

RESISTENCIA DE MATERIALES I

Conferencia 7

Tema IV-Teorías de resistencia

- 4.11 Introducción
- 4.12 Teorías de resistencia
- 4.13 Conclusiones

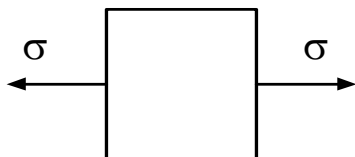
Objetivos:

- Determinar el esfuerzo equivalente, como función de los esfuerzos principales, a partir de la selección del criterio de Huber & Mises o Mohr.
- Comprobar o calcular el coeficiente de seguridad mediante la condición de resistencia.

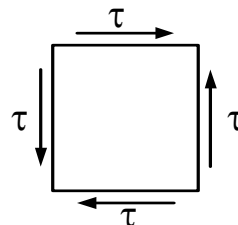
4.11 Introducción

La verificación de la resistencia de un elemento estructural puede hacerse de un modo fácil en el caso de los estados tensionales uniaxiales de tracción o de compresión y en el caso de que aparezcan solamente esfuerzos tangenciales, planteando la condición del siguiente modo.

$$\sigma_{\max} \leq [\sigma]$$



$$\tau_{\max} \leq [\tau]$$



En esta conferencia se muestra la expresión que permite establecer la condición de resistencia en el caso más general de tensiones partiendo de algunas teorías de resistencia que establecen un criterio de cálculo.

Se da a conocer la Teoría Mecánica, a partir de la cual, de acuerdo al estado tensional a que se somete el cuerpo, se conocerá si el comportamiento del material será dúctil o frágil.

4.12 Teorías de resistencia

Para el estudio de cómo establecer la condición de resistencia en el caso de un estado tensional de mayor complejidad se hace necesario conocer para que valor de las tensiones

$(\sigma_1 \quad \sigma_2 \quad \sigma_3)$ tiene lugar el estado límite del material, o sea, en que instante ocurrirá la rotura si es un material de comportamiento frágil o la fluencia si el mismo es dúctil.

La solución de este problema queda satisfecha si se conociera los valores límites de las tensiones principales antes enumeradas $(\sigma_{1l} \quad \sigma_{2l} \quad \sigma_{3l})$. En general se puede plantear que para un estado tensional complejo el estado peligroso para un mismo material puede tener lugar para diferentes valores de las tensiones principales, en dependencia de la relación existente entre estas.

Según las condiciones de carga el material puede encontrarse en distintos estados mecánicos (estado elástico, estado plástico, estado de rotura), estos estados mecánicos dependen fundamentalmente del estado tensional del punto analizado.

Estado tensional límite: Es aquel en que ocurre una variación cualitativa de las propiedades del material, es decir, el paso de un estado mecánico a otro (en el material dúctil se considera el límite elástico y para el material frágil se considera el límite de rotura).

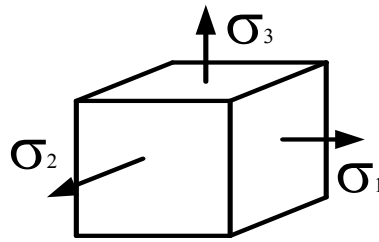
Cuando se hace el cálculo de resistencia de un sistema partiendo de las tensiones máximas, el estado tensional en el punto más peligroso del cuerpo en cuestión, se compara con el estado tensional límite del punto dado. Este problema es de fácil solución ya que en un ETL se considera que la tensión límite es uno de estos cuatro valores $\sigma_{ft} \quad \sigma_{fc} \quad \sigma_{rt} \quad \sigma_{rc}$.

La determinación experimental de las características de resistencia en el caso de un estado tensional complejo resulta en extremo difícil, esto trae como consecuencia la necesidad de usar los resultados experimentales obtenidos a partir de estados tensionales más simples para la evaluación de la resistencia de un estado tensional de mayor complejidad. En estos casos el estado tensional complejo se sustituye por uno simple, que se elige de tal forma que según cierto criterio determinado, este sea equivalente al estado tensional más complejo.

La elección del criterio de equivalencia depende de una serie de factores que se consideran determinantes para la aparición del estado límite del material, por lo anterior el criterio de equivalencia se denomina criterio de resistencia. Cada proposición fundada en uno u otro criterio de resistencia sirve de base para crear tal o cual teoría de resistencia

Antes de exponer las teorías de resistencia que serán estudiadas se hace necesario definir algunos conceptos importantes.

Supóngase un estado tensional como el que se muestra en la figura:



Aumentando proporcionalmente todas las componentes del estado tensional, se llega al estado límite. **En este caso se denomina coeficiente de seguridad al número que indica cuantas veces se deben aumentar, simultáneamente, todas las componentes del estado tensional para que este se convierta en un estado límite.**

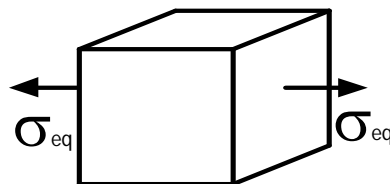
Esta definición no contradice la anteriormente vista para el ETL y de cortante puro, ya que

$$n\sigma_{\max} = \sigma_{\lim}$$

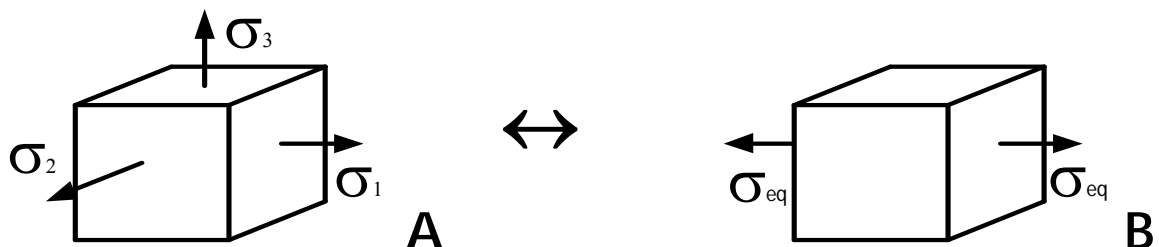
$$n\tau_{\max} = \tau_{\lim}$$

Si en dos estados tensionales son iguales sus coeficientes de seguridad, estos se consideran igualmente peligrosos, lo que permite comparar estados tensionales partiendo del grado de peligrosidad dado por el coeficiente de seguridad.

Para un material dado la comparación se lleva a cabo sin recurrir al coeficiente de seguridad, sino comparando con otro estado tensional que se toma como patrón, siendo lo más aceptable admitir como patrón el estado de tracción simple.



Tensión equivalente: Es una tensión normal de tracción que representa en un ETL la misma peligrosidad de un estado tensional de mayor complejidad.



El estado tensional **A** representa la misma peligrosidad del estado tensional **B** siendo la comprobación

$$\sigma_{eq} \leq [\sigma] = \frac{\sigma_{limt}}{n}$$

Las teorías de resistencia no tiene carácter universal y las que pueden dar resultados satisfactorios para un material, conducen a malos resultados para otros

El surgimiento de las teorías o criterios de resistencia está íntimamente vinculado al desarrollo histórico de la Resistencia de Materiales, así en la medida en que más se conocía del comportamiento de los materiales, nuevas hipótesis se planteaban, las que al mostrar su validez en la práctica pasaron a ser las conocidas teorías o **criterios de resistencia**.

De todo lo anterior se desprende que estos criterios de resistencia están directamente vinculados a personalidades, que han hecho aportes significativos en la Resistencia de Materiales. Así en orden histórico (cronológico) se tiene:

- **Teoría de Galileo** o del esfuerzo normal máximo. Según esta teoría la equivalencia entre dos estados tensionales puede ser asegurada si sus esfuerzos principales máximos son iguales.

$$\sigma_{eq} = \sigma_1$$

Esta teoría también aparece como Galileo – Leibnitz o Clebsch – Rankine.

Describe satisfactoriamente el estado límite de materiales bastante frágiles y lo suficientemente homogéneos tales como el vidrio, el yeso, algunas cerámicas, etc.

- **Teoría de Mariotte & Saint Venant** o de la deformación lineal máxima.

$$\varepsilon_{eq} = \varepsilon_1$$

$$\frac{\sigma_{eq}}{E} = \frac{1}{E} [\sigma_1 - \nu(\sigma_2 + \sigma_3)]$$

$$\sigma_{eq} = \sigma_1 - \nu(\sigma_2 + \sigma_3)$$

- **Teoría de Coulomb** o del esfuerzo tangencial máximo. Según esta teoría dos estados tensionales son igualmente peligrosos cuando sus esfuerzos tangenciales máximos sean iguales

$$\tau_{eq} = \tau_{MÁX}$$

$$\frac{\sigma_{eq}}{2} = \frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2}$$

$$\sigma_{eq} = \sigma_1 - \sigma_3$$

Describe satisfactoriamente el estado límite de los materiales plástico de poco endurecimiento (aceros revenidos), que se caracterizan por la localización de las deformaciones plásticas.

- **Teoría de Huber & Mises** o de la energía potencial unitaria debido al cambio de forma. Dos estados tensionales son igualmente peligrosos si sus energías potenciales unitarias debido al cambio de forma son iguales.

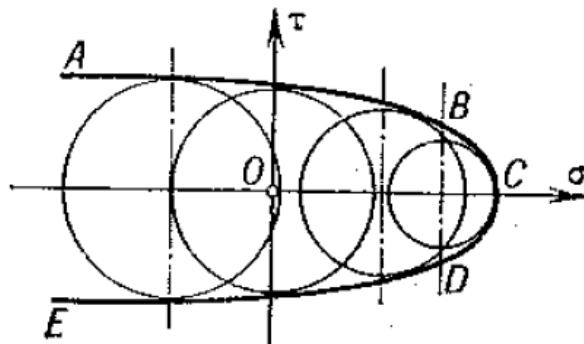
$$U_{0Feq} = U_{0F}$$

$$\frac{1+\nu}{6E} 2\sigma_{eq}^2 = \frac{1+\nu}{6E} \left[(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2 \right]$$

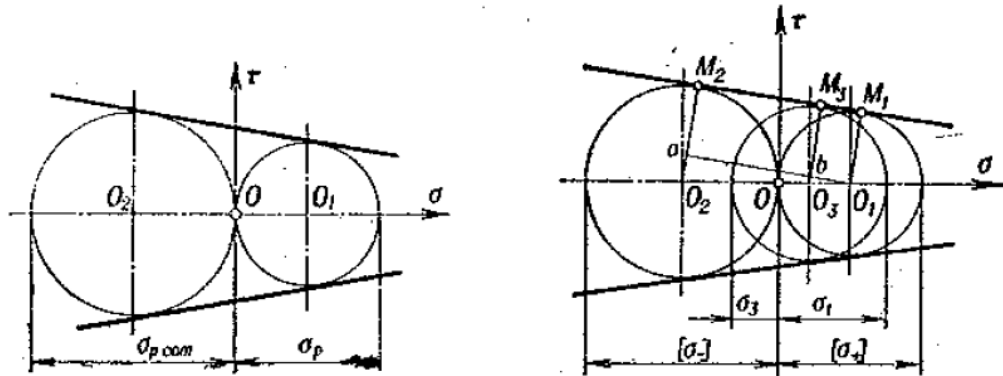
$$\sigma_{eq} = \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2}$$

Aplicable con exactitud a materiales plásticos en los cuales exista la misma resistencia a la tracción que a la compresión

- **Teoría de Mohr** o de los estados tensionales límites. Esta se fundamenta en la suposición de que la resistencia del material depende principalmente, en el caso de un estado tensional lo mas general posible, de la magnitud y signo de la tensión principal mayor σ_1 y menor σ_3 (el error por no considerar σ_2 no sobrepasa generalmente un 12 ó 15%). Partiendo de esta suposición, cualquier estado tensional puede representarse por un círculo de Mohr construido sobre las tensiones principales σ_1 y σ_3 . Si durante σ_1 y σ_3 dadas se altera la resistencia del material, el círculo construido sobre estas tensiones se llama círculo límite. Variando la correlación entre σ_1 y σ_3 se obtiene, para un material dado, una familia de círculos límites. Es posible sustituir con una adecuada precisión la evolvente a la familia de círculos por rectas tangentes a los círculos de Mohr contruidos para la tracción y la compresión.



Familia de círculo de Mohr y curva evolvente a los mismos ABCDE



Simplificación usando solo los círculos de correspondientes a los estados de tracción y compresión.

De las relaciones geométricas entre los segmentos que se destacan en los círculos anteriores se obtiene la relación siguiente.

$$\sigma_{eq} = \sigma_1 - k\sigma_3$$

donde:

$$k = \frac{\sigma_{ft}}{\sigma_{fc}}, \text{ para materiales cuyo comportamiento es dúctil}$$

$$k = \frac{\sigma_{rt}}{\sigma_{rc}}, \text{ para materiales cuyo comportamiento es frágil}$$

σ_{ft} : Límite de fluencia a la tracción

σ_{fc} : Límite de fluencia a la compresión

σ_{rt} : Límite de resistencia a la tracción

σ_{rc} : Límite de resistencia a la compresión

De las cinco teorías de resistencia se seleccionará:

- Para **materiales que se comportan como dúctiles** con $k = \frac{\sigma_{ft}}{\sigma_{fc}} = 1$, el criterio de **Huber & Mises**, que establece:

$$\sigma_{eq} = \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2}$$

- Para el **resto de los materiales** el criterio de **Mohr**, que establece:

$$\sigma_{eq} = \sigma_1 - k\sigma_3$$

Así para **diseñar y comprobar en base a la condición de resistencia** se debe **cumplir** que:

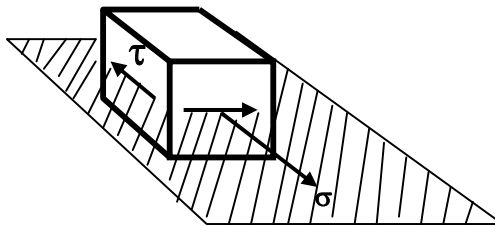
$$\sigma_{eq} \leq [\sigma]$$

donde: $[\sigma] = \frac{\sigma_{ft}}{n}$ cuando el **comportamiento del material es dúctil**

$[\sigma] = \frac{\sigma_{rt}}{n}$ cuando el **comportamiento del material es frágil**

y n , es el **coeficiente de seguridad**

Si en el punto más peligroso del sólido, el esfuerzo normal actúa en una sola dirección, cuya dirección se encuentra contenida en el plano donde actúan los esfuerzos tangenciales, ambos criterios se pueden expresar de la siguiente forma:



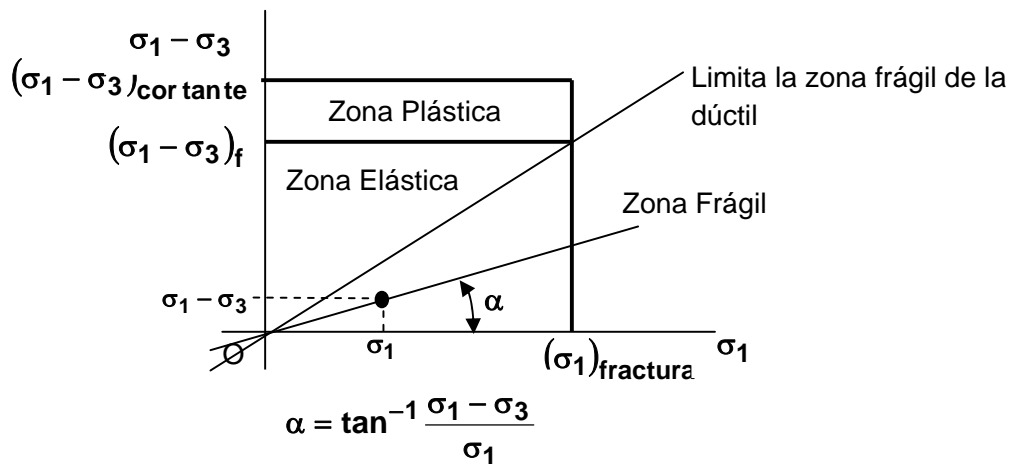
Huber & Mises

$$\sigma_{eq} = \sqrt{\sigma^2 + 3\tau^2} \leq [\sigma]$$

Mohr

$$\sigma_{eq} = \frac{1-k}{2} \sigma + \frac{1+k}{2} \sqrt{\sigma^2 + \tau^2} \leq [\sigma]$$

Para dar respuesta a la interrogante, ¿cuándo se sabe si el comportamiento del material es dúctil o frágil?, basta con remitirse a la **Teoría Mecánica**, la que a partir de la gráfica que se muestra, permite con la obtención del ángulo α discriminar el comportamiento dúctil o frágil del material.



De la Teoría Mecánica se arriba a la conclusión de que el comportamiento dúctil o frágil no es una propiedad del material sino que depende del estado tensional a que está sometido el material.

4.13 Conclusiones

Se debe destacar que la importancia de las teorías de resistencia así como sus aplicaciones de acuerdo al tipo de material, lo que dice acerca de que estas teorías no son de carácter universal y las que dan resultados que pudieran considerarse satisfactorios para un material pudieran dar resultados negativos para otros. El estudio de la teoría mecánica dada en esta conferencia servirá para dar una orientación con respecto a que tipo de estado tensional límite corresponde a un estado tensional dado, lo que a su vez definirá si la posible falla es por deslizamiento o separación estableciéndose un comportamiento de tipo dúctil o de tipo frágil para la falla.

En futuros desarrollos dentro de esta asignatura solo serán usadas las teoría de Huber Mises y de Mohr de acuerdo a como fue orientado en esta conferencia.

PREGUNTAS TEORICAS TEMA IV. RESISTENCIA DE MATERIALES I

1. ¿Por qué se hace necesario el uso de Teorías de Resistencia?
2. ¿Qué se entiende por estado tensional límite?
3. ¿Qué se entiende por coeficiente de seguridad?
4. ¿Qué se entiende por esfuerzo equivalente?
5. De acuerdo a lo visto en esta conferencia cuando se debe aplicar la teoría de Huber Mises y cuando la de Mohr.