x(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t < 0 \\ 0,2 & \text{si } 0 \leq t < 1 \\ 0,4 & \text{si } 1 \leq t < 2 \\ 0,5 & \text{si } 2 \leq t < 3 \\ 0,6 & \text{si } 3 \leq t < 4 \\ 0,7 & \text{si } 4 \leq t < 5 \\ 1 & \text{si } t \geq 5 \end{cases}$$

Propiedades:

1. Es una función no decreciente
2.  $F_x(-\infty) = 0$
3.  $F_x(+\infty) = 1$
4.  $P(X > t) = 1 - F_x(t)$
5.  $P(a < X \leq b) = F_x(b) - F_x(a)$

Características numéricas de una v.a.

Como hemos visto hasta aquí el comportamiento de una v.a.d. es descrito a través de su función de probabilidad o de distribución. Sin embargo es útil y necesario en muchas ocasiones una descripción más breve y sintetizada del comportamiento de una v.a. Para ello estudiaremos características numéricas de una v.a.d. las cuales permiten describir las características fundamentales de su comportamiento.

- Valor esperado o media de una v.a (Medida que describe la localización de la distribución)  
✓ Discreta:  $E(x) = \mu = \sum_{\forall x \in R} xp(x)$

Retomando el ejemplo visto:

X	0	1	2	3	4	5
p	0,2	0,2	0,1	0,1	0,1	0,3

Calculemos el valor esperado de la variable x:

$$E(x) = 0 \cdot 0,2 + 1 \cdot 0,2 + 2 \cdot 0,1 + 3 \cdot 0,1 + 4 \cdot 0,1 + 5 \cdot 0,3 = 1,61$$

Nótese como el valor esperado no tiene que coincidir con algún valor que toma la variable, pero si debe estar dentro del intervalo de dicha variable.

Propiedades:

1.  $E(c) = c$
2.  $E(cX) = cE(X)$
3.  $E(X + Y) = E(X) + E(Y)$
4.  $E(X \cdot Y) = E(X) \cdot E(Y)$  si X, Y son independientes

El valor esperado nos permite conocer el valor promedio de la v.a. a continuación estudiaremos la característica numérica que nos dará información de la variabilidad o dispersión de los valores de la v.a. con respecto al valor esperado.

- Varianza  
 $V(X) = E[X - E(X)]^2 = E(X^2) - (E(X))^2$   
- V.a. discreta:

$$V(x) = \sigma^2 = \sum_{\forall x} x^2 p(x) - \left( \sum_{\forall x} xp(x) \right)^2$$

Propiedades:

1.  $V(c) = 0$
2.  $V(cX) = c^2 V(X)$
3.  $V(X + Y) = V(X) + V(Y)$  si X, Y son independientes

La raíz cuadrada de la varianza se llama desviación típica y se denota por  $\sigma$ :

$$\sigma = +\sqrt{V(x)}$$

**Variables aleatorias continuas. Funciones de densidad y distribución.**

Ahora continuaremos con el análisis de las funciones que caracterizan a las variables continuas, en este caso las funciones de densidad y distribución. En el caso de la asignatura esta temática nos interesa en principio desde el punto de vista informativo, ya que no es nuestro objetivo volver a evaluar el cálculo integral pero sí conocer la estructura de las funciones que caracterizan a las variables aleatorias continuas.

*Función de densidad probabilística.*

Las leyes de probabilidad más generales, propias de todas las v.a., son las funciones de distribución. Para las variables discretas definimos la función de probabilidad como la ley de probabilidad particular para estas variables a continuación definiremos la que caracteriza a las variables continuas: la función de densidad probabilística.

*Función de densidad probabilística.*

Se llama función de densidad probabilística de una v.a.c.  $X$ , a la función  $f$  tal que:

$$1) \quad f(x) \geq 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

$$2) \quad \int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = 1$$

$$3) \quad p(a \leq X \leq b) = \int_a^b f(x)dx$$

Por tanto una vez conocida la función de distribución de una variable aleatoria, podemos determinar la función de densidad probabilística, derivando dicha función, por otro lado, si queremos encontrar la función de distribución, conocida la función de densidad, podemos plantear:

$$F_x(t) = P(X \leq t) = \int_{-\infty}^t f(x)dx$$

Ejemplo 2: Una variable aleatoria tiene como función de densidad:

$$f(t) = \begin{cases} t^2 & 0 \leq t < 1 \\ 1/3 & 2 \leq t < 4 \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

- Compruebe que es una función de densidad
- Calcule la probabilidad de  $P(X < 1/2)$  y  $P(X > 3)$
- Halle la función de distribución de  $t$
- Calcule las probabilidades anteriores a partir de la función de distribución.

*Respuesta:*

a) Se cumple que  $f(x) \geq 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$

Veremos ahora la segunda propiedad, es decir:  $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = 1$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = \int_{-\infty}^0 0dx + \int_0^1 x^2dx + \int_1^2 0dx + \int_2^4 1/3dx + \int_4^{+\infty} 0dx = \left[ \frac{x^3}{3} \right]_0^1 + \left[ \frac{x}{3} \right]_2^4 = 1/3 + 2/3 = 1$$

$$b) P(X < 1/2) = \int_{-\infty}^{1/2} f(x)dx = \int_{-\infty}^0 0dx + \int_0^{1/2} x^2 dx = \left[ \frac{x^3}{3} \right]_0^{1/2} = \frac{(1/2)^3}{3} = 1/24$$

$$P(X > 3) = \int_3^{+\infty} f(x)dx = \int_3^4 \frac{1}{3} dx + \int_4^{+\infty} 0dx = \left[ \frac{x}{3} \right]_3^4 = \frac{4}{3} - \frac{3}{3} = 1/3$$

c) Función de Distribución:

**Intervalo  $(-\infty; 0)$**

$$F_x(t) = \int_{-\infty}^t 0dx = 0$$

**Intervalo  $[0; 1)$**

$$F_x(t) = \int_{-\infty}^0 0dx + \int_0^t x^2 dx = \left[ \frac{x^3}{3} \right]_0^t = t^3/3$$

**Intervalo  $[1; 2)$**

$$F_x(t) = \int_{-\infty}^0 0dx + \int_0^1 x^2 dx + \int_1^t 0dx = \left[ \frac{x^3}{3} \right]_0^1 = 1/3$$

**Intervalo  $[2; 4)$**

$$F_x(t) = \int_{-\infty}^0 0dx + \int_0^1 x^2 dx + \int_1^2 0dx + \int_2^t \frac{1}{3} dx = \left[ \frac{x^3}{3} \right]_0^1 + \left[ \frac{x}{3} \right]_2^t = 1/3 + t/3 - 2/3 = (t-1)/3$$

**Intervalo  $[4; +\infty)$**

$$F_x(t) = \int_{-\infty}^0 0dx + \int_0^1 x^2 dx + \int_1^2 0dx + \int_2^4 \frac{1}{3} dx + \int_4^t 0dx = \left[ \frac{x^3}{3} \right]_0^1 + \left[ \frac{x}{3} \right]_2^4 = 1/3 + 2/3 = 1$$

De aquí la función de densidad quedaría:

$$F_x(t) = \begin{cases} 0 & t < 0 \\ t^3/3 & 0 \leq t < 1 \\ 1/3 & 1 \leq t < 2 \\ (t-1)/3 & 2 \leq t < 4 \\ 1 & t > 4 \end{cases}$$

$$d) P(X < 1/2) = P(X \leq 1/2) = F_x(1/2) = \frac{(1/2)^3}{3} = 1/24$$

$$P(X > 3) = 1 - P(X \leq 3) = 1 - F_x(3) = 1 - \frac{(3-1)}{3} = 1 - 2/3 = 1/3$$

*Características numéricas de una v.a.*

Como hemos visto hasta aquí el comportamiento de una v.a. es descrito a través de su función de probabilidad, de densidad o de distribución. Sin embargo al igual que en el caso discreto estudiaremos las características numéricas de una v.a.c. las cuales permiten describir las características fundamentales de su comportamiento.

- *Valor esperado o media de una v.a*

✓ *Continua:*

$$E(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} xf(x)dx$$

- *Varianza*

$$V(X) = E[X - E(X)]^2 = E(X^2) - (E(X))^2$$

- *V.a continua:*

$$\int_{-\infty}^{+\infty} x^2 f_x(x)dx - \left( \int_{-\infty}^{+\infty} xf_x(x)dx \right)^2$$

**Estudio Independiente:**

Ejercicios L/T. Walpole pág. 91.

L/T. Walpole pág. 94. (Distribuciones de probabilidad conjunta)- *Tema opcional.*

Ejercicios L/T. Walpole pág. 117. *Eje. 4.1-4.9 (Valor esperado-v.a.d); Ejer. 4.11-4.14 (Valor esperado-v.a.c)*

Ejercicios L/T. Walpole pág. 127. *Eje. 4.33-4.36 (Varianza-v.a.d); Ejer. 4.37-4.39 (Varianza-v.a.c)*

Ejercicios Guía Tema I-Variables aleatorias.

### ***Distribuciones teóricas discretas: Binomial y Poisson.***

Entre las distribuciones discretas más importante está la distribución Binomial, para la explicación de la misma es necesario conocer la distribución Bernoulli.

Un fenómeno Bernoulli es aquel donde solo son posible dos resultados: éxito y fracaso. Por tanto el espacio muestral será:

$$S = \{\text{éxito, fallo}\}$$

Donde el evento simple “éxito” tiene una probabilidad de ocurrencia  $p$  y el evento “fallo” una probabilidad  $1 - p$ . De ahí puede ser construida una variable aleatoria  $X$  en el espacio muestral  $S$ , asignando el valor  $X = 1$  a la ocurrencia de un éxito y el valor  $X = 0$  a la ocurrencia de un fallo. Así obtenemos la v.a Bernoulli que tiene como función de probabilidad la siguiente expresión:

$$p(x) = \begin{cases} p & \text{para } x = 1 \\ q & \text{para } x = 0 \\ 0 & \text{para otros valores} \end{cases}$$

Ahora estamos en condiciones de definir una variable con distribución Binomial que denota el número de éxitos que ocurren en  $n$  pruebas independientes y posee la siguiente función de probabilidad:

$$p(x) = \begin{cases} \binom{n}{x} p^x q^{n-x} & \text{para } x = 0, 1, 2, \dots, n \\ 0 & \text{para otros valores} \end{cases}$$

donde:

$n$ : es el número de pruebas independientes realizadas

$x$ : es el número de éxito

$p$ : probabilidad de ocurrencia de un éxito

Notación:  $X \sim B(n, p)$  Valor esperado de  $X$ ,  $E(X) = np$  Varianza de  $X$ ,  $V(X) = npq$

*Nota: En el L/T Walpole (pág. 726) aparece tabulada la función de distribución para la distribución Binomial donde podemos definir  $B(x; n, p) = \sum b(x; n, p)$*

Ejemplo 1:

La probabilidad de que un mensaje electrónico, según las características del centro, llegue a su destino en forma correcta es de 0,80. Determine la probabilidad de que un grupo de 10 nuevos mensajes:

- Todos se lleguen correctamente a su destino
- Al menos 8 lleguen a su destino correctamente
- Ninguno llegue
- A lo sumo 5 lleguen
- Promedio de los que llegan

$X$ : Número de mensajes que llegan de forma correcta a su destino en un grupo de 10 mensajes.

$$p = 0.8 \quad X \sim B(10, 0.8)$$

- $P(X = 10) = P(X \leq 10) - P(X \leq 9) = B(10; 10, 0.8) - B(9; 10, 0.8) = 1 - 0.8926 = 0.1074$
- $P(X \geq 8) = 1 - P(X < 8) = 1 - P(X \leq 7) = 1 - B(7; 10, 0.8) = 1 - 0.3222 = 0.6778$
- $P(X = 0) = P(X \leq 0) = B(0; 10, 0.8) = 0$
- $P(X \leq 5) = B(5; 10, 0.8) = 0.0328$

En el libro aparece la distribución Hipergeométrica (pág. 89-Miller; pág. 152 Walpole) que aunque no trataremos en esta conferencia es otra distribución que puede presentarse, aunque su deducción desde el punto de vista combinatorio es más evidente, no obstante se propone de estudio independiente.

También en los libros básicos aparecen otras distribuciones pero haremos énfasis en otra de ellas.

### Distribución Poisson

Cuando consideramos la ocurrencia de ciertos sucesos en una unidad de tiempo dada T o en una región, y estos sucesos ocurren de forma independiente, entonces la frecuencia de ocurrencia de estos fenómenos está asociada a una distribución de Poisson. En estos casos esta se define de la siguiente manera. (Veremos el caso asociado al tiempo)

X: Número de éxitos en un intervalo de tiempo T. La función de probabilidad estará dada por la expresión:

$$p(x) = \frac{\lambda^x e^{-\lambda}}{x!} \quad x = 0, 1, 2, \dots$$

donde:  $\lambda = \theta T$

Notación:  $X \sim P(\lambda)$

$E(X) = V(X) = \lambda$

$\theta$ - Representa el número medio de ocurrencias del fenómeno por unidad de tiempo.

*Nota: En el L/T Walpole (pág. 732) aparece tabulada de igual manera la función de distribución para la distribución Poisson donde podemos definir  $P(x; \lambda) = \sum p(x; \lambda)$*

Ejemplo 2:

Un sitio web tiene una tasa media de visitas de 3 cada hora. Calcule la probabilidad de que:

- a) No se visite el sitio en dos horas.
- b) Se visite 3 veces en 3 horas.
- c) Se visite al menos dos veces en 2 horas.
- d) Se visite hasta tres veces en 30 minutos.

X: número de visitas en cierta unidad de tiempo.

$\theta = 3$  interrupciones/hora

- a)  $T = 2, \lambda = 3 \cdot 2 = 6$

$$P(X = 0) = P(X \leq 0) = P(0; 6) = 0,0025$$

- b)  $T = 3, \lambda = 3 \cdot 3 = 9$

$$P(X = 3) = P(X \leq 3) - P(X \leq 2) = P(3; 9) - P(2; 9) = 0,0212 - 0,0062 = 0,015$$

- c)  $\lambda = 6$

$$P(X \geq 2) = 1 - P(X \leq 1) = 1 - P(1; 6) = 1 - 0,0174 = 0,9836$$

- d) Debemos llevar todo a la misma unidad de tiempo.  $T = 1/2, \lambda = 3 \cdot 1/2 = 3/2 = 1,5$

$$P(X \leq 3) = P(3; 1,5) = 0,9344$$

Ahora veremos otra aplicación de la distribución de Poisson relacionada con la distribución binomial que aunque ha quedado en desuso refleja la relación entre ambas distribuciones.



La utilización de la distribución Binomial cuando  $n$  es lo suficientemente grande, implica la realización de operaciones muy laboriosas por lo que se realiza una aproximación, con el objetivo de simplificar el cálculo de probabilidades. La distribución Poisson es una aproximación a la distribución Binomial para el caso que  $n$  sea muy grande y  $p$  muy pequeña. La deducción de esta distribución se hace pasando al límite la expresión de la función de distribución Binomial cuando  $n \rightarrow \infty$  y  $p \rightarrow 0$ . (Aunque no existe un criterio unificado generalmente se utiliza esta aproximación en los casos ( $np \leq 5$  y  $n \geq 50$ ) o ( $p < 0,1$ ) y  $\lambda = np$  para el cálculo.

### **Estudio Independiente:**

Ejercicios L/T. Walpole pág. 150. (Distribución binomial)

Ejercicios L/T. Walpole pág. 164. (Distribución Poisson)

Ejercicios Guía Tema I-Variables aleatorias.

### ***Distribuciones teóricas continuas: Normal, T-student, Chi-cuadrado, F-Fisher.***

Ahora estamos en condiciones de analizar algunas de las distribuciones continuas más comunes y que utilizaremos a lo largo de la asignatura:

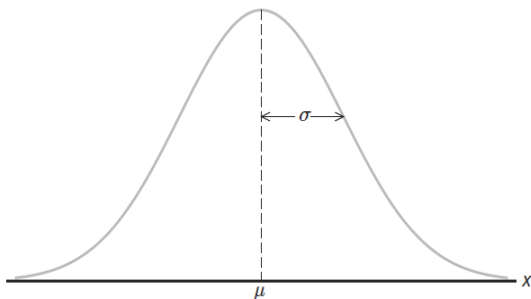
#### **Distribución Normal.**

Descubierta en 1733 por De Moivre, es la más importante de todas las distribuciones, por la gran frecuencia con que en la práctica se presentan variables con esta distribución o una aproximación de ella. Cuando una variable es el resultado de muchos factores aleatorios independientes cada uno de los cuales aisladamente tiene un efecto despreciable, esa variable tiene un comportamiento normal; de ahí su gran frecuencia de aparición.

Se dice que una v.a. tiene distribución Normal con parámetros  $\mu$ ,  $\sigma^2$  si su función de densidad es:

$$f_x(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} \quad ; \text{ para } x, \mu \in \mathbb{R}; \sigma > 0$$

Notación:  $X \sim N(\mu, \sigma^2)$



#### **Propiedades:**

1. Simetría respecto a  $X = \mu$
2. Asintótica al eje  $x$
3. Área bajo la curva igual a 1
4.  $-\infty < X < +\infty$
5.  $E(X) = \mu$ ,  $V(X) = \sigma^2$

Para calcular probabilidades de eventos definidos a través de una v.a.  $X$  normalmente distribuida es necesario resolver la integral de la función de densidad la cual resulta muy difícil de hallar, además que para cada par de valores de  $\mu$ ,  $\sigma^2$  tenemos una distribución diferente lo que imposibilita la construcción de una tabla de probabilidades para cada par de valores de  $\mu$ ,  $\sigma^2$ . Para eliminar esta dificultad es que se realiza el proceso de tipificación de la variable aleatoria, que no es más que un cambio de origen y de escala para la curva normal, de manera que toda variable normalmente distribuida con parámetros  $\mu$ ,  $\sigma^2$ , se transforma en una normal con  $\mu = 0$  y  $\sigma = 1$ , haciendo la siguiente transformación (Proceso de Tipificación):  $Z = \frac{x-\mu}{\sigma}$

Sea:  $X \rightarrow N(\mu; \sigma^2)$  y  $Z \rightarrow N(0; 1)$  se tiene que:  $Z = \frac{x-\mu}{\sigma}$  (Proceso de estandarización o tipificación)

*Nota: En el L/T Walpole (pág. 735) aparece tabulada la función de distribución de la Variable Z (Distribución Normal estándar)*

Ejemplo:

$$X \sim N(20,4)$$

$$a) P(X > 22) = P\left(\frac{x-\mu}{\sigma} > \frac{22-20}{2}\right) = P(Z > 1) = 1 - P(Z \leq 1) = 1 - 0,8413 = 0,1587$$

$$b) P(16 < X < 22) = P(-2 < Z < 1) = P(Z \leq 1) - P(Z \leq -2) = 0,8413 - 0,0228 = 0,8185$$

#### Búsqueda de percentiles de orden $\alpha$ de $N(0,1)$

En ocasiones es de interés conocer el valor de Z que le corresponde un valor de probabilidad acumulada determinada,  $P(Z \leq Z_\tau) = \tau$ , determinar el valor de  $Z_\tau$  conocido el valor  $\tau$ :

Ejemplo: Calcular

$$a) Z_{0,90} = 1.28$$

#### Distribución T-student

Fue publicada por William Gosset en el primer decenio del Siglo XX.

Se dice que una v.a. tiene distribución t-student con parámetros  $v$  si su función de densidad es:

$$f(t) = \frac{K_v}{(1 + t^2/v)^{(v+1)/2}}$$

Notación:  $X \rightarrow T(v)$   $v$  grados de libertad.

*Nota: En el L/T Walpole (pág. 737) aparecen tabulados los valores críticos de la distribución T-Student (la habilidad que deben tener los estudiantes en este momento es saber utilizar la tabla)*

Ejemplo: En el libro de Texto tenemos:

$$P(t_{17} > V) = 0.1$$

Escribimos lo siguiente:

$$V = T_{0,1;17} = 1,333$$

Es decir en el libro de texto nos muestra la probabilidad acumulada a la derecha.

#### Distribución ji (chi)-cuadrado

Si  $X_1, X_2, \dots, X_v$ , son variables aleatorias  $N(0,1)$  e independientes.

$$\chi^2 = X_1^2 + X_2^2 + \dots + X_v^2$$

Fue publicada por Helmer en 1876.

Se dice que una v.a. tiene distribución chi-cuadrado con parámetro  $v$  si su función de densidad es:

$$f(x) = \begin{cases} K_v x^{(v-2)/2} e^{-x/2} & x > 0 \\ 0 & x \leq 0 \end{cases}$$

Notación:  $X \rightarrow \chi^2(v)$   $v$  grados de libertad.

*Nota: En el L/T Walpole (pág. 739) aparecen tabulados los valores críticos de la distribución Chi-cuadrado (la habilidad que deben tener los estudiantes en este momento es saber utilizar la tabla)*

En el libro de Texto tenemos :  $P(\chi_{17}^2 > V) = 0.05$

De aquí se suele escribir lo siguiente:  $V = \chi_{0,05;17}^2 = 27,587$

Es decir en el libro de texto nos muestra la probabilidad acumulada a la derecha.

### **Distribución F-Fisher.**

Introducida por el inglés Ronald Fisher (1890-1962). Es considerado uno de los fundadores de la Estadística Moderna.

Se dice que una v.a. tiene distribución F-Fisher con parámetros  $v_1; v_2$  si su función de densidad es:

$$f(x) = \begin{cases} K_{v_1;v_2}'' \cdot \frac{x^{\frac{v_1-2}{2}}}{(v_2 + v_1 x)^{\frac{v_1+v_2}{2}}} & x > 0 \\ 0 & x \leq 0 \end{cases}$$

Notación:  $X \rightarrow F(v_1; v_2)$

*Nota: En el L/T Walpole (pág. 739) aparecen tabulados los valores críticos de la distribución F-Fisher (la habilidad que deben tener los estudiantes en este momento es saber utilizar la tabla)*

En el libro de texto tenemos:  $P(F_{(10,20)} > V) = 0.01$

De aquí se suele escribir lo siguiente:  $F_{0,01;10;20} = 3,37$

Es decir en el libro de texto nos muestra la probabilidad acumulada a la derecha.

### **Estudio Independiente:**

Ejercicios L/T. Walpole pág. 186. (A partir del Ej. 6.5- Distribución Normal)

Ejercicios Guía Tema I-Variables aleatorias.