

RESISTENCIA DE MATERIALES I

Conferencia 3

Tema II-Tracción-Compresión axial

- 2.8 Concentración de tensiones
- 2.9 Sistemas estáticamente indeterminados
- 2.10 Conclusiones

Objetivos:

- Aplicar las condiciones a resistencia y rigidez en barras sometidas a tracción o compresión.
- Resolver sistemas estáticamente indeterminados constituidos por barras sometidas a tracción y compresión.

2.8 Concentración de tensiones

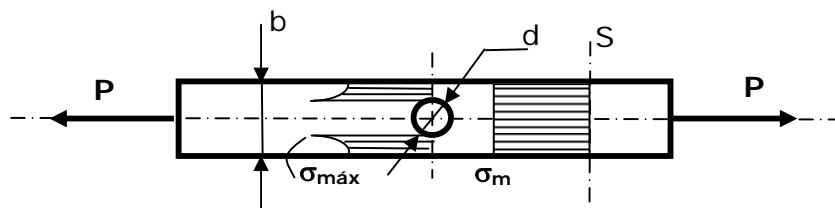
La distribución uniforme de las tensiones en la sección transversal de una barra traccionada o comprimida tiene lugar solamente en barras rectas de sección uniforme y a cierta distancia del lugar de aplicación de la carga.

Un cambio brusco en la sección implica un cambio brusco en la distribución de las fuerzas internas en la sección transversal. Este fenómeno, que consiste en un aumento súbito de las tensiones en los lugares donde la forma geométrica de la barra cambia bruscamente es denominado concentración de tensiones.

El efecto de la concentración de tensiones se toma en cuenta mediante el coeficiente teórico de concentración de tensiones, definido del modo siguiente

Coeficiente de concentración de tensiones: es la relación entre el esfuerzo máximo y el esfuerzo medio en un cuerpo sometido al efecto de la concentración de tensiones.

Frecuentemente en la práctica se encuentran cuerpos que al presentar cambios bruscos en su sección transversal se generan concentración de tensiones al ser sometidos a carga, tal es el caso de la barra rectangular con un agujero de diámetro "d" al someterse a tracción, como se muestra en la figura.



Se observa en la figura que en la sección transversal de la barra, correspondiente al agujero, se produce la concentración de tensiones, generándose esfuerzos máximos, $\sigma_{\text{máx}}$, en los puntos más cercanos al agujero, en tanto que en los lugares suficientemente alejados del agujero y de la aplicación de las cargas externas los esfuerzos mantienen su distribución uniforme con una magnitud de esfuerzo medio, σ_m . Para valor el efecto de la concentración de tensiones se define el coeficiente de concentración de tensiones α que como en el caso analizado la pieza está sometida a tracción y los esfuerzos que se generan son normales, entonces el coeficiente se designa por α_σ y se define por la relación:

$$\alpha_\sigma = \frac{\sigma_{\text{máx}}}{\sigma_m}$$

donde:

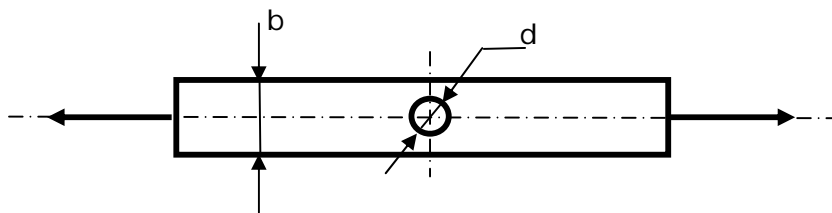
$$\sigma_m = \frac{N}{A} = \frac{P}{A}$$

siendo, A , el área de la sección transversal de la barra donde no existe cambio brusco de la sección.

Teniendo en cuenta el efecto de la concentración de tensiones, la condición de resistencia a tracción o compresión adopta la forma que se muestra a continuación:

$$\sigma_{\text{máx}} = \alpha_\sigma \frac{N}{A} \leq [\sigma]$$

¿De qué parámetros depende el coeficiente de concentración de tensiones en una barra rectangular con un agujero circular central sometida a tracción?



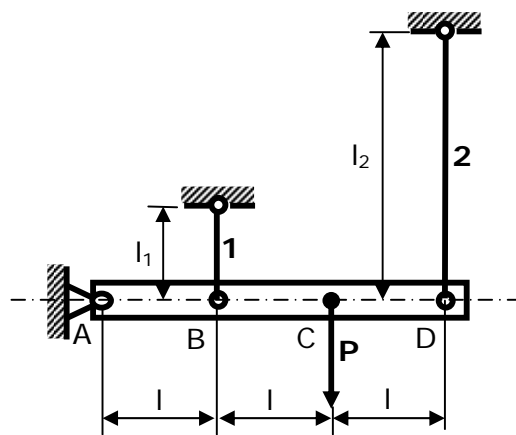
Depende de la relación entre el diámetro "d" del agujero y el ancho "b" de la barra.

2.9 Sistemas estáticamente indeterminados

Para abordar la solución de sistemas estáticamente indeterminados, desde el punto de vista de la Mecánica del Sólido Rígido, se tomará como base un ejemplo compuestos por barras sometidas a tracción o compresión, analizando las deformaciones que se producen y aplicando la metodología indicada se obtendrán las fuerzas que con las condiciones de equilibrio solamente no eran posibles obtener.

A continuación se muestra el ejemplo objeto de estudio.

Ejemplo: Para el sistema mostrado en la figura compuesto por la barra rígida ABCD y por las barras de sección transversal circular 1 y 2, determine los esfuerzos y alargamientos que se producen en las mencionadas barras 1 y 2.



Datos:

$$P = 50 \text{ kN}$$

$$l_1 = 300 \text{ mm}$$

$$l_2 = 800 \text{ mm}$$

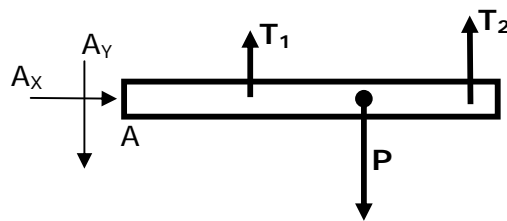
$$d_1 = 10 \text{ mm}$$

$$d_2 = 20 \text{ mm}$$

$$E_1 = E_2 = E = 2 \cdot 10^5 \text{ MPa}$$

Para dar solución a este tipo de problema que constituye un sistema estáticamente indeterminado compuesto por una barra rígida ABCD y dos barras sometidas a tracción es necesario dar los siguientes pasos:

1. **Ecuaciones de la Estática.** Aquí se plantean las condiciones del equilibrio a partir del cuerpo libre del elemento rígido que contiene las fuerzas que indirectamente actúan sobre las barras 1 y 2, donde se piden obtener los esfuerzos y los alargamientos.



Como se observa en el cuerpo libre de la barra rígida se tienen 4 incógnitas y las condiciones de equilibrio de la estática para el caso plano sólo brindan 3 ecuaciones por lo que se está en presencia de un sistema estáticamente indeterminado con 1 grado de hiperestaticidad, no soluble por las ecuaciones de equilibrio conocidas de la Mecánica Teórica. No obstante, para darle solución a partir del estudio de las deformaciones del sistema se planteará sólo la ecuación del equilibrio que contiene a las incógnitas T_1 y T_2 , necesarias determinar para hallar los esfuerzos y alargamientos en las barras 1 y 2. A continuación se muestra la ecuación de equilibrio que interesa.

$$\Sigma M_A = 0$$

$$2IP - IT_1 - 3IT_2 = 0$$

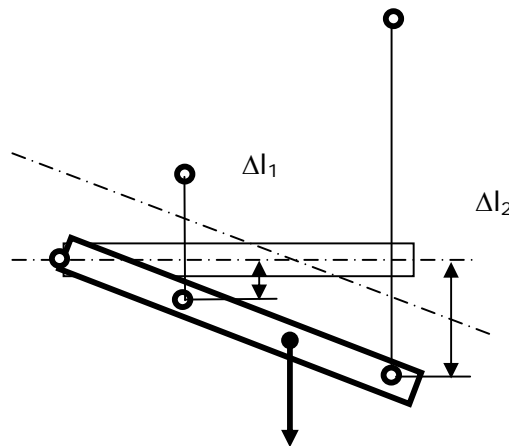
2.1

$$T_1 + 3T_2 = 2P$$

Al estar en presencia de una ecuación y dos incógnitas se requieren buscar nuevas ecuaciones para poder determinar las incógnitas, por ello se pasará al estudio de la geometría que adopta el sistema al deformarse por la acción de la carga **P**.

2. **Geometría de la deformación.** Este paso se analiza la configuración que adoptará el sistema al deformarse las barras 1 y 2 por la acción de la carga **P** sobre la barra rígida.

Seguidamente se muestra la posible configuración que adoptará el sistema una vez deformado.



Y por proporcionalidad de triángulos se establece la ecuación de la geometría:

$$\Delta l_2 = 3\Delta l_1$$

2.2

Con esta última ecuación lejos de resolverse el problema se incrementan las incógnitas, sin embargo, las planteando las ecuaciones de la Resistencia de Materiales se verá que las nuevas ecuaciones van a permitir que coincidan el número de ecuaciones con el número de incógnitas y de esa forma se dará solución al problema que aparentemente parecía insoluble.

3. **Ecuaciones de la Resistencia.** Las ecuaciones que se establecerán ahora serán las mismas que permiten determinar el alargamiento o acortamiento de una barra, las que al aplicarse a ambas barras deformadas harán coincidir el número de ecuaciones con el número de incógnitas dando de esta forma solución al problema, como se muestra a continuación.

$$\Delta l_1 = \frac{T_1}{E_1 A_1} l_1 = \frac{T_1}{E \frac{\pi d_1^2}{4}} l_1 \quad 2.3$$

$$\Delta l_2 = \frac{T_2}{E_2 A_2} l_2 = \frac{T_2}{E \frac{\pi d_2^2}{4}} l_2 \quad 2.4$$

De tal forma que se tienen 4 ecuaciones con 4 incógnitas y por tanto se da solución al problema planteado, como se mostrará a continuación.
Sustituyendo las ecuaciones (2.3) y (2.4) en (2.2) se obtiene:

$$T_2 = \frac{9}{2} T_1 \quad (2.5)$$

y simultaneando las ecuaciones (2.1) y (2.5) se obtendrá:

$$T_1 = \frac{4}{29} P$$

$$T_2 = \frac{18}{29} P$$

que son precisamente las magnitudes de las fuerzas externas que actúan respectivamente en las barras 1 y 2 y como se sabe que los gráficos de las fuerzas normales en ambas barras son uniformes, a tracción y sus magnitudes coinciden con los de las correspondientes fuerzas externas se puede fácilmente determinar los valores de los esfuerzos en dichas barras, mediante las expresiones:

$$\sigma_1 = \frac{N_1}{A_1} = \frac{T_1}{\frac{\pi d_1^2}{4}} = \frac{\frac{4}{29} 50000N}{\frac{\pi 10^2 mm^2}{4}} = 88MPa$$

$$\sigma_2 = \frac{N_2}{A_2} = \frac{T_2}{\frac{\pi d_2^2}{4}} = \frac{\frac{18}{29} 50000N}{\frac{\pi 20^2 mm^2}{4}} = 99MPa$$

Similarmente, sustituyendo las expresiones de T_1 y T_2 en las ecuaciones (2.3) y (2.4) y sus correspondientes valores se obtendrán los alargamientos de las barras 1 y 2, es decir:

$$\Delta l_1 = 0,13 \text{ mm}$$

$$\Delta l_2 = 0,39 \text{ mm}$$

Dando de esta forma respuesta a las interrogantes planteadas en el problema.

2.10 Conclusiones

Como aspecto fundamental se debe destacar que el efecto de concentración de tensiones depende, en principio, de la geometría de la pieza estudiada y es valorado a través de un coeficiente que establece la relación entre el esfuerzo producido por el concentrador de tensiones, como valor máximo, y el efecto nominal o medio obtenido de las ecuaciones de la Resistencia de Materiales.

Como un segundo aspecto el estudiante debe conocer el método de solución de los problemas estáticamente indeterminado en tracción – compresión, siendo decisivo el análisis de la geometría ya que este será finalmente quien establecerá la relación que permitirá la búsqueda de la nueva ecuación necesaria para dar solución al problema. En otros temas de la resistencia de materiales serán vistos otros métodos para dar solución a problemas estáticamente indeterminados.

PREGUNTAS TEORICAS TEMA II. RESISTENCIA DE MATERIALES I

1. ¿Qué se entiende por concentración de tensiones y como se evalúa?
2. ¿De qué factores depende la concentración de tensiones?
3. ¿Qué se entiende por sistema estáticamente indeterminado o hiperestático?
4. Explique el método propuesto, en RM, para dar solución a problemas estáticamente indeterminados en tracción – compresión?