

Razonamiento Aproximado. Ingeniería Informática. 2do Año.

Tema III: Estimación y Dóctimas de Hipótesis.

L/T. Walpole (pág. 319-388); L/T. Miller (222-244-Hipótesis para la media; 271-varianza; 283-Proporción)

Introducción a las Dóctimas de Hipótesis. Dóctimas paramétricas para la media.

En el tema anterior se trataron los aspectos referentes al problema de estimación dentro de la inferencia estadística, nosotros continuaremos con otro de los aspectos esenciales dentro de la inferencia que son las pruebas de hipótesis.

El propósito del análisis estadístico es reducir el nivel de incertidumbre en el proceso de toma de decisiones. Los gerentes pueden tomar mejores decisiones sólo si tienen suficiente información a su disposición. La prueba de hipótesis es una herramienta analítica muy efectiva para obtener esta valiosa información, bajo una gran variedad de circunstancias. Existen muchos ejemplos comunes en los negocios:

- Un embotellador de bebidas suaves debe determinar si el peso promedio del contenido de sus botellas es 16 onzas ($\mu = 16$ onzas).
- Un productor de software de computador desea certificar que la proporción de sus productos que son defectuosos es menor del 3% ($\pi < 0.03$).
- Un fabricante de equipos deportivos desea saber si existe evidencia de que un proceso de producción ha reducido los costos promedios de producción por debajo de su nivel actual de US\$5 por unidad ($\mu < 5$).

Las ilustraciones de esta naturaleza son virtualmente ilimitadas en un escenario de negocios. Si se pueden obtener respuestas a estas preguntas y a muchas otras con algún grado de garantía, la toma de decisiones se vuelve más segura y es menos probable que conduzca a un error costoso.

Hipótesis Estadística:

Suposición que determina, parcial o totalmente, la distribución de probabilidad de una o varias variables aleatorias.

Tipos de Hipótesis:

- Especificuen un valor concreto o un intervalo para los parámetros de una variable.
- Establezcan la igualdad de las distribuciones de dos o más variables.
- Determinen la forma de la distribución de la variable.

Formulación de Hipótesis:

Hipótesis Nula (H_0): Es la hipótesis que se contrasta. Generalmente contiene la igualdad, es decir, en su formulación simbólica se emplea el operador igual a ($=$), aunque en ocasiones también se utilizan los operadores menor o igual a (\leq) o mayor o igual a (\geq).

Hipótesis Alternativa (H_1): Es la hipótesis que aceptamos implícitamente al rechazar H_0 , constituye su complemento.

Metodología:

La metodología actual de contraste de hipótesis es el resultado de los trabajos de R.A.Fisher, J. Neyman y E.S. Pearson entre 1920 y 1933.

- Definir la hipótesis nula a contrastar H_0 , y la hipótesis alternativa H_1 .
- Definir una medida de discrepancia entre los datos muestrales X y la hipótesis H_0 . (Estadígrafo).
- Definir que discrepancia consideraremos inadmisibles con H_0 . (Región Crítica: Región de rechazo de H_0).
- Tomar la decisión estadística y sugerir la práctica.

Ejemplo1:

Para realizar una prueba de hipótesis, se hacen algunas inferencias o supuestos con sentido acerca de la población. El embotellador de bebidas suaves citado anteriormente puede asumir, o plantear la hipótesis que el contenido promedio es de 16 onzas ($\mu = 16$). Esta **hipótesis nula** (H_0 :) se prueba contra la **hipótesis alternativa** (H_A :) que establece lo contrario. En este caso, el contenido promedio *no* es de 16 onzas ($\mu \neq 16$). Por tanto, se tendría que

$$H_0: \mu = 16 \quad H_A: \mu \neq 16$$

El término *nula* implica nada o nulo. El término surge de sus primeras aplicaciones por parte de los investigadores agrícolas quienes probaron la efectividad de un nuevo fertilizante para determinar su impacto en la producción de la cosecha. Asumieron que el fertilizante no hacía ninguna diferencia en el rendimiento hasta que éste produjo algún efecto. Por tanto, la hipótesis nula, tradicionalmente contiene alguna referencia de un signo con igual como “=”, “≥”, “≤”. Se analiza esta idea de forma más completa en una discusión posterior de las pruebas de hipótesis de una cola.

Con base en los datos muestrales, esta hipótesis nula es rechazada o no rechazada. Nunca se puede “aceptar” la hipótesis nula como verdadera. El no rechazo de la hipótesis nula solamente significa que la evidencia muestral no es lo suficientemente fuerte como para llevar a su rechazo. Incluso si $\bar{X} = 16$, no prueba que $\mu = 16$. Podría ser que μ sea 15.8 (o cualquier otro número), y debido al error de muestreo la media muestral acaba de igualar al valor de 16 que se plantea como hipótesis. Una analogía es que probar una hipótesis es como poner una persona en juicio. El acusado se halla o culpable o no culpable. Un veredicto de “inocente” nunca se considera. Un veredicto no culpable simplemente significa que la evidencia no es lo suficientemente fuerte como para encontrar culpable al acusado. No significa que él o ella sea inocente.

Se asume que se toma una muestra de n botellas y se halla una media de $\bar{X} = 16.15$ onzas. ¿Se puede concluir que la media poblacional no es 16? Después de todo, ¡16.15 no es 16! Probablemente no. Esta pequeña diferencia podría ser *estadísticamente insignificante* puesto que podría explicarse fácilmente como un simple error de muestreo. Es decir, que debido al error de muestreo es posible tener una población con una media de 16 y salir con una media muestral de $\bar{X} = 16.15$. Debido al azar, algunas botellas de la muestra pueden estar algo más llenas, produciendo una media muestral que sobrestime levemente la media poblacional. La evidencia muestral que $\bar{X} = 16.15$ no es lo suficientemente fuerte como para desencadenar un rechazo de la hipótesis nula de que $\mu = 16$.

Diferencia estadísticamente insignificante En la diferencia entre el valor de la media poblacional bajo la hipótesis y el valor de la media muestral que es lo suficientemente pequeña como para atribuirla a un error de muestreo.

Al tomar cualquier decisión en una prueba de hipótesis nos encontramos con las siguientes situaciones que determinan los posibles errores de decisión:

Hipótesis H_0	Decisión	
	No rechazar H_0	Rechazar H_0
Verdadera	Correcta 1- α	Error tipo I α
Falsa	Error tipo II β	Correcta 1- β

La posibilidad de cometer ambos tipos de errores la cuantificaremos en términos de probabilidad, llamaremos a estas probabilidades:

- Riesgo α : Máxima probabilidad de error de tipo I
- Riesgo β : Probabilidad de error de tipo II.

Es decir:

$P(\text{Rechazar } H_0 / H_0 \text{ cierta}) \leq \alpha$

$P(\text{Aceptar } H_0 / H_0 \text{ falsa}) = \beta$

α : Le llamaremos nivel de significación. Es usual, en la práctica, trabajar con los niveles de significación de 0.05, 0.01 ó 0.1.

Dóctimas de hipótesis paramétricas:

Hipótesis sobre parámetros dados de una distribución de probabilidad dada.

Dada una hipótesis sobre un parámetro θ dado se tienen, en general, tres caso posibles:

Caso 1:

$H_0: \theta = \theta_0$

$H_1: \theta \neq \theta_0$

Bilateral

Caso 2:

$H_0: \theta \leq \theta_0$

$H_1: \theta > \theta_0$

Unilateral

Caso 3:

$H_0: \theta \geq \theta_0$

$H_1: \theta < \theta_0$

Dóctimas para los parámetros de una distribución normal.

- Dóctimas para el parámetro μ de una distribución normal (σ^2 conocida)

1- Hipótesis:

Caso 1:

$H_0: \mu = \mu_0$

$H_1: \mu \neq \mu_0$

Caso 2:

$H_0: \mu \leq \mu_0$

$H_1: \mu > \mu_0$

Caso 3:

$H_0: \mu \geq \mu_0$

$H_1: \mu < \mu_0$

2- Estadígrafo de Prueba:

$$Z = \frac{\bar{X} - \mu_0}{\sigma / \sqrt{n}}$$

3- Región Crítica:

Caso 1:

$$|Z| > Z_{1-\alpha/2}$$

Caso 2:

$$Z > Z_{1-\alpha}$$

Caso 3:

$$Z < -Z_{1-\alpha}$$

Ejemplo 2:

Un fabricante sostiene que un galón de su pintura cubre al menos 400 pies cuadrados como promedio. El MES desea comprar una cierta cantidad para diferentes universidades.

Se somete a prueba la validez de esta afirmación tomando una m.a.s. de 36 latas de un galón las que cubrieron en promedio 385 pies cuadrados. Por experiencias anteriores se conoce que estos tipos de pinturas tienen una desviación estándar de 8 pies cuadrados.

■ ¿Desde el punto de vista estadístico que decisión se debe tomar a un nivel de significación del 5%?

Solución:

1- Hipótesis:

Caso 3:

$$H_0 : \mu \geq 400$$

$$H_1 : \mu < 400$$

2- Estadígrafo de Prueba:

$$Z = \frac{\bar{X} - \mu_0}{\sigma / \sqrt{n}} = \frac{385 - 400}{8 / \sqrt{6}} = -11.25$$

3- Región Crítica:

$$Z < -Z_{1-\alpha} = -Z_{1-0.05} = -Z_{0.95} = -1.645$$

4- Decisión:

Decisión Estadística: El estadígrafo de prueba cae en la región crítica, por lo que rechazamos H_0 .

Decisión práctica: A ese nivel de significación no aceptamos lo dicho por el fabricante y sugerimos no comprar la pintura al fabricante.

- Décimas para el parámetro μ de una distribución normal (σ^2 desconocida)

1- Hipótesis: (las mismas)

2- Estadígrafo de Prueba:

$$T = \frac{\bar{X} - \mu_0}{s / \sqrt{n}}$$

3- Región Crítica:

Caso 1:

$$|T| > T_{\alpha/2; n-1}$$

Caso 2:

$$T > T_{\alpha; n-1}$$

Caso 3:

$$T < -T_{\alpha; n-1}$$

Ejemplo 3:

Un vendedor de un tipo de pilas para calculadoras sostiene que la vida útil de las pilas que vende sobrepasa significativamente las 20 horas. Teniendo en cuenta que se han recibido continuas quejas de los usuarios con respecto a la duración media sostenida por el vendedor, se somete a prueba 10 pilas.

Se obtuvieron los siguientes resultados de tiempos de duración, en horas: 18, 25, 19, 20, 23, 21, 20, 19, 23, 22.

■ Teniendo en cuenta que la duración en horas de las pilas sigue una distribución normal verifique la afirmación del vendedor a un nivel de significación de un 5%.

Solución:

1- Hipótesis:

Caso 3:

$$H_0 : \mu \leq 20$$

$$H_1 : \mu > 20$$

STATGRAPHICS

Desviación Estándar de la Muestra = 2,21108

Prueba t

Hipótesis Nula: media = 20,0

Alternativa: mayor que

Estadístico t = 1,43019

Valor-P = 0,0932233

No se rechaza la hipótesis nula para alfa = 0,05.

2- Estadígrafo de Prueba:

$$T = \frac{\bar{X} - \mu_0}{S / \sqrt{n}} = \frac{21 - 20}{2.21 / \sqrt{10}} = 1.43$$

3- Región Crítica:

$$T > T_{\alpha; n-1} = -T_{0,05; 10-1} = T_{0,05; 9} = 1.833$$

4- Decisión:

Decisión Estadística: El estadígrafo de prueba no cae en la región crítica, por lo que no rechazamos H_0 .

Decisión práctica: A ese nivel de significación no consideramos que el vendedor puede tener razón y tienen fundamento las quejas de los usuarios.

Veamos lo que pasaría si se obtuvieran los siguientes resultados, en horas: 28, 25, 19, 20, 23, 21, 20, 19, 23, 24.

Solución:

1- Hipótesis:

Caso 3:

$$H_0 : \mu \leq 20$$

$$H_1 : \mu > 20$$

STATGRAPHICS

Prueba de Hipótesis para Tiempo

Media Muestral = 22,2

Desviación Estándar de la Muestra = 2,93636

Prueba t

Hipótesis Nula: media = 20,0

Alternativa: mayor que

Estadístico t = 2,36926

Valor-P = 0,02098

Se rechaza la hipótesis nula para alfa = 0,05.

2- Estadígrafo de Prueba:

$$T = \frac{\bar{X} - \mu_0}{S / \sqrt{n}} = \frac{22.2 - 20}{2.94 / \sqrt{10}} = 2.37$$

3- Región Crítica:

$$T > T_{\alpha; n-1} = -T_{0,05; 10-1} = T_{0,05; 9} = 1.833$$

4- Decisión:

Decisión Estadística: El estadígrafo de prueba cae en la región crítica, por lo que rechazamos H_0 .

Decisión práctica: A ese nivel de significación consideramos que el vendedor puede tener razón y son infundadas las quejas de los usuarios.

Es importante apuntar que:

- Los errores tipo I y tipo II están relacionados. Una disminución en la probabilidad de uno por lo general tiene como resultado un aumento en la probabilidad del otro.
- El tamaño de la región crítica, y por tanto la probabilidad de cometer un error tipo I, siempre se puede reducir al ajustar el o los valores críticos.
- Un aumento en el tamaño muestral n reducirá α y β de forma simultánea.
- Si la hipótesis nula es falsa, β es un máximo cuando el valor real del parámetro se aproxima al hipotético. Entre más grande sea la distancia entre el valor real y el valor hipotético, será menor β .

Una hipótesis estadística es una afirmación con respecto a alguna característica desconocida de una población de interés. La esencia de probar una hipótesis estadística es el decidir si la afirmación se encuentra apoyada por la evidencia experimental que se obtiene a través de una muestra aleatoria. En forma general, la afirmación involucra ya sea a algún parámetro o a alguna forma funcional no conocida de la distribución de interés a partir de la cual se obtiene una muestra aleatoria. La decisión acerca de si los datos muestrales apoyan estadísticamente la afirmación se toma con base en la probabilidad, y, si ésta es mínima, entonces será rechazada.

Dócima para el parámetro σ^2 de una población normal. Dóclimas para el parámetro p de una distribución binomial.

Hipótesis relativa a σ^2 de una población normal

Existen diversos casos en los cuales se hace necesario comprobar el comportamiento de la variabilidad de una población de elementos y tener una idea de lo que acontece, por ejemplo, en una línea de producción de cilindros de gas puede que no se esté cumpliendo el plan de producción diario y esto puede verse afectado porque la variabilidad del tiempo de ejecución de las operaciones manuales del turno de noche haya aumentado, o que el rendimiento de un cultivo haya mejorado al usar un tipo diferente de fertilizante que disminuya la variabilidad del rendimiento, etc.

Procedimiento

1. Plantear la Hipótesis.

En el caso de las pruebas relativas a la varianza, también se tienen tres planteamientos posibles; un caso bilateral y dos casos unilaterales.

$$H_0 : \sigma^2 = \sigma_0^2$$

$$H_1 : \sigma^2 \neq \sigma_0^2 \Rightarrow \text{caso bilateral}$$

$$H_0 : \sigma^2 \leq \sigma_0^2 \quad H_0 : \sigma^2 \geq \sigma_0^2$$

$$H_1 : \sigma^2 > \sigma_0^2 \quad H_1 : \sigma^2 < \sigma_0^2 \Rightarrow \text{casos unilaterales}$$

σ_0^2 : valor hipotético

2. Determinar el estadístico de prueba.

Esta prueba se fundamenta en el estadístico $\chi^2 = \frac{(n-1)S^2}{\sigma_0^2}$ correspondiente a la distribución muestral de la varianza, el cual es una variable que tiene la distribución χ_{n-1}^2 .

3. Criterio de decisión (Región crítica)

En este caso, el conjunto de valores del estadígrafo χ^2 para los cuales se rechaza la hipótesis nula se indican en la siguiente tabla:

Hipótesis alterna	Se rechaza la hipótesis nula si:
$\sigma^2 \neq \sigma_0^2$	$\chi^2 > \chi_{\alpha/2; n-1}^2$ o $\chi^2 < \chi_{1-\alpha/2; n-1}^2$
$\sigma^2 > \sigma_0^2$	$\chi^2 > \chi_{\alpha; n-1}^2$
$\sigma^2 < \sigma_0^2$	$\chi^2 < \chi_{1-\alpha; n-1}^2$

*Para el caso alternativo $\sigma^2 \neq \sigma_0^2$ se rechazaría H_0 de cumplirse al menos una de las dos regiones críticas. Para que no se rechace H_0 tendrán que incumplirse ambas regiones críticas.

Ejemplo 4:

La desviación típica de la resistencia a la ruptura de ciertos cables producidos por una compañía viene dada por 240 libras. Después de introducir un cambio en el proceso de producción de estos cables, la resistencia a la ruptura de una muestra de 8 cables dio una desviación típica de 300 libras. Investigue con $\alpha = 0,01$ si es significativo el incremento en la variabilidad de la resistencia a la ruptura de los cables producidos por la compañía. Asuma normalidad en la variable.

X: resistencia de ciertos cables a la ruptura (lbs)

$n = 8$ $S = 300$ $\sigma_0 = 240$ $\alpha = 0,01$

1. Hipótesis:

$H_0 : \sigma \leq 240$

$H_1 : \sigma > 240$

2.- Estadígrafo:

$$\chi^2 = \frac{7 \cdot 300^2}{240^2} = 10,9375$$

3.- Región crítica:

$$\chi^2 > \chi_{\alpha; n-1}^2$$

$$10,9375 > \chi_{0,01; 7}^2$$

$$10,9375 \nless 18,5$$

R/ Decisión Estadística: El estadígrafo de prueba no cae en la región crítica, por lo que no rechazamos H_0 .

R/ Decisión práctica: A ese nivel de significación consideramos que el incremento en la variabilidad de la resistencia a la ruptura de los cables producidos por la compañía no es significativo.

Décima para la proporción p de una población con distribución binomial.

Varios de los métodos utilizados en la inspección muestral, en la verificación de confiabilidad, en los estudios de organización del trabajo y en el control de la calidad se fundamentan de manera general en pruebas de la hipótesis nula de que una proporción (porcentaje o probabilidad) es igual a una constante determinada.

Consideremos una población y una característica a observar en cada individuo de esa población donde p es la proporción de individuos de la población que poseen la característica en cuestión. Consideremos además una muestra simple aleatoria e independiente de tamaño n de la población y la variable aleatoria X que registra el número de elementos de la muestra que poseen la característica observada, tendríamos:

$x \sim B(n; p)$ con n muestreada aleatoria e independientemente, p constante y sobre ella la duda.

Las hipótesis a plantear en este caso serían:

$$H_0 : p = p_0$$

$$H_1 : p \neq p_0 \Rightarrow \text{Caso bilateral}$$

$$H_0 : p \leq p_0 \quad H_0 : p \geq p_0$$

$$H_1 : p > p_0 \quad H_1 : p < p_0 \Rightarrow \text{Casos unilaterales}$$

Donde p_0 es el valor hipotético.

Estas pruebas bien pueden ser desarrolladas de manera exacta con base a la distribución binomial o mediante una aproximación a la distribución normal cuando se tienen grandes tamaños de muestras.

Veamos primeramente de manera exacta aunque la mayoría de los problemas los trabajaremos mediante la aproximación a la distribución normal para muestra grandes:

Estadígrafo:

El estadígrafo de esta prueba es la propia variable aleatoria ***X***: ***número de éxitos en n pruebas independientes*** que se obtiene como:

$$X = \sum_{i=1}^n X_i$$

Si lo que se tiene es la proporción de individuos de la muestra que poseen la característica observada, o sea, \hat{p} , el estadígrafo se obtiene como:

$$X = n \cdot \hat{p}$$

Región Crítica:

La decisión de rechazar o no la hipótesis nula para esta prueba se fundamenta en la comparación establecida entre el nivel de significación α fijado y un valor de probabilidad p calculado de la siguiente manera:

Para el caso bilateral:

- Si $X < np_0$, entonces $p = 2P(x \leq X)$
- Si $X > np_0$, entonces $p = 2P(x \geq X)$

Para el cálculo de p se emplea la tabla 1 del texto “Probabilidades y Estadística para Ingenieros” con n y p_0 .

Para los casos unilaterales: $p = P(x \leq X)$ y $p = P(x \geq X)$

Se rechaza la hipótesis nula para todo valor de p menor que α .

$$RC: p < \alpha$$

En resumen:

Hipótesis alterna	Estadígrafo	Cálculo de p	Región crítica
$p \neq p_0$	$X = \sum_{i=1}^n X_i$ o $X = n \cdot \hat{p}$	Si $X < np_0$, $p = 2P(x \leq X)$ Si $X > np_0$, $p = 2P(x \geq X)$	$p < \alpha$
$p > p_0$		$p = P(x \geq X)$	
$p < p_0$		$p = P(x \leq X)$	

Ejemplo 5:

Una gran empresa estudió el servicio que recibió de proveedores y arribó a la conclusión que el 35% de los encargos fueron recibidos con retraso. Luego de implementar un sistema “justo a tiempo”, en el cual los proveedores están más a fin con la empresa, se indica que de una muestra de 15 encargos, 4 fueron entregas tardíamente. Verifique si con la ejecución del nuevo sistema “justo a tiempo” se logra reducir la cantidad de encargos con retraso. Utilice $\alpha = 0,05$.

Solución:

x : cantidad de entregas realizadas con retraso

$$x \sim B(15 ; p)$$

Hipótesis:

Estadígrafo:

Valor de p:

$$H_0: p \geq 0,35$$

$$H_1: p < 0,35$$

$$X = 4$$

$$p = P(x \leq 4) = B(15 ; 4 , 0,35) = 0,3519$$

Criterio de decisión:

$$RC: p < \alpha$$

$$RC: 0,3519 \not< 0,05 \quad \text{No se rechaza } H_0 \text{ para } \alpha = 0,05.$$

R/ Con el nuevo sistema “justo a tiempo” no se logra reducir la cantidad de entregas realizadas con retraso. La empresa podría buscar otras alternativas de solución como cambiar de proveedor o realizar estudios aplicando herramientas de la investigación de operaciones.

Como se mencionó al inicio de la clase, para n lo suficientemente grande esta prueba puede desarrollarse en base a una aproximación a la distribución normal siempre y cuando se cumpla que np_0 y $n(1-p_0)$ ambos mayores que 5. Por lo que la variable aleatoria $x \sim N(np_0 ; np_0(1 - p_0))$. En otras palabras, probaremos las hipótesis anteriormente expuestas mediante el estadístico:

$$Z = \frac{X - np_0}{\sqrt{np_0(1 - p_0)}}$$

El cual es un valor de una variable aleatoria que tiene aproximadamente la distribución normal estándar.

Las regiones críticas son aquellas estudiadas para la dócima de la media de una población con distribución normal, lo que sustituyendo en las hipótesis alternas a μ y μ_0 por p y p_0 .

Desarrollemos el ejemplo anterior mediante una aproximación a la distribución normal para $n = 35$ y $X = 10$.

Hipótesis:

$$H_0: p \geq 0,35$$

$$H_1: p < 0,35$$

$$\begin{aligned} np_0 &= 35 \cdot 0,35 = 12,25 > 5 \\ n(1 - p_0) &= 35 \cdot 0,65 = 22,75 > 5 \\ x &\sim N(np_0 ; np_0(1 - p_0)) \\ x &\sim N(12,25 ; 7,96) \end{aligned}$$

Estadígrafo:

$$Z = \frac{10 - 12,25}{2,82} = -0,79$$

Criterio de decisión:

$$RC: Z < -Z_{1-\alpha}$$

$$RC: -0,79 \not< -1,64 \quad \text{No rechazo } H_0 \text{ para } \alpha = 0,05.$$

R/ Con el nuevo sistema “justo a tiempo” no se logra reducir la cantidad de entregas tardías.

Estudio Independiente:

Ejercicios L/T. Walpole pág. 356- Media; 365-Proporciones; 369-Varianza

Ejercicios L/T. Miller pág. 234- Media; 290-Proporciones; 275-Varianza (realizar ejercicios para un parámetro)

Ejercicios Guía Tema IV-Dócimas de hipótesis.

Algunas Dóctimas no paramétricas.

L/T. Walpole (pág. 371-376); L/T. Miller (292-298)

Hasta aquí hemos vistos las diferentes pruebas de hipótesis para diferentes parámetros poblacionales, en la mayoría de ellas se supone la normalidad de la población sobre la cual se realizan las pruebas, existen un conjunto de pruebas menos rígidas o que contribuyen a apoyar precisamente estas suposiciones, en esta conferencia estudiaremos algunas de ellas llamadas pruebas no paramétricas donde, además de ilustrar el procedimiento de estas pruebas, constituyen pruebas que se realizan para verificar algunos de los supuestos principales que se formulan en muchos de los procedimientos inferenciales.

Podemos definir las pruebas no paramétricas como procedimientos estadísticos que pueden utilizarse para contrastar hipótesis cuando no son posibles los supuestos respecto a los parámetros o a las distribuciones poblacionales.

De forma general, entre otros aspectos, al realizar análisis crítico o diagnóstico del modelo utilizado para realizar una inferencia se verifica:

- Si la Distribución supuesta es consistente con los datos (normalidad, entre otras).
- Si las observaciones son independientes.
- Si la muestra es homogénea (vienen de la misma población).

Para ello podemos realizar algunas pruebas de hipótesis no paramétricas que verifican estos aspectos.

- Dóctimas sobre la distribución. Dóctimas de Bondad de Ajuste.

Consisten en probar la Hipótesis nula que los datos muestrales se distribuyen siguiendo determinado modelo.

Los contrastes básicos son:

- Chi-cuadrado de Pearson.
- Kolmogorov-Smirnov.
- Jarque Bera.

Contraste Chi-cuadrado de Pearson.

Es el contraste de Ajuste más antiguo, cuya idea es comparar las frecuencias observadas de las diferentes clases con las especificadas por el modelo teórico que se contrasta.

a) Hipótesis:

Variante 1: La hipótesis nula es que los datos de una variable X provienen de cierto modelo que no se conoce.

Variante 2: La hipótesis nula es que los datos de una variable X provienen de un determinado modelo (Ej. Distribución Normal) donde se puede especificar o no los parámetros de dicho modelo.

b) Estadígrafo.

$$\chi^2 = \sum_{i=1}^k \frac{(O_i - E_i)^2}{E_i}$$

K: # de clases.
O_i: Frecuencias Observadas.
E_i: Frecuencias Esperadas.

c) Región Crítica.

$$\chi^2 > \chi^2_{\alpha; k-r-1}$$

r- # de parámetros estimados.

Ejemplo 1:

Una compañía de televisión afirma que la proporción de personas según la edad que ven un determinado programa se comporta de la siguiente manera: niños (20%); Adolescentes (25%); Jóvenes (45%); Resto (10%). Para probar esto un empleado tomó una muestra de 300 personas que ven el programa y obtuvo los resultados siguientes:

- niños (70); Adolescentes (80); Jóvenes (140); Resto (10).
- ¿Para $\alpha=0,05$ podemos considerar correcto lo dicho por la compañía?

Solución:

a) Hipótesis:

$H_0: O_i = E_i$ (La proporción de personas que ven el programa se comportan según lo esperado)

$H_1: O_i \neq E_i$ (La proporción de personas que ven el programa no se comportan según lo esperado)

b) Estadígrafo:

Categorías	O_i	E_i	$(O_i - E_i)^2$	$(O_i - E_i)^2/E_i$
Niños.	70	$300 \cdot 0.20 = 60$	100	1.66
Adolesc.	80	75	25	0.33
Jovenes.	140	135	250	0.18
Resto.	10	30	400	13.33

$\chi^2 = 15.5$

c) Región Crítica.

$$\chi^2 > \chi_{\alpha; k-r-1}^2 = \chi_{0,05; 4-1}^2 = \chi_{0,05; 3}^2 = 7.81$$

Evidentemente la proporción de personas que ven el programa no se comportan según lo esperado.

Ejemplo 2:

Las especificaciones para la producción de tanques de aire utilizados en inmersión requieren que los tanques se llenen a una presión promedio de 600 libras por pulgada cuadrada (psi). Se permite una desviación estándar de 10 psi. Las especificaciones de seguridad permiten una distribución normal en los niveles de llenado. Usted acaba de ser contratado por cierta empresa que fabrica equipos de inmersión. Su primera tarea es determinar si los niveles de llenado se ajustan a una distribución normal. La empresa desea que la media de 600 psi con una desviación de 10 psi prevalezca. Para ello se miden 1000 tanques y se obtienen los siguientes resultados.

Niveles de llenado en los tanques de buceo:

PSI	Frecuencia real
0 y por debajo de 580	20
580 y por debajo de 590	142
590 y por debajo de 600	310
600 y por debajo de 610	370
610 y por debajo de 620	128
620 y por encima	30
	<u>1,000</u>

Solución:

a) **Hipótesis:**

$H_0: X \rightarrow N(600; 100)$ (Los niveles de llenado están distribuidos normalmente))

H_1 : Los niveles de llenado no se distribuyen normalmente.

b) **Estadígrafo:**

(Tenemos los valores observados pero debemos calcular las probabilidades correspondientes para cada intervalo para calcular los valores esperados)

$$Z = \frac{X - \mu}{\sigma}$$

$$Z = \frac{580 - 600}{10}$$

$$= -2, \text{ o un área de } 0.4772$$

$$P(0 < X < 580) = 0.5000 - 0.4772 = 0.0228$$

$$P(580 < X < 590) = 0.4772 - 0.3413 = 0.1359$$

(Así sucesivamente)

PSI	Frecuencia real (O_i)	Probabilidades (p_i)	Frecuencia esperada (E_i)
0 y por debajo de 580	20	0.0228	22.8
580 y por debajo de 590	142	0.1359	135.9
590 y por debajo de 600	310	0.3413	341.3
600 y por debajo de 610	370	0.3413	341.3
610 y por debajo de 620	128	0.1359	135.9
620 y por encima	30	0.0228	22.8
	<u>1,000</u>	<u>1.0000</u>	<u>1000.0</u>

$$X^2 = 8.63$$

c) **Región Crítica:**

$$\chi^2 > \chi^2_{\alpha; k-r-1} = \chi^2_{0.05; 6-0-1} = 11.07$$

Podemos ver que la hipótesis nula no debería rechazarse, las diferencias entre lo que se observó y lo que se espera observar si los contenidos estuvieran distribuidos normalmente con una media de 600 y una desviación de 10 pueden atribuirse al error de muestreo.

Contraste Chi-cuadrado para la Independencia entre variables.

Para analizar estas pruebas introduciremos primeramente un concepto relacionado con lo que denominamos tablas de contingencia:

- Tablas de Contingencia.**

Se clasifican n individuos de acuerdo con dos atributos o variables **A** y **B**, teniendo **A** un número r de categorías A_1, A_2, \dots, A_r y **B** un número c de categorías B_1, B_2, \dots, B_c . Sea n_{ij} el número de individuos clasificados en la combinación A_i con B_j , n_{0j} el número total de individuos de la categoría B_j y n_{i0} el número total de individuos clasificados en la categoría A_i . La tabla que recoge esta clasificación se llama **tabla de contingencia**.

A \ B	B ₁	B ₂	B _c	
A ₁	n_{11}	n_{12}	n_{1c}	n_{10}
A ₂	n_{21}	n_{22}	n_{2c}	n_{20}
⋮	⋮	⋮		⋮	⋮
A _r	n_{r1}	n_{r2}	n_{rc}	n_{r0}
	n_{01}	n_{02}	n_{0c}	n

Es el contraste que se utiliza para estudiar simultáneamente dos características asociadas a cada dato (Datos bivariados) y cada característica está subdivida en clases. La representación se realiza a través de las llamadas Tablas de Contingencia (Tablas de Doble entrada).

- Hipótesis:** La Hipótesis nula siempre supone que las variables son independientes.
- Estadígrafo:** (Se mantiene el mismo, el cambio se produce a la hora de calcular las frecuencias)

$$\chi^2 = \sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^r \frac{(O_{ij} - E_{ij})^2}{E_{ij}}$$

- Región Crítica:**

$$\chi^2 > \chi^2_{\alpha; (k-1)(r-1)}$$

k ; r - # de clases de cada variable.

Ejemplo 3:

¿Existe una dependencia entre el sexo de una persona y que sea fumador?

Para probar esto se eligieron al azar una muestra de 100 personas obteniéndose los resultados que se indican en la siguiente Tabla de Contingencia. (Use $\alpha=0.05$).

	Hombres	Mujeres	Totales
Fumadores	30 (20)	10 (20)	40
No Fumadores	20 (30)	40 (30)	60
Totales	50	50	100

Solución:

a) Hipótesis:

H_0 : El sexo y Fumar son independientes.

H_1 : El sexo y Fumar no son independientes.

b) Estadígrafo: Pondremos los valores esperados entre comillas)

$$\chi^2 = \frac{(30-20)^2}{20} + \frac{(10-20)^2}{20} + \frac{(20-30)^2}{30} + \frac{(40-30)^2}{30}$$
$$\chi^2 = 5 + 5 + 3.33 + 3.33 = 16.66$$

c) Región Crítica.

$$\chi^2 > \chi^2_{0.05;(2-1)(2-1)} = \chi^2_{0.05;1} = 3.84$$

Aquí podemos ver que el estadígrafo cae en la R.C. por lo que se rechaza H_0 lo cual implica que no consideramos a las variables independientes y a ese nivel de significación creemos que el sexo y fumar tiene relación.

Estudio Independiente:

Ejercicios L/T. Walpole pág. 382

Ejercicios L/T. Miller pág. 297

Ejercicios Guía Tema IV-Dóctimas de hipótesis.