

## RESISTENCIA DE MATERIALES I

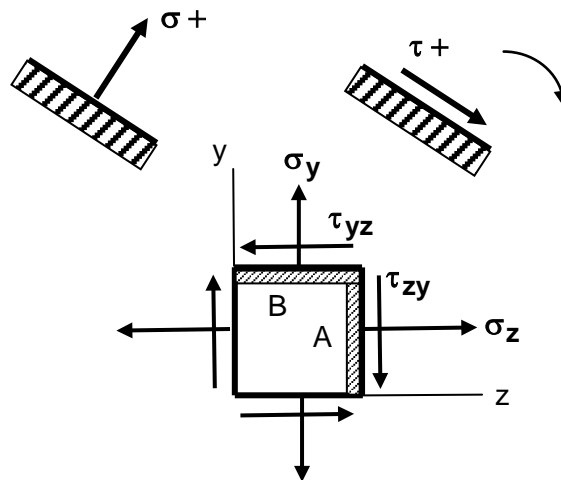
## Clase Práctica 6

## ESTADO TENSIONAL Y DEFORMACIONAL

**Recordar de la conferencia los siguientes aspectos:**

Seguidamente se expondrá la metodología de obtención de los esfuerzos para diferentes orientaciones del elemento diferencial cúbico mediante la utilización del Círculo de Mohr.

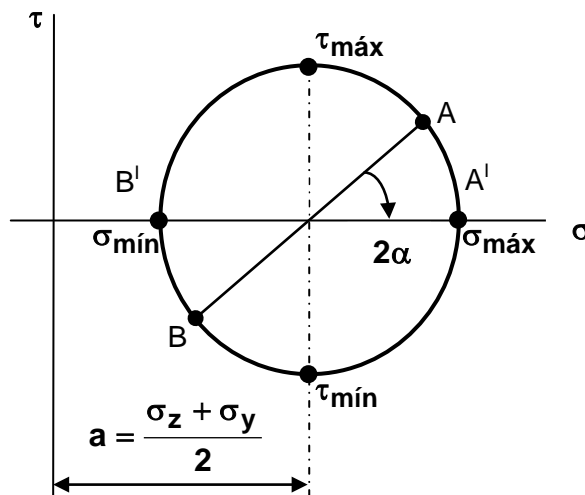
Ante todo hay que definir la convención de signos de los esfuerzos, si el esfuerzo normal  $\sigma$  sale de la cara el esfuerzo es positivo, si el esfuerzo tangencial  $\tau$  gira respecto a la cara a favor de las manecillas del reloj es positivo, de lo contrario ambos esfuerzos serán negativos, respectivamente.



- Se seleccionan dos caras A, B, contiguas y normales del elemento diferencial.
- Se le asocian a las caras seleccionadas un par coordenado con los valores de los esfuerzos actuantes y teniendo en cuenta la convención de signo, así:

$$A \equiv (\sigma_z, \tau_{zy}) \text{ y } B \equiv (\sigma_y, -\tau_{yz})$$

- Se plotean los puntos A y B en un sistema de referencias  $\tau$  vs  $\sigma$
- Se unen mediante un segmento de recta los puntos A y B y donde se produzca la intersección con el eje  $\sigma$  queda definido el centro C de la circunferencia.
- Haciendo centro en C y pasando por A y B queda definida la circunferencia o Círculo de Mohr.



Si a partir del Círculo de Mohr se desean determinar los esfuerzos normales máximo y mínimo basta con girar la recta AB un ángulo  $\alpha$  (recordar que en el Círculo de Mohr se representa el doble del ángulo que existe en la realidad) a favor de las manecillas del reloj hasta pasar a la nueva posición A'B' para determinar las magnitudes de los esfuerzos en cuestión. De forma similar se podrán determinar las magnitudes de los esfuerzos tangenciales máximos y mínimos.

Es de destacar que las orientaciones donde los esfuerzos normales son máximo y mínimo se denominan **planos o caras principales** y los esfuerzos normales que actúan en los mismos **esfuerzos principales**. Pudiendo ahora redefinir que:

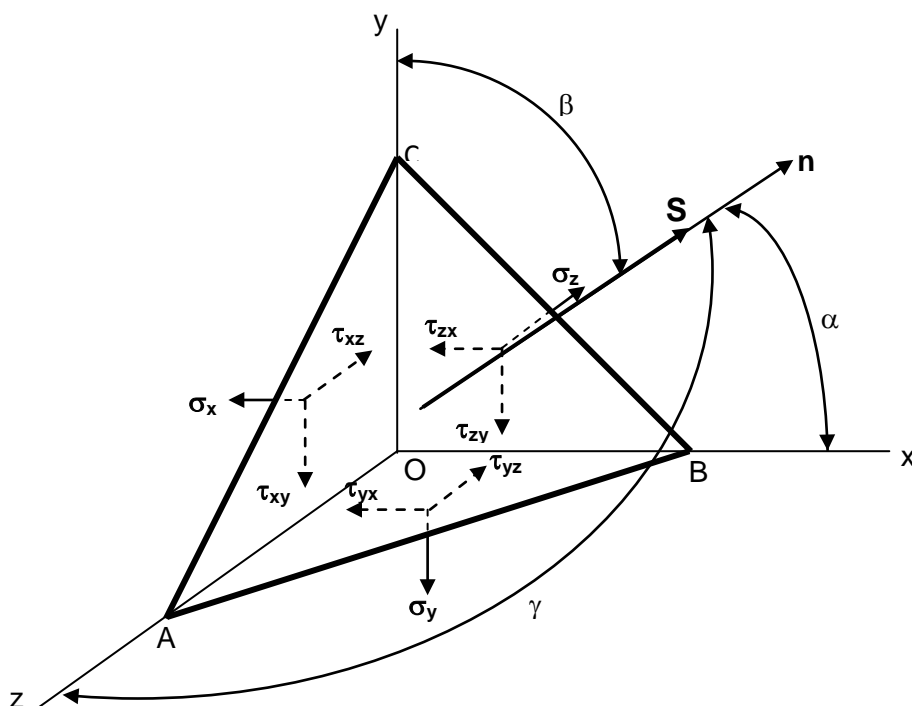
- El **estado tensional lineal** es aquel en que en el elemento diferencial cúbico sólo **actúa un esfuerzo principal diferente de cero**.
- El **estado tensional plano** es aquel en que en el elemento diferencial cúbico sólo **actúan dos esfuerzos principales diferentes de cero**.
- El **estado tensional volúmetrico** es aquel en que en el elemento diferencial cúbico sólo **actúan tres esfuerzos principales diferentes de cero**.

Dichos esfuerzos principales se designan por:  $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \sigma_3$  y deben cumplir con la desigualdad mostrada.

Es de señalar otro aspectos de interés que se desprenden de la observación y análisis del Círculo de Mohr:

- Se ratifica el carácter tensorial de los esfuerzos.
- La simetría del círculo respecto al eje  $\sigma$  corrobora el Principio de Paridad de los Esfuerzos Tangenciales en el elemento diferencial cúbico.
- En los planos donde actúan los esfuerzos principales los esfuerzos tangenciales son nulos. Por ello se define que los **planos principales son aquellos donde los esfuerzos tangenciales son nulos**.
- Entre los planos principales y los planos donde actúan los esfuerzos tangenciales máximos y mínimos siempre existen entre ellos un ángulo de  $45^\circ$ , respectivamente.

Si se desea determinar los esfuerzos principales **S**, basta con colocar el esfuerzo principal **S** en una cara principal y estableciendo nuevamente las condiciones de equilibrio de fuerzas en los tres ejes se



tendrá:

$$p_x = S \cos \alpha$$

$$p_y = S \cos \beta$$

$$p_z = S \cos \gamma$$

Sustituyendo estas ecuaciones en las expresiones generales del estado tensional volumétrico se arribará al sistema de ecuaciones homogéneas:

$$(\sigma_x - S) \cos \alpha + \tau_{xy} \cos \beta + \tau_{xz} \cos \gamma = 0$$

$$\tau_{yx} \cos \alpha + (\sigma_y - S) \cos \beta + \tau_{yz} \cos \gamma = 0$$

$$\tau_{zx} \cos \alpha + \tau_{zy} \cos \beta + (\sigma_z - S) \cos \gamma = 0$$

cuyo sistema de ecuaciones para que tenga solución debe cumplirse que el determinante del sistema sea nulo.

$$\begin{vmatrix} (\sigma_x - S) & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & (\sigma_y - S) & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & (\sigma_z - S) \end{vmatrix} = 0$$

obteniéndose la ecuación cúbica:

$$S^3 - k_1 S^2 + k_2 S - k_3 = 0$$

donde:

$$k_1 = \sigma_x + \sigma_y + \sigma_z$$

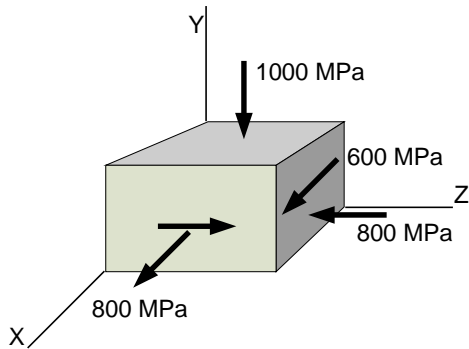
$$k_2 = \sigma_x \sigma_y + \sigma_y \sigma_z + \sigma_z \sigma_x - \tau_{xy}^2 - \tau_{yz}^2 - \tau_{zx}^2$$

$$k_3 = \begin{vmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \sigma_y & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_z \end{vmatrix}$$

son los invariantes del estado tensional; como se observa de la ecuación cúbica se obtendrán tres raíces:  $S_1, S_2, S_3$ , a partir de las cuales se determinarán los esfuerzos principales:  $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \sigma_3$ , que permitirán definir el tipo de estado tensional.

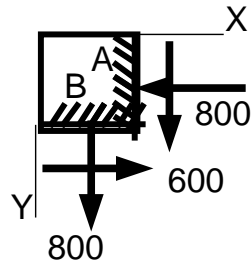
### Problema 1

Para elemento diferencial mostrado determine:



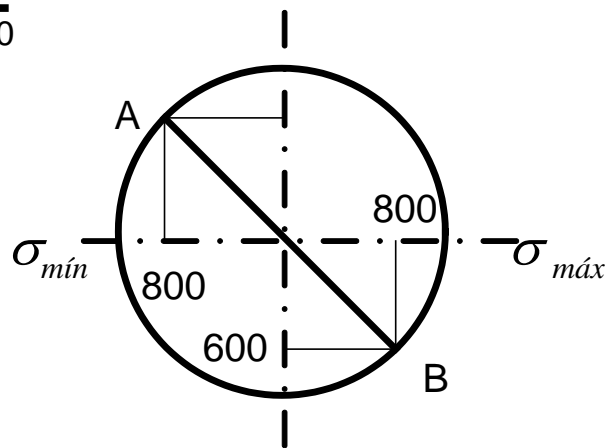
- esfuerzos principales
- esfuerzo tangencial máximo
- tipo de estado tensional
- ángulo que se debe girar el elemento para obtener los esfuerzos principales
- representar el elemento girado

Solución:



$$A \equiv (-800, 600)$$

$$B \equiv (800, -600)$$



$$\sigma_{\max/\min} = \frac{\sigma_x + \sigma_z}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_z}{2}\right)^2 + \tau_{xz}^2}$$

por lo que sustituyendo obtenemos:

$$\sigma_{\max} = 1000 \text{ MPa}$$

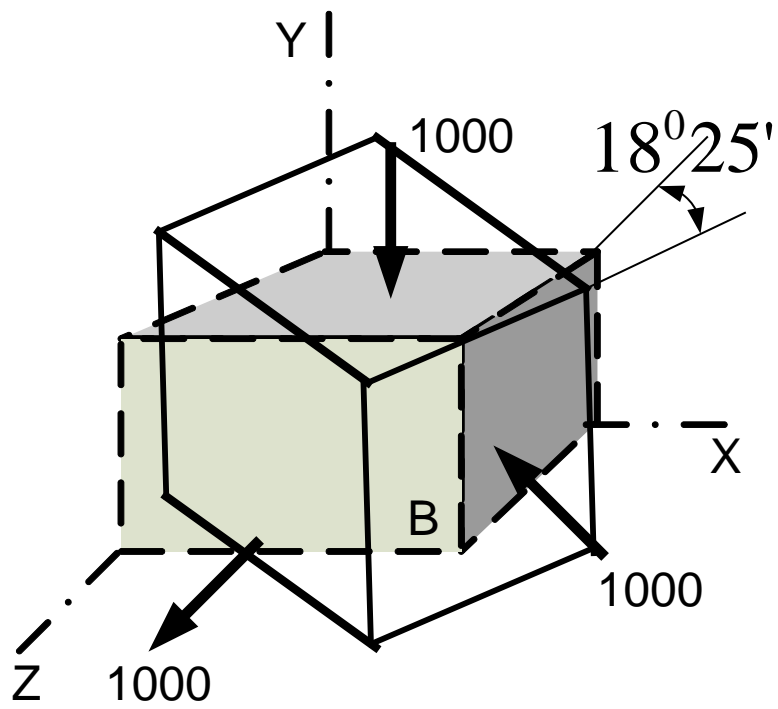
$$\sigma_{\min} = -1000 \text{ MPa}$$

$$\text{a) } \sigma_1 = 1000 \text{ MPa}; \quad \sigma_2 = \sigma_3 = -1000 \text{ MPa}$$

$$\text{b) } \tau_{\max} = \frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2} \Rightarrow \tau_{\max} = 1000 \text{ MPa}$$

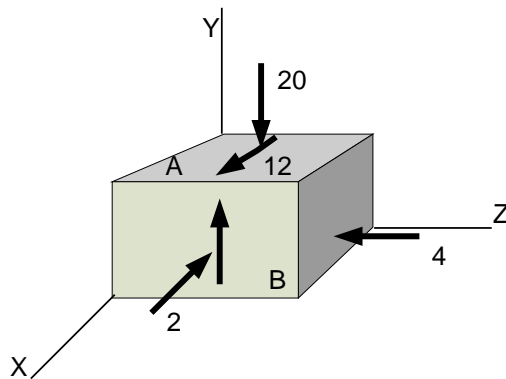
c) Estado tensional de volumen

$$\text{d) } 2\alpha \tan^{-1} \frac{600}{800} \Rightarrow \alpha = 18^\circ 25'$$



**Problema 2**

Para el elemento diferencial mostrado, determine:



- esfuerzos principales
- tipo de estado tensional
- esfuerzo tangencial máximo
- represente el elemento en la posición de esfuerzos principales

Solución:

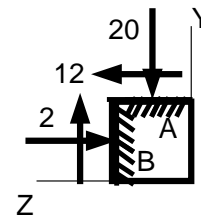
$$A \equiv (-20, -12)$$

$$B \equiv (-2, 12)$$

$$\sigma_{\max/\min} = \frac{\sigma_x + \sigma_z}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_z}{2}\right)^2 + \tau_{xz}^2}$$

$$\sigma_{\max} = 4 \text{ MPa}$$

$$\sigma_{\min} = -26 \text{ MPa}$$



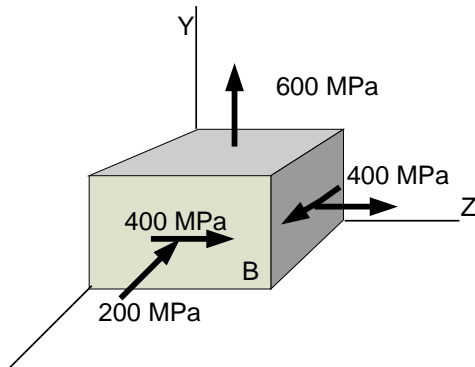
$$a) \quad \sigma_1 = 4 \text{ MPa}; \quad \sigma_2 = -4; \quad \sigma_3 = -26 \text{ MPa}$$

b) Estado tensional de volumen

$$c) \quad \tau_{\max} = \frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2} \Rightarrow \tau_{\max} = 15 \text{ MPa}$$

**Problema 3**

Para el elemento diferencial mostrado determine:



- esfuerzos principales
- tipo de estado tensional
- deformaciones principales
- esfuerzo tangencial máximo

Datos:

$$E = 2 \cdot 10^5 \text{ MPa};$$

$$\mu = 0,3$$

Solución:

$$A \equiv (-200, -400) \quad B \equiv (400, 400)$$

$$\sigma_{\max/\min} = \frac{\sigma_x + \sigma_z}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_z}{2}\right)^2 + \tau_{xz}^2}$$

$$\sigma_{\max} = 600 \text{ MPa}$$

$$\sigma_{\min} = -400 \text{ MPa}$$

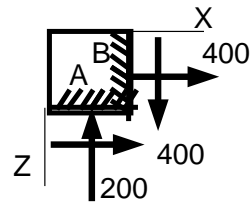
$$a) \quad \sigma_1 = \sigma_2 = 600 \text{ MPa}; \quad \sigma_3 = -400 \text{ MPa}$$

b) Estado tensional de volumen

$$c) \quad \tau_{\max} = \frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2} \Rightarrow \tau_{\max} = 500 \text{ MPa}$$

$$d) \quad \xi_1 = \frac{1}{E} (\sigma_1 - \mu(\sigma_2 + \sigma_3))$$

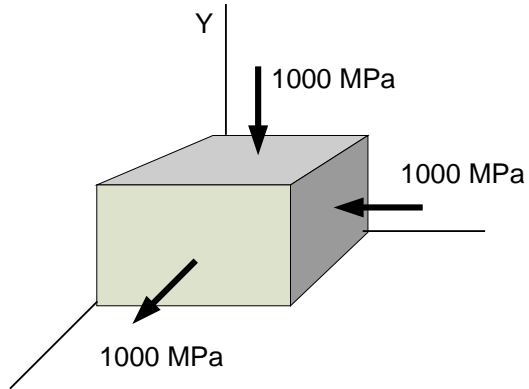
$$\xi_1 = 270 \cdot 10^{-5}$$



**Problema propuesto**

Para el elemento diferencial del primer problema, determine:

- deformaciones principales  $\xi_1$  ,  $\xi_2$  ,  $\xi_3$
- estado deformacional



Datos:

$$E = 2 \cdot 10^5 \text{ MPa};$$

$$\mu = 0,3$$