

RESISTENCIA DE MATERIALES I

Conferencia 6

Tema IV-Estado tensional y deformacional

- 6.1 Introducción.
- 6.2 Algunos conceptos sobre el estado triaxial.
- 6.3 Ley de Hooke generalizada. Estado deformacional.
- 6.4 Conclusiones.

Objetivos:

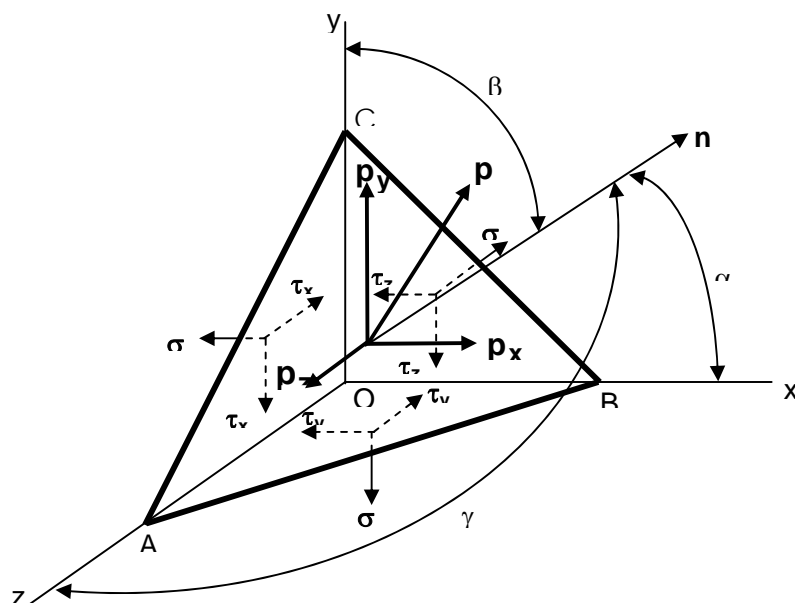
- Obtener los esfuerzos principales en un elemento diferencial utilizando el Círculo de Mohr.

6.1 Introducción

En esta conferencia se muestran las expresiones para la obtención de los esfuerzos en plano arbitrarios correspondiente a una orientación cualquiera del elemento diferencial cúbico. Se da a conocer la ecuación cúbica que permite la obtención de los esfuerzos principales para el caso más general del estado tensional. También se aborda la Ley de Hooke generalizada y algunos conceptos del estado deformacional.

6.2 Algunos conceptos sobre el estado triaxial

A continuación se analizarán los actuantes esfuerzos para un plano cualquiera, con un vector normal \mathbf{n} , correspondiente a un elemento diferencial cúbico.



Planteando las condiciones de equilibrio:

$$\Sigma F_x = 0$$

$$\Sigma F_y = 0$$

$$\Sigma F_z = 0$$

se obtendrán las expresiones:

$$p_x = \sigma_x \cos \alpha + \tau_{xy} \cos \beta + \tau_{xz} \cos \gamma$$

$$p_y = \tau_{yx} \cos \alpha + \sigma_y \cos \beta + \tau_{yz} \cos \gamma$$

$$p_z = \tau_{zx} \cos \alpha + \tau_{zy} \cos \beta + \sigma_z \cos \gamma$$

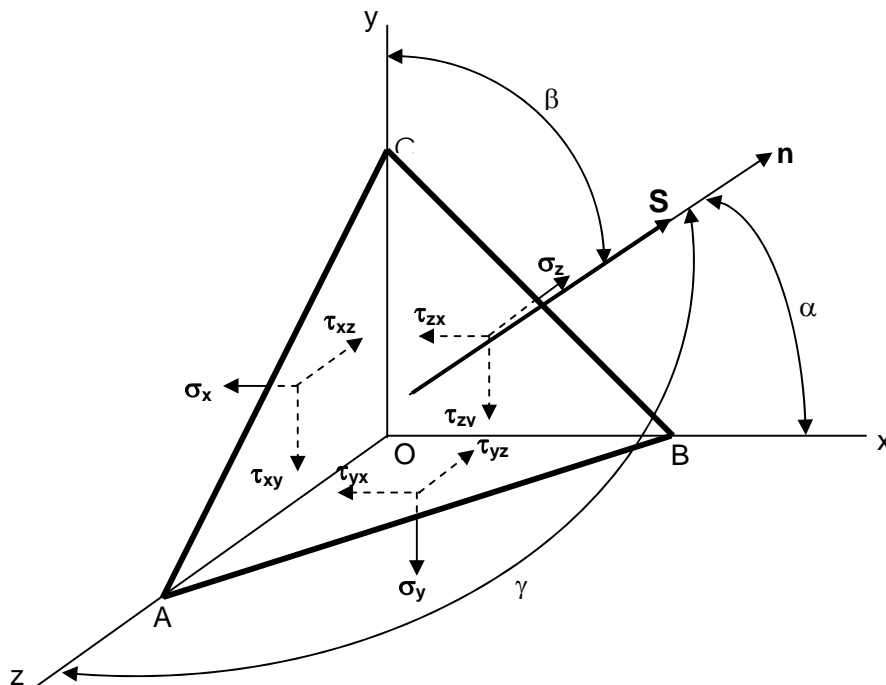
sabiendo que:

$$ABC \cos \alpha = AOC$$

$$ABC \cos \beta = AOB$$

$$ABC \cos \gamma = BOC$$

Si se desea determinar los esfuerzos principales **S**, basta con colocar el esfuerzo principal **S** en una cara principal y estableciendo nuevamente las condiciones de equilibrio de fuerzas en los tres ejes se



tendrá:

$$p_x = S \cos \alpha$$

$$p_y = S \cos \beta$$

$$p_z = S \cos \gamma$$

Sustituyendo estas ecuaciones en las expresiones generales del estado tensional volumétrico se arribará al sistema de ecuaciones homogéneas:

$$(\sigma_x - S) \cos \alpha + \tau_{xy} \cos \beta + \tau_{xz} \cos \gamma = 0$$

$$\tau_{yx} \cos \alpha + (\sigma_y - S) \cos \beta + \tau_{yz} \cos \gamma = 0$$

$$\tau_{zx} \cos \alpha + \tau_{zy} \cos \beta + (\sigma_z - S) \cos \gamma = 0$$

cuyo sistema de ecuaciones para que tenga solución debe cumplirse que el determinante del sistema sea nulo.

$$\begin{vmatrix} (\sigma_x - S) & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & (\sigma_y - S) & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & (\sigma_z - S) \end{vmatrix} = 0$$

obteniéndose la **ecuación cúbica**:

$$S^3 - k_1 S^2 + k_2 S - k_3 = 0$$

donde:

$$k_1 = \sigma_x + \sigma_y + \sigma_z$$

$$k_2 = \sigma_x \sigma_y + \sigma_y \sigma_z + \sigma_z \sigma_x - \tau_{xy}^2 - \tau_{yz}^2 - \tau_{zx}^2$$

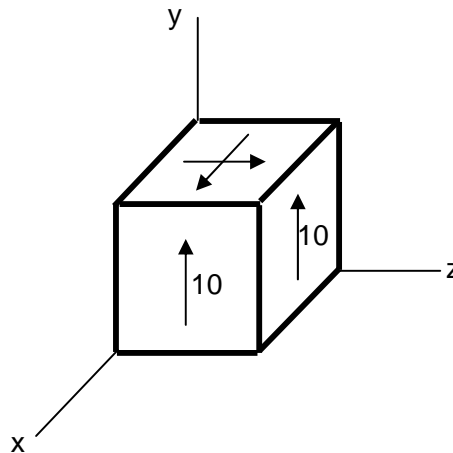
$$k_3 = \begin{vmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \sigma_y & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_z \end{vmatrix}$$

son los **invariantes del estado tensional**; como se observa de la ecuación cúbica se obtendrán tres raíces: **S_1, S_2, S_3** , a partir de las cuales se determinarán los esfuerzos principales: **$\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \sigma_3$** , que permitirán definir el tipo de estado tensional.

Seguidamente se muestra un ejemplo de aplicación de la ecuación cúbica para la obtención de los esfuerzos principales.

Ejemplo 4.1

Para elemento mostrado en la figura determine los esfuerzos principales.



Para la determinación de los esfuerzos principales se empleará la ecuación cúbica. Se sabe que:

$$\tau_{zy} = \tau_{yz} = 10$$

$$\tau_{xy} = \tau_{yx} = 10$$

A continuación se obtendrán los invariantes del estado tensional, sustituyendo los valores de los esfuerzos conocidos:

$$k_1 = 0 + 0 + 0 = 0$$

$$k_2 = 0 + 0 + 0 - 100 - 100 - 0 = -200$$

$$k_3 = \begin{vmatrix} 0 & 10 & 0 \\ 10 & 0 & 10 \\ 0 & 10 & 0 \end{vmatrix} = 0$$

Por lo tanto: $S^3 - 200S = 0$

Obteniendo las raíces:

$$S_1 = 0$$

$$S_2 = \sqrt{200} = 14,14$$

$$S_3 = -\sqrt{200} = -14,14$$

y llegando finalmente a:

$$\sigma_1 = 14,14$$

$$\sigma_2 = 0$$

$$\sigma_3 = -14,14$$

lo que permite afirmar que el elemento cúbico mostrado se encuentra sometido a un estado tensional plano.

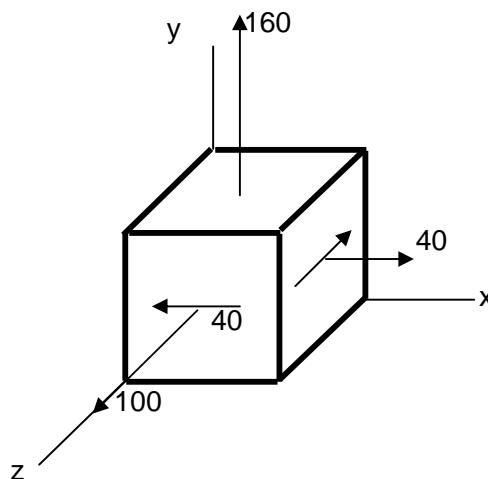
Para obtener los esfuerzos en diferentes orientaciones del elemento diferencial cúbico y de hecho determinar los esfuerzos principales en el **estado tensional volumétrico** se puede aplicar el **Círculo de Mohr**, al igual que en el estado tensional plano, con la única diferencia que se requiere que el elemento presente **al menos un plano principal**.

Seguidamente se mostrará, a través de un ejemplo, la aplicación del Círculo de Mohr al caso del estado tensional volumétrico.

A través de un ejemplo se mostrará la forma de aplicación del Círculo de Mohr al caso de un elemento diferencial de volumen.

Ejemplo 4.2

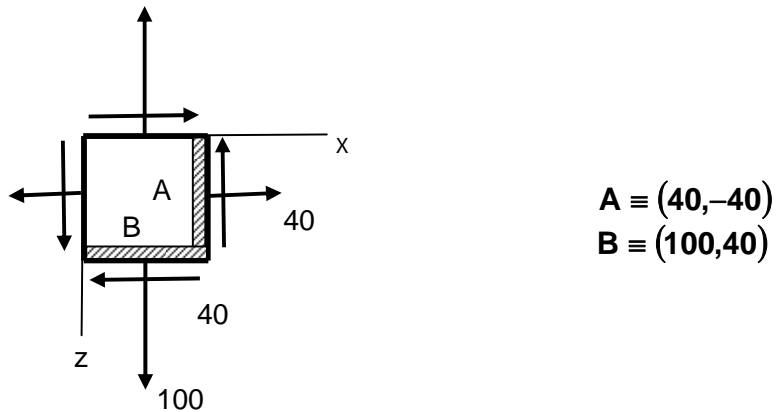
Para el elemento diferencial mostrado determine la magnitud de los esfuerzos principales.



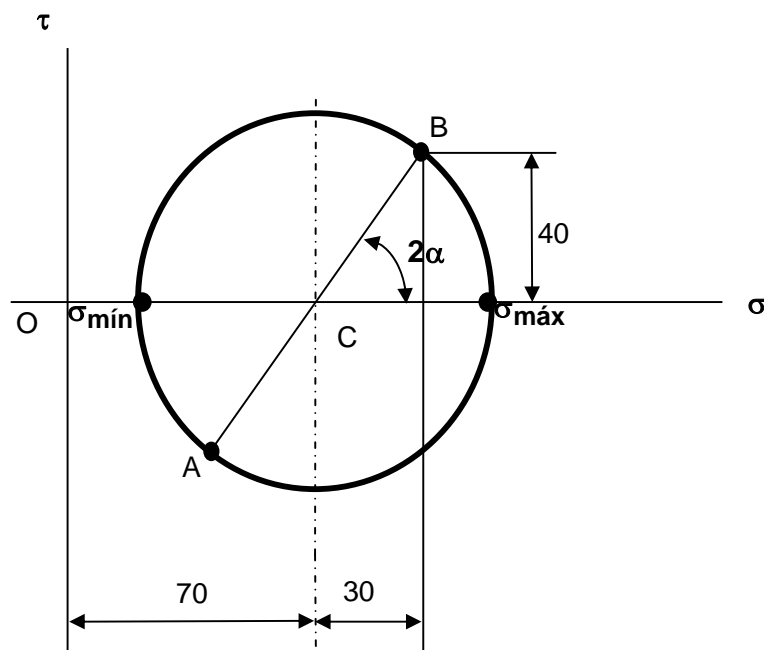
Como en el plano superior no actúan esfuerzos tangenciales, dicho plano es un plano principal, así mismo como en el elemento volumétrico analizado existe al menos un plano principal es posible determinar los esfuerzos principales aplicando el Círculo de Mohr.

Para dar solución al problema, basta observar el elemento en la dirección del esfuerzo principal $\sigma = 160$ y proyectarlo en el plano xz, normal a la dirección del esfuerzo principal.

De esta forma se estará en presencia de un elemento en el plano y por lo tanto, aplicando la metodología ya conocida del Círculo de Mohr en el estado tensional plano se podrán obtener los esfuerzos principales $\sigma_{\text{máx}}$ y $\sigma_{\text{mín}}$.



Construyendo el Círculo de Mohr



$$\sigma_{\text{mín}}^{\text{máx}} = OC \pm R = 70 \pm \sqrt{30^2 + 40^2} = 70 \pm 50$$

de donde:

$$\sigma_{\text{máx}} = 120$$

$$\sigma_{\text{mín}} = 20$$

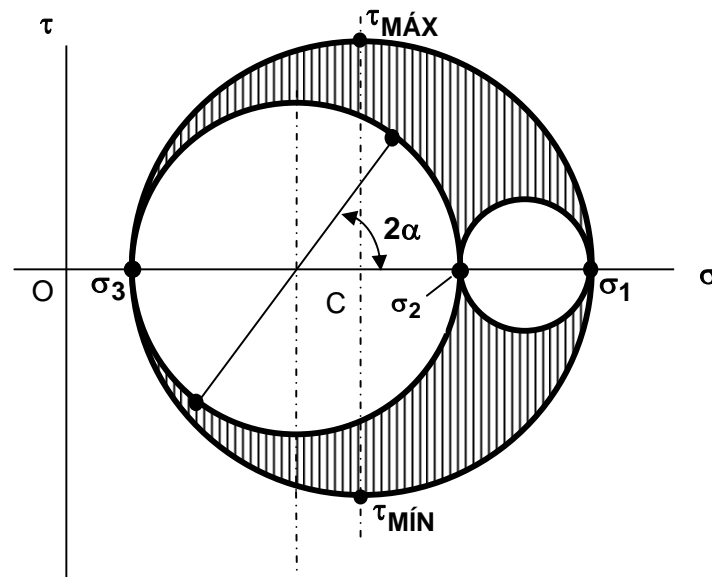
y comparando ambos valores con el esfuerzo principal inicial $\sigma = 160$ se llega a la conclusión de que:

$$\begin{aligned}\sigma_1 &= 160 \\ \sigma_2 &= 120 \\ \sigma_3 &= 20\end{aligned}$$

ya que siempre se tiene que cumplir que:

$$\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \sigma_3$$

por último se puede pasar a construir el Círculo de Mohr correspondiente al estado tensional volumétrico del elemento diferencial cúbico analizado.



Cabe destacar que el área sombreada entre las tres circunferencias corresponden con los valores de los esfuerzos normales y tangenciales cuando al rotar el elemento diferencial se realiza respecto a ejes no principales.

De la figura, se observa que los máximos y mínimos valores de los esfuerzos tangenciales se obtienen a partir de la expresión:

$$\tau_{\text{MÍN}}^{\text{MÁX}} = \pm \frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2}$$

6.3 Ley de Hooke generalizada

Los ensayos a Tracción y Compresión demuestran el cumplimiento de la Ley de Hooke para un estado tensional lineal dentro del período elástico, es decir:

$$\sigma = E\varepsilon$$

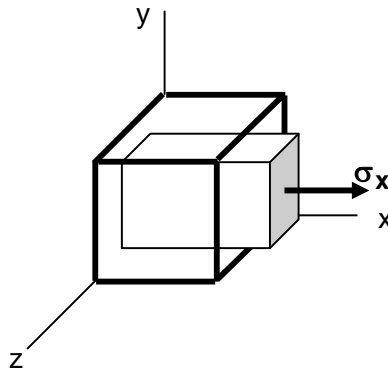
donde, σ : esfuerzo normal
 E : módulo de elasticidad
 ϵ : deformación lineal

Así mismo el ensayo a torsión demuestra la validez de la Ley de Hooke para la distorsión en el período elástico, la que se expresa en la forma:

$$\tau = G\gamma$$

donde, τ : esfuerzo tangencial
 G : módulo de distorsión, $G = \frac{E}{2(1+\nu)}$
 ν : coeficiente de Poisson
 γ : distorsión

Considerando que el comportamiento del material analizado es isotrópico y que se encuentra dentro del período elástico se cumplirá el principio de superposición y por lo tanto se podrá abordar el estudio de las deformaciones que se generan en un elemento diferencial cúbico como la suma de las deformaciones que provocan cada uno de los esfuerzos por separado en el caso de los esfuerzos normales, sin embargo debido a la independencia de las distorsiones en los planos ortogonales, éstas se analizarán a partir del cumplimiento de la Ley de Hooke para la distorsión en cada plano.



Bajo las condiciones mostradas, se cumplirá que: $\epsilon_{x1} = \frac{\sigma_x}{E}$, pero a su vez la acción de este esfuerzo provocará deformaciones en las direcciones de los ejes y, z:

$$\epsilon_y = -\nu\epsilon_x$$

$$\epsilon_z = -\nu\epsilon_x$$

respectivamente.

Por lo tanto, si ahora se aplica el esfuerzo normal en la dirección del eje y, ello provocará una deformación en la dirección del eje x: $\epsilon_{x2} = -\nu\epsilon_y = -\nu\frac{\sigma_y}{E}$

Y si finalmente se aplica un esfuerzo normal en la dirección del eje z, provocará una deformación en la dirección del eje x: $\epsilon_{x3} = -\nu\epsilon_z = -\nu\frac{\sigma_z}{E}$

Si simultáneamente actúan los esfuerzos normales en las direcciones de los tres ejes, entonces la deformación en la dirección del eje x será: $\epsilon_x = \epsilon_{x1} + \epsilon_{x2} + \epsilon_{x3}$, o sea,

$$\epsilon_x = \frac{\sigma_x}{E} - \nu\frac{\sigma_y}{E} - \nu\frac{\sigma_z}{E} = \frac{1}{E}[\sigma_x - \nu(\sigma_y + \sigma_z)]$$

De igual forma se obtendrán las restantes deformaciones lineales, teniendo finalmente:

$$\epsilon_x = \frac{1}{E}[\sigma_x - \nu(\sigma_y + \sigma_z)]$$

$$\epsilon_y = \frac{1}{E}[\sigma_y - \nu(\sigma_x + \sigma_z)]$$

$$\epsilon_z = \frac{1}{E}[\sigma_z - \nu(\sigma_x + \sigma_y)]$$

Aplicando la Ley de Hooke para la distorsión:

$$\gamma_{xy} = \frac{\tau_{xy}}{G}$$

$$\gamma_{yz} = \frac{\tau_{yz}}{G}$$

$$\gamma_{zx} = \frac{\tau_{zx}}{G}$$

Estas seis expresiones representan la Ley de Hooke Generalizada, cuya ley cuando se pone en función de los esfuerzos principales solamente adopta la forma:

$$\epsilon_1 = \frac{1}{E}[\sigma_1 - \nu(\sigma_2 + \sigma_3)]$$

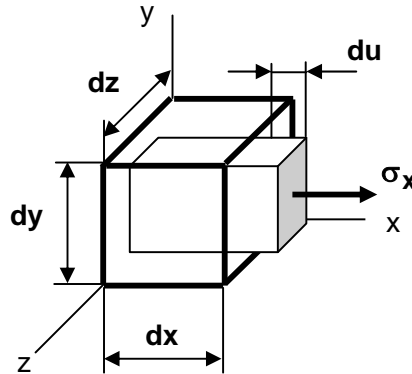
$$\epsilon_2 = \frac{1}{E}[\sigma_2 - \nu(\sigma_1 + \sigma_3)]$$

$$\epsilon_3 = \frac{1}{E}[\sigma_3 - \nu(\sigma_1 + \sigma_2)]$$

ya que en los planos principales se anulan los esfuerzos tangenciales. Si se observa cuidadosamente estas últimas expresiones se ratifica que el tipo de estado tensional no tiene que coincidir con el tipo de estado deformacional.

Estado deformacional

Antes de abordar la energía potencial de la deformación se determinará la variación unitaria de volumen, e , que es igual a la relación variación de volumen, ΔV entre el volumen, V .



$$\Delta V = (dx + du)(dy + dv)(dz + dw) - dx dy dz$$

$$\Delta V = dx(1 + \epsilon_x)dy(1 + \epsilon_y)dz(1 + \epsilon_z) - dx dy dz \approx dx dy dz (\epsilon_x + \epsilon_y + \epsilon_z)$$

Por lo que finalmente:

$$e = \frac{\Delta V}{V} = \epsilon_x + \epsilon_y + \epsilon_z$$

cuya expresión coincide con el primer invariante de la ecuación cúbica del estado deformacional.

Sustituyendo las deformaciones por los esfuerzos, a partir de la Ley de Hooke Generalizada, se tendrá que:

$$e = \frac{1 - 2\nu}{E} (\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z)$$

Sin lugar a dudas, la energía potencial acumulada, dU , en el período elástico, en un elemento diferencial será igual al trabajo dT realizado por las fuerzas generadas a partir de los esfuerzos actuantes en las caras del elemento. Aplicando el principio de superposición se determinará el trabajo realizado por los esfuerzos normales y después el realizado por los esfuerzos tangenciales.

Comenzando por el esfuerzo normal σ_x .

$$dT_{\sigma_x} = \frac{1}{2} \sigma_x dydzdu = \frac{1}{2} \sigma_x dydz \epsilon_x dx$$

$$dT_{\sigma_y} = \frac{1}{2} \sigma_y dxdzdv = \frac{1}{2} \sigma_y dxdz \epsilon_y dy$$

$$dT_{\sigma_z} = \frac{1}{2} \sigma_z dxdydw = \frac{1}{2} \sigma_z dxdy \epsilon_z dz$$

Similarmente:

$$dT_{\tau_{xy}} = \frac{1}{2} \tau_{xy} dxdz \gamma_{xy} dy$$

$$dT_{\tau_{yz}} = \frac{1}{2} \tau_{yz} dydx \gamma_{yz} dz$$

$$dT_{\tau_{zx}} = \frac{1}{2} \tau_{zx} dzdy \gamma_{zx} dx$$

Como: $dU = dT_{\sigma_x} + dT_{\sigma_y} + dT_{\sigma_z} + dT_{\tau_{xy}} + dT_{\tau_{yz}} + dT_{\tau_{zx}}$

Sustituyendo: $dU = \frac{1}{2} dxdydz (\sigma_x \epsilon_x + \sigma_y \epsilon_y + \sigma_z \epsilon_z + \tau_{xy} \gamma_{xy} + \tau_{yz} \gamma_{yz} + \tau_{zx} \gamma_{zx})$

Definiendo la energía unitaria de volumen, U_0 como la derivada de la energía potencial respecto al volumen:

$$U_0 = \frac{dU}{dV} = \frac{1}{2} (\sigma_x \epsilon_x + \sigma_y \epsilon_y + \sigma_z \epsilon_z + \tau_{xy} \gamma_{xy} + \tau_{yz} \gamma_{yz} + \tau_{zx} \gamma_{zx})$$

cuya expresión en función de los esfuerzos y las deformaciones principales adopta la forma:

$$U_0 = \frac{1}{2} (\sigma_1 \epsilon_1 + \sigma_2 \epsilon_2 + \sigma_3 \epsilon_3)$$

Sustituyendo las deformaciones principales por los esfuerzos principales a partir de la Ley de Hooke Generalizada:

$$U_0 = \frac{1}{2E} [\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2 - 2\nu(\sigma_1 \sigma_2 + \sigma_2 \sigma_3 + \sigma_3 \sigma_1)]$$

Esta energía potencial unitaria U_0 es el resultado de la suma de la energía unitaria debido al cambio de volumen, U_{0V} más la energía unitaria debido al cambio de forma U_{0F} , es decir:

$$U_0 = U_{0V} + U_{0F}$$

Siendo las expresiones de estas componentes de la energía unitaria en función de los esfuerzos principales iguales a:

$$U_{0V} = \frac{1-2\nu}{6E} (\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3)^2$$
$$U_{0F} = \frac{1+\nu}{6E} [(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2]$$

6.4 Conclusiones.

Se debe destacar la necesidad del conocimiento de los valores de los esfuerzos en planos arbitrarios y las formas de obtener estos valores a través de formulaciones matemáticas para el estado volumétrico, así como el uso de la ecuación cúbica y las invariantes del estado tensional. Importancia de la posibilidad de aplicación del Círculo de Mohr y las limitaciones para esta aplicación en el caso volumétrico.

Es de importancia el conocimiento y aplicación de la Ley de Hooke Generalizada y el uso del estado deformacional, también se deben destacar los procedimientos seguidos en la determinación de la deformación de volumen y el análisis de la energía potencial de la deformación.

PREGUNTAS TEORICAS TEMA IV. RESISTENCIA DE MATERIALES I

1. ¿Qué se entiende por estado tensional de volumen?
2. Plantee las expresiones para la detrmínación de los esfuerzos en un plano arbitrario en el caso del ETV. Identifique cada termino.
3. Plantee la ecuación cúbica del ETV. Diga cual es su utilidad.
4. ¿Qué son las invariantes del estado tensional?. Expliue su respuesta.
5. ¿Será aplicacble el Circulo de Mohr al análisis del ETV?. Explique.
6. Plantee la Ley de Hooke Generalizada. Identifique cada termino.
7. ¿Qué se entiende por estado deformacion?.
8. ¿Cómo se clasifican los estados deformacionales?
9. Plantee la expresión para la determinación de la deformación de volumen en el caso mas general. Identifique cada termino.