

RESISTENCIA DE MATERIALES I

Conferencia 10

Tema VI-Flexión

- 6.1 Introducción.
- 6.2 Clasificación de la flexión
- 6.3 Clasificación de la curvatura
- 6.4 Gráficos de momento flector
- 6.5 Flexión pura plana
- 6.6 Flexión pura oblicua
- 6.7 Flexión en barras curvas
- 6.8 Conclusiones

Objetivos:

- Aplicar la condición de resistencia y rigidez en vigas sometidas a flexión plana y oblicua.

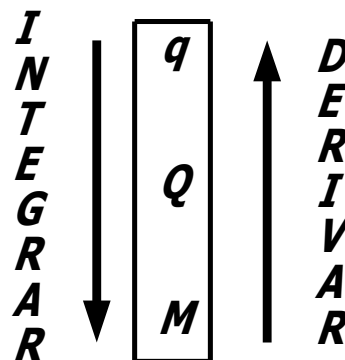
6.1 Introducción

Continuando el análisis de las diferentes acciones internas se comienza el estudio de la flexión de la cual ya son conocidos algunos aspectos de materias anteriores que se relacionan con la construcción de diagramas de acciones internas, específicamente es necesario recordar que para construir los gráficos se deben tener en cuenta las siguientes relaciones entre la fuerza cortante y el momento flector.

Relaciones diferenciales:

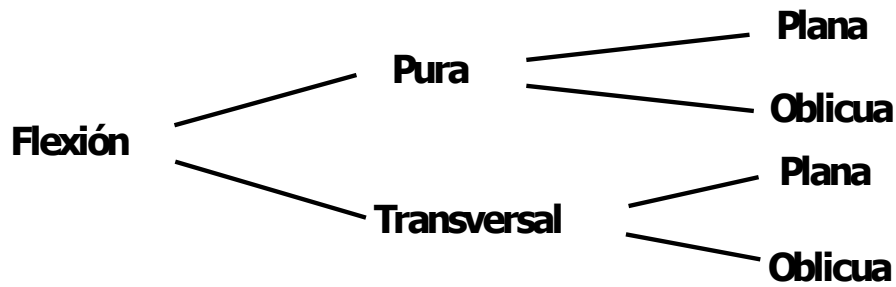
$$q = \frac{dQ}{dz}$$

$$Q = \frac{dM}{dz}$$

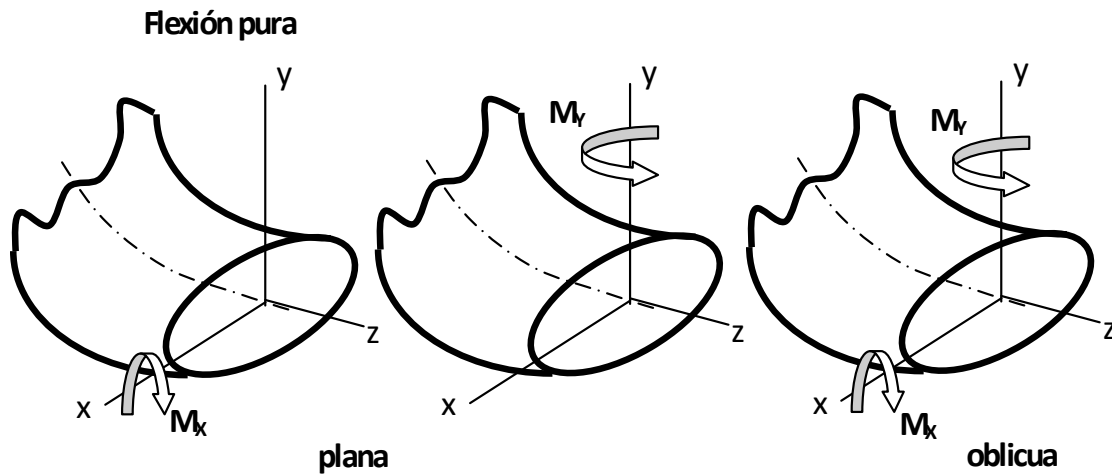


6.2 Clasificación de la flexión

La flexión es uno de los estados que más frecuentemente se presenta en la práctica y con el objetivo de facilitar su estudio se clasifica como se muestra a continuación en flexión pura y flexión transversal, las que a su vez se desdoblan en plana y oblicua.



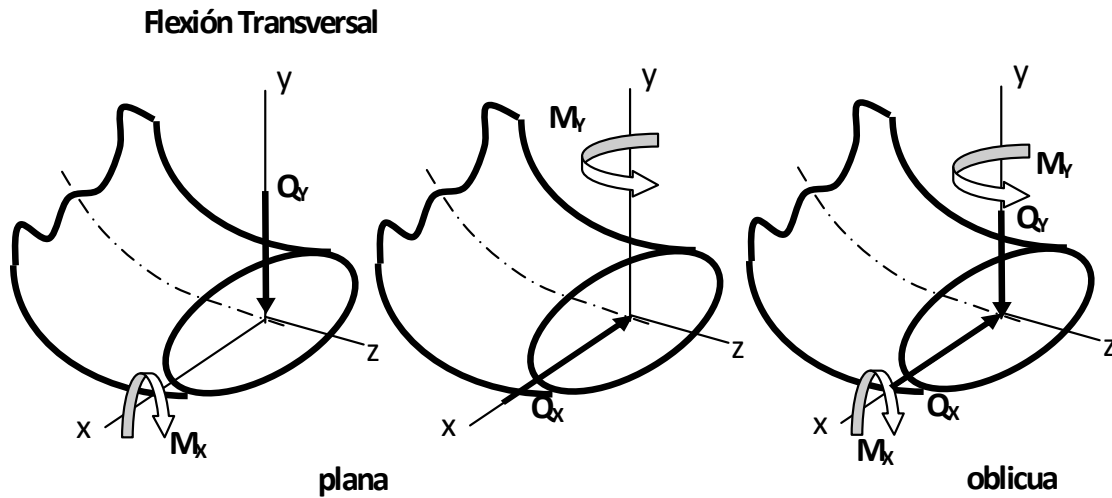
La **flexión pura** se caracteriza porque en la sección transversal de la pieza solo actúan momentos flectores, que cuando lo hacen respecto a un eje se denomina **flexión pura plana** y cuando actúan simultáneamente respecto a ambos ejes se denomina **flexión pura oblicua**.



La **flexión transversal** se caracteriza porque en la sección transversal de la pieza actúan simultáneamente momento flector y fuerza cortante, que cuando lo hacen de tal forma que el momento flector gira respecto al eje x y el cortante respecto al eje y o viceversa, si además se cumple que:

$$Q_y = \frac{dM_x}{dz} \qquad Q_x = \frac{dM_y}{dz}$$

entonces se dice que se está en presencia de una **flexión transversal plana** y cuando ambas flexiones transversales actúan simultáneamente se está en presencia de una **flexión transversal oblicua**. Como se muestra a continuación



6.3 Clasificación de la curvatura

Las barras curvas se clasifican en barras de pequeña y gran curvatura, atendiendo a la relación entre el espesor (h) y el radio de curvatura de la barra (ρ_o), si:

$$\frac{h}{\rho_o} \leq 0,2 \quad \text{Pequeña curvatura}$$

$$\frac{h}{\rho_o} \approx 1 \quad \text{Gran curvatura}$$

En el caso de las barras de pequeña curvatura la capa neutra contiene al eje de la barra

6.4 Gráficos de momentos flectores

Como se sabe para poder comprobar y diseñar, aplicando las condiciones de resistencia y rigidez, resulta imprescindible construir los gráficos de fuerzas internas que permitan seleccionar las secciones más cargadas y definir los puntos más peligrosos del cuerpo analizado, de aquí la necesidad de abordar la construcción de los gráficos de momentos flectores, aspecto que seguidamente se tratará.

Para obtener de forma efectiva los gráficos de fuerzas internas es necesario teniendo ciertos **conocimientos previos** aplicar una adecuada **metodología**.

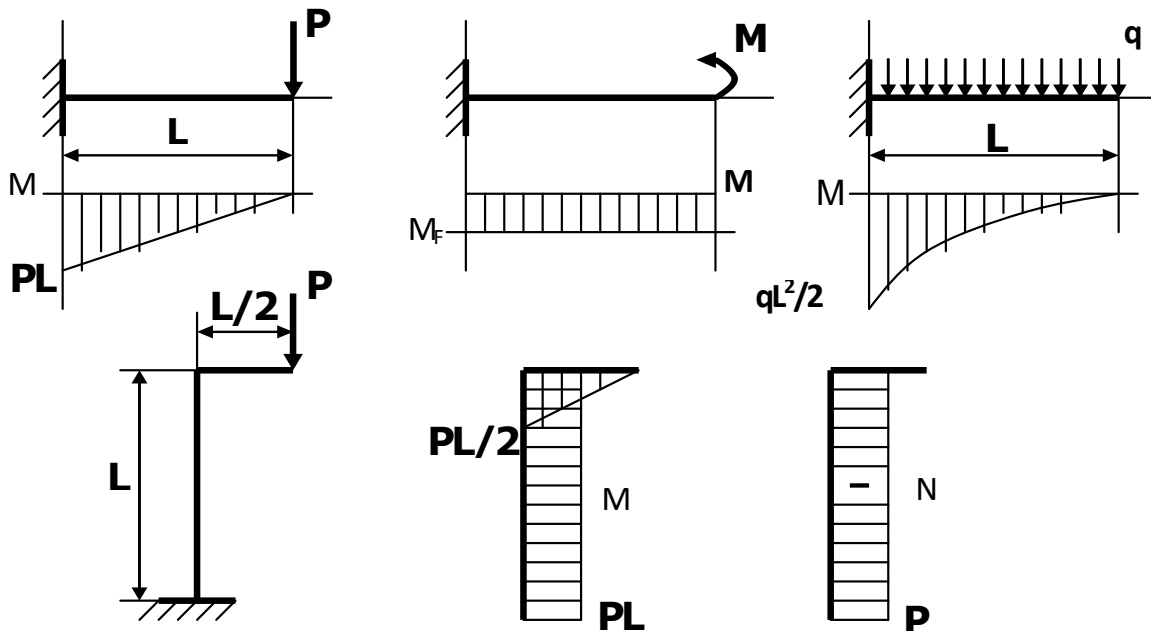
A continuación se relacionan los conocimientos previos y se indica la metodología a seguir en la construcción de dichos gráficos:

- Conocimientos previos
- Gráficos típicos
 - Tipo de fuerza interna que se genera en el sistema por la posición de la fuerza externa respecto al eje del elemento estudiado
 - Principio de superposición

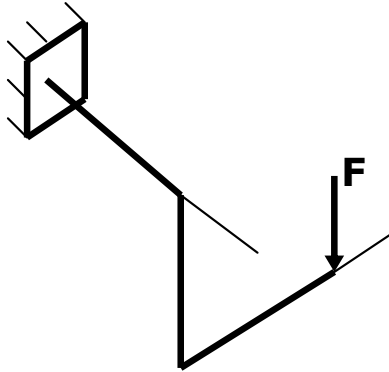
- Metodología
- Obtención de las reacciones en articulaciones y simples apoyos. Colocándolas en sus correctos sentidos.
 - Definición de los tramos y su orden de recorrido
 - Construcción de los gráficos

Seguidamente se ahondarán en los conocimientos previos.

Gráficos típicos



Fuerzas internas generadas a partir de la posición relativa de las fuerzas externas "F" respecto al eje del elemento "B"

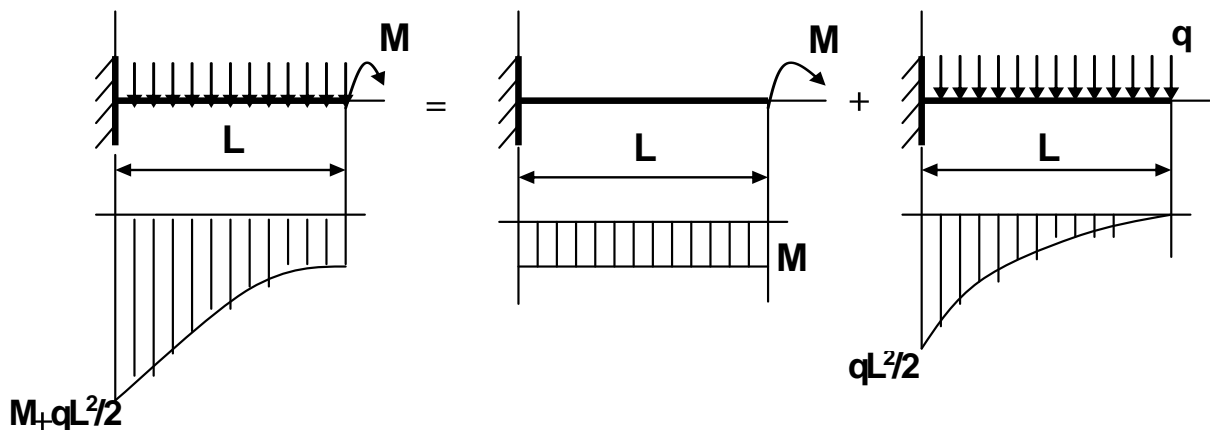


F coincide con $B \Rightarrow N$ cte.

$F \perp B$ y la corta $\Rightarrow M_F$ lineal

$F \parallel B \Rightarrow N$ cte.; M_F cte.

$F \perp B$ y la cruza $\Rightarrow M_F$ lineal; M_T cte.

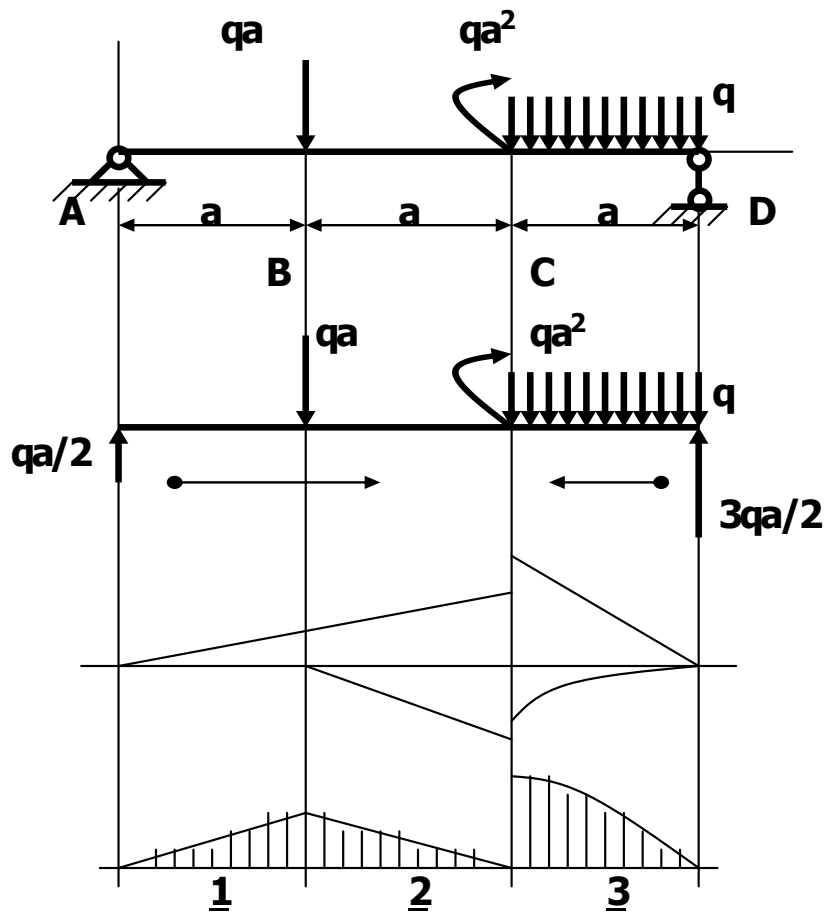


Principio de superposición

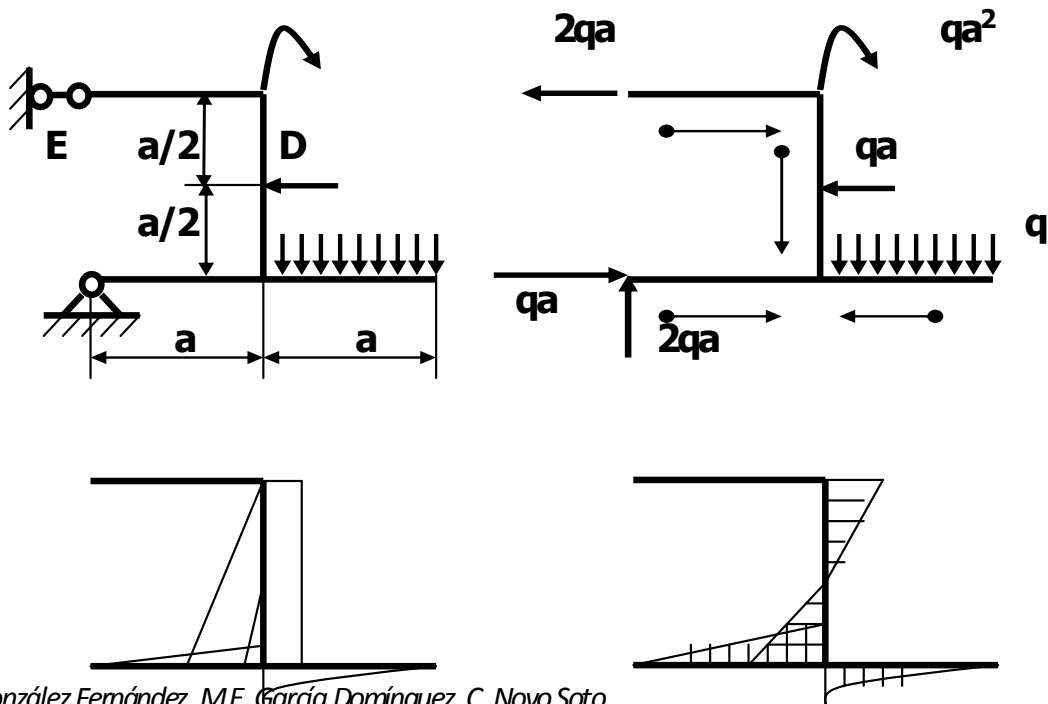
Es decir que **el efecto de la resultante es igual a la suma de los efectos de las componentes.**

A continuación a través de dos ejemplos, aplicando los conocimientos previos y la metodología propuesta se determinarán los gráficos de fuerzas internas en una barra articulada y simplemente apoyada y posteriormente se obtendrán las fuerzas internas en un pórtico plano.

Ejemplo 1



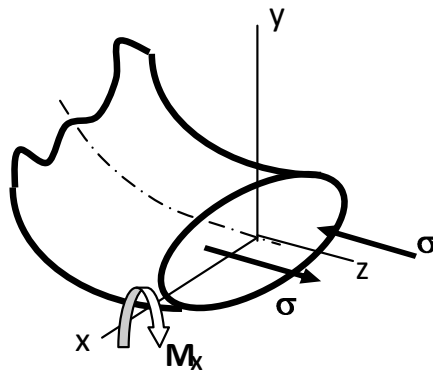
Ejemplo 2:



A partir de los gráficos de fuerzas internas es posible definir las secciones más cargadas y en ellas determinar los puntos más peligrosos, mediante la determinación de los esfuerzos y desplazamientos en dichos puntos.

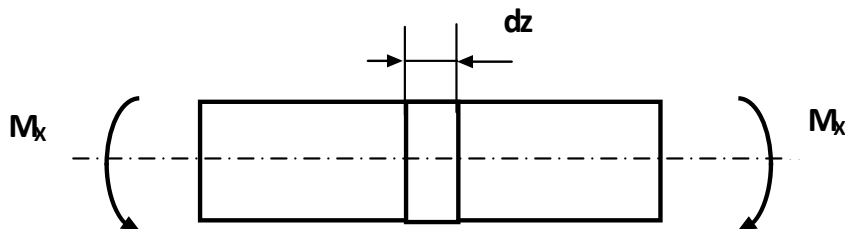
6.5 Flexión pura plana

Como se sabe, el estado de flexión se caracteriza por doblar la pieza respecto al eje donde actúa el momento flector, provocando de esta forma que determinadas fibras se estiren, otras se acorten en tanto que existirá una capa intermedia que no sufre variación en sus dimensiones denominada **capa neutra**. Los únicos esfuerzos capaces de producir alargamiento o acortamiento en las fibras son los esfuerzos normales, como se muestran a continuación

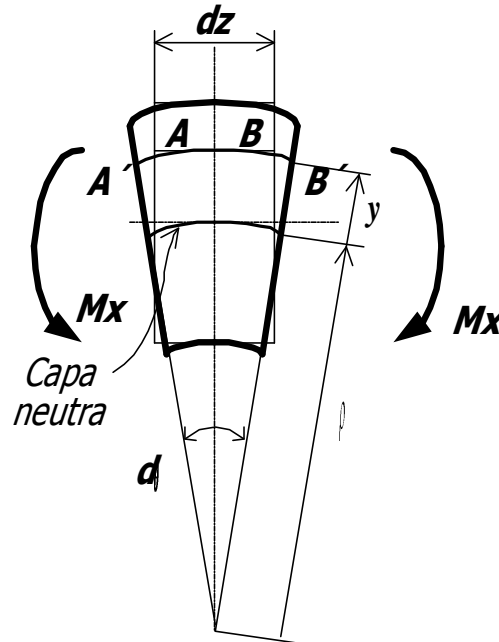


Debido a que cualquier punto de la sección transversal de una pieza sometida a flexión pura estará sometido solamente a esfuerzos normales, dichos puntos tendrán un estado tensional lineal.

Para estudiar las tensiones y deformaciones que surgen en una barra recta sometida a flexión pura plana se analizarán las deformaciones que se producen en un elemento diferencial de dimensión dz , como se muestra a continuación.



Considerando que al deformarse el elemento diferencial dz se cumple la hipótesis de las secciones planas, el elemento adoptará la configuración mostrada en la figura, de forma tal que si se analiza la deformación longitudinal unitaria, ϵ , para una fibra cualquiera **AB**, a una distancia " y " de la capa neutra, se tendrá:



$$\varepsilon = \frac{A'B' - AB}{AB} = \frac{\rho + y \theta - \rho \theta - dz}{dz} = \frac{\rho d\theta + y d\theta - dz}{dz}$$

pero como la dimensión de la capa neutra no varía entonces:

$$\rho d\theta = dz$$

por lo que:

$$\varepsilon = \frac{y}{\rho}$$

donde:

ρ : es el radio de curvatura de la capa neutra una vez deformada.

Por otro lado como se sabe que los puntos de una sección transversal de una pieza sometida a flexión pura tendrá un estado tensional lineal, entonces se cumplirá la Ley de Hooke y por tanto:

$$\sigma = E\varepsilon = E \frac{y}{\rho}$$

lo que indica que los esfuerzos que se generan en la flexión pura varían linealmente en la sección transversal de la pieza y resultan nulos en la fibra contenida en la capa neutra, donde $y = 0$.

Como se sabe que la magnitud de la fuerza normal **N** en la sección de una barra sometida a flexión pura plana es nula entonces:

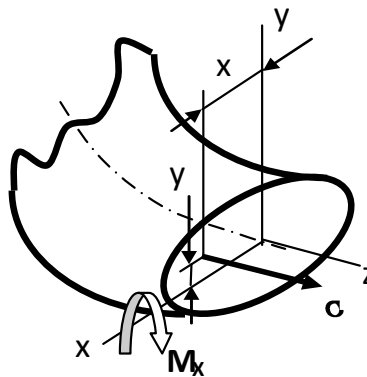
$$N = \int_A \sigma dA = \int_A \frac{E}{\rho} y dA = \frac{E}{\rho} \int_A y dA = 0$$

E , módulo de elasticidad y ρ , radio de curvatura de la capa neutra, al no ser función del área pueden salir fuera de la integral, quedando entonces que:

$$\int_A y dA = 0$$

Sabiendo que la línea neutra es la recta que resulta de la intersección entre la capa neutra y la sección transversal de la barra, al ser el momento estático de la sección nulo, la línea neutra, a partir del cual se mide la coordenada y , es centroidal, provocando que la línea neutra coincida con el eje centroidal x de la sección transversal.

Ahora bien, la expresión del esfuerzo no resulta muy conveniente para la determinación de los esfuerzos en flexión pura, pues está en función del radio de curvatura de la capa neutra, cuya magnitud no es fácil de determinar, es por ello que a continuación se buscará la forma de expresar el esfuerzo en función del momento flector actuante.



Así:

$$M_x = \int dF \cdot y = \int_A \sigma dA \cdot y = \int_A E \frac{y}{\rho} dA \cdot y = \frac{E}{\rho} \int_A y^2 dA = \frac{E}{\rho} I_x$$

O sea:

$$\boxed{\frac{1}{\rho} = \frac{M_x}{EI_x}}$$

donde:

I_x es el momento de inercia de la sección transversal respecto al eje x , y que coincide con la línea neutra.

Si se compara esta expresión con la ya obtenida para los esfuerzos:

$$\sigma = \frac{E}{\rho} y$$

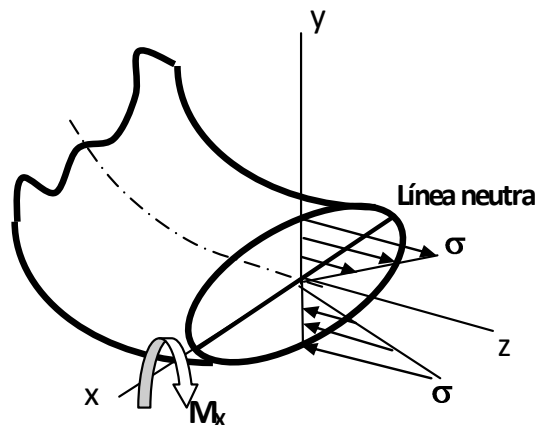
Se arriba a la conclusión que:

$$\sigma = \frac{M_x}{I_x} y$$

Similarmente, si se analiza el caso de la flexión pura plana con el momento flector actuando respecto al eje y, se obtendría:

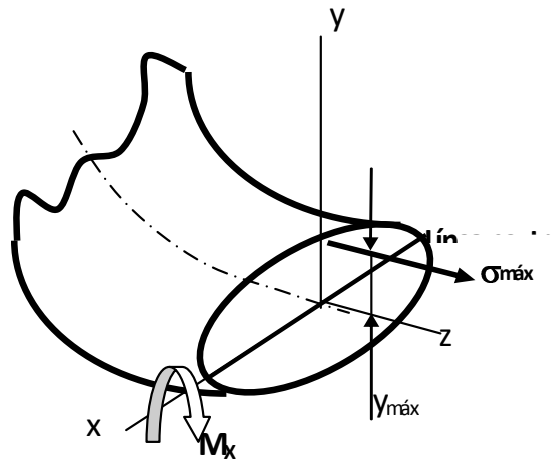
$$\sigma = \frac{M_y}{I_y} x$$

Ratificándose que los esfuerzos en la sección transversal de la barra varían linealmente con la coordenada normal a la línea neutra y que cuando la coordenada coincide con la línea neutra, es decir que es nula, la magnitud del esfuerzo normal también resulta nula.



A continuación, se muestra en la figura la distribución de los esfuerzos normales, correspondientes a los puntos que se encuentran coincidiendo con el eje y de la sección transversal, debido a la flexión pura plana, cuando el momento flector actúa respecto al eje x, se observa además que los puntos por encima de la línea neutra se encuentran sometidos a esfuerzos normales de tracción, en tanto que los puntos que se encuentran por debajo de la línea neutra están sometidos a esfuerzos normales de compresión, lo cual es lógico, ya que el momento flector tracciona las fibras superiores y comprime las inferiores.

Resultados similares se obtendrían si el momento flector estuviera actuando respecto al eje y de la sección transversal.



Los esfuerzos que se generan en la flexión pura son esfuerzos normales que varían linealmente en la medida que se produzca el alejamiento o acercamiento a la **línea neutra** y provocando el alargamiento o acortamiento de las fibras que componen la barra. Es por ello que los puntos más alejados de la línea neutra serán los más peligrosos por estar sometidos a los mayores esfuerzos normales. De tal manera que como se muestra en la figura:

$$\sigma_{m\acute{a}x} = \frac{M_x}{I_x} y_{m\acute{a}x} = \frac{M_x}{\frac{I_x}{y_{m\acute{a}x}}} = \frac{M_x}{W_x}$$

donde: W_x es el módulo de sección respecto al eje x.

Condición de resistencia

La condición de resistencia para el caso de la flexión pura plana será:

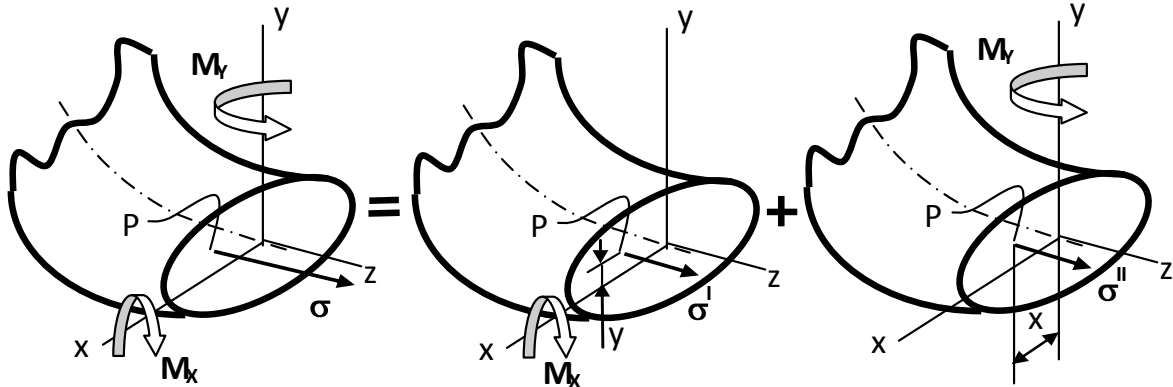
$$\sigma_{m\acute{a}x} = \frac{M_x}{W_x} \leq \sigma_{\text{adm}}$$

y de forma similar se establece la condición de resistencia para la flexión pura plana cuando el momento flector actúa respecto al eje y.

$$\sigma_{m\acute{a}x} = \frac{M_y}{W_y} \leq \sigma_{\text{adm}}$$

6.6 Flexión pura oblicua

La flexión pura oblicua, siempre que se está dentro del período elástico, se puede considerar, a partir del Principio de Superposición, como la suma de dos flexiones puras planas, como se muestra a continuación.



De forma tal, que si se desea determinar el esfuerzo σ en un punto P de una sección transversal sometida a flexión pura oblicua, su magnitud será igual a la suma de los esfuerzos σ^I y σ^{II} correspondientes al mismo punto P en las flexiones puras planas correspondientes, es decir:

$$\sigma = \sigma^I + \sigma^{II}$$

$$\sigma = \frac{M_x}{I_x} y + \frac{M_y}{I_y} x$$

Esta expresión permite determinar el esfuerzo que se genera en cualquier punto de una sección transversal sometida a flexión pura oblicua. Sin embargo, si se desea identificar el punto más peligroso en dicha sección transversal, o sea el punto sometido al mayor valor de esfuerzo será necesario, al igual que en la flexión pura plana, obtener la ecuación de la línea neutra, ya que el punto más alejado de la línea neutra será el más peligroso al tomar el valor mayor del esfuerzo. En el próximo epígrafe se abordará el estudio de la línea neutra en la flexión pura oblicua.

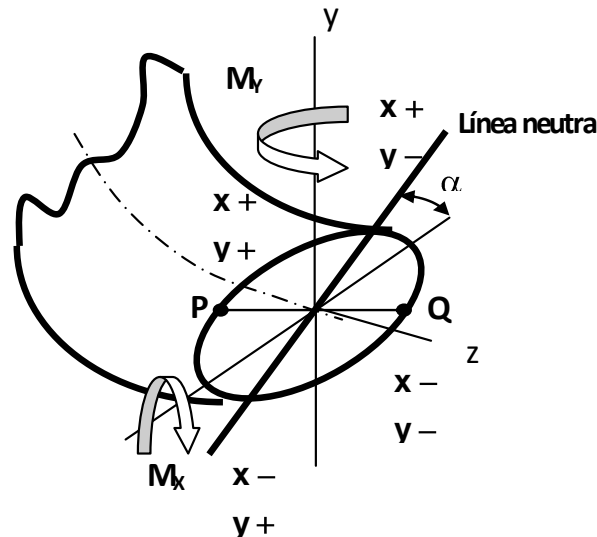
Por definición se sabe que la línea neutra es la recta que contiene los puntos donde los esfuerzos normales debido a la flexión se anulan, por lo tanto, si se desea conocer la ecuación de dicha línea para la flexión pura oblicua, basta con igualar a cero la ecuación que permite determinar la magnitud de los esfuerzos normales, es decir:

de donde:

$$\sigma = \frac{M_x}{I_x} y + \frac{M_y}{I_y} x = 0$$

$$y = -\frac{M_y}{M_x} \frac{I_x}{I_y} x$$

cuya ecuación muestra que es una recta que pasa por el origen del sistema de referencia o centroide de la sección transversal, pero además se observa el engorro de operar con esta ecuación para obtener el punto más peligroso, pues es requiere tener el cuenta la convención de signo de los momentos flectores, así como saber la posición de la recta de acuerdo al signo de la pendiente. Es por ello que se analizará la posición de la línea neutra a partir del análisis físico del tipo de esfuerzo, de tracción o compresión, que genera cada momento flector en cada cuadrante, como se muestra a continuación:



Los signos positivos y negativos en los diferentes cuadrantes se corresponden con los esfuerzos que generan los momentos flectores, **x** se corresponde con **M_x** y **y** con el momento **M_y**. Como es lógico la línea neutra pasará por los cuadrantes donde actúan los esfuerzos positivos y negativos, ya que es la única posibilidad para que los esfuerzos se anulen. Una vez ubicada aproximadamente en los cuadrantes la línea neutra, se fija su posición con exactitud a partir de la determinación del ángulo α , el cual se obtiene de la pendiente de la ecuación de la línea neutra, o sea:

$$\tan^{-1} \alpha = \frac{M_y I_x}{M_x I_y}$$

Una vez ubicada con exactitud la línea neutra se pueden identificar los puntos más peligrosos, **P** y **Q**, que son los más alejados, perpendicular a la línea neutra.

Condición de resistencia

Como ya se sabe, para aplicar la condición de resistencia es necesario definir la posición del punto más peligroso, por ser en éste donde actúan los esfuerzos normales máximos, debido a la flexión pura oblicua. Al saber determinar la ubicación de la línea neutra y a partir de ella definir los puntos más peligrosos, o sea donde los esfuerzos son máximos, se puede de inmediato plantear la expresión de la condición de resistencia:

$$\sigma_{m\acute{a}x} = \sigma_P = +\frac{M_x}{I_x} y_P + \frac{M_y}{I_y} x_P \leq \sigma_{\perp c}^-$$

$$\sigma_{m\acute{a}x} = \sigma_Q = -\frac{M_x}{I_x} y_Q - \frac{M_y}{I_y} x_Q \leq \sigma_{\perp c}^-$$

expresiones que se explican por sí sola.

Cabe destacar que cuando se está en presencia de una sección transversal, donde los momentos de inercia respecto a ambos ejes son iguales, la flexión pura oblicua se puede transformar en una flexión pura plana, ya que al ser iguales los momentos de inercia, como se observa en la ecuación de la línea neutra, la dirección del vector momento resultante \mathbf{M}_f coincide con la línea neutra y entonces se puede expresar la condición de resistencia de la forma:

$$\sigma_{m\acute{a}x} = \pm \frac{M_f}{W} = \pm \frac{\sqrt{M_x^2 + M_y^2}}{W} \leq \sigma_{\perp c}^- \quad \text{para } I_x = I_y$$

de forma tal que si se está en presencia de una sección circular maciza de diámetro d , entonces el módulo de sección W será:

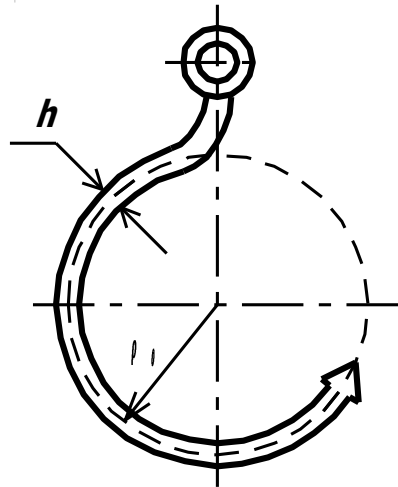
$$W \approx 0,1d^3$$

6.7 Flexión en barras curvas

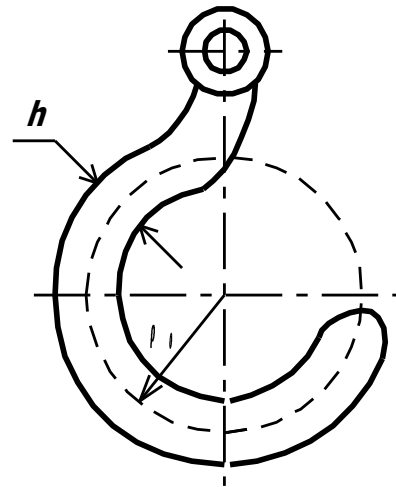
Orientación a los estudiantes, deben realizar este epígrafe como estudio individual

Los ganchos de grúas, eslabones de cadenas, ruedas, arcos, entre otros elementos, pertenecen a un grupo denominado barras curvas ya que los ejes de estos elementos y otros similares describen una curva en plana. En las secciones transversales de este tipo de elemento actúan momentos flectores (\mathbf{M}), fuerzas cortantes (\mathbf{Q}) y fuerzas normales (\mathbf{N}), las relaciones entre M y Q son análogas a las que se obtuvieron para vigas de eje recto.

Las barras curvas pueden clasificarse en barras de pequeña curvatura y barras de gran curvatura.



Si la relación, $\frac{h}{\rho_0} \leq 0.2$, se considera
BARRA DE PEQUEÑA CURVATURA



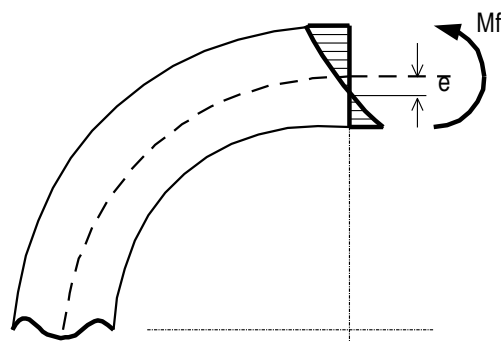
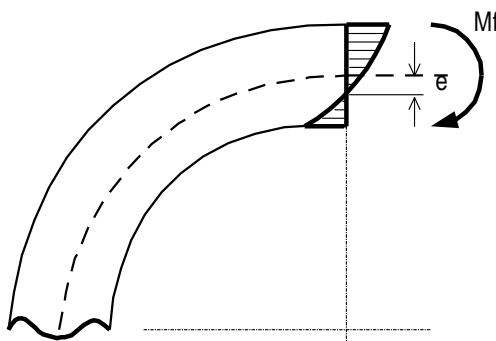
Si la relación, $\frac{h}{\rho_0} \approx 1$, se considera
BARRA DE GRAN CURVATURA

Como se observa lo que determina el tipo de curvatura es la relación entre el espesor de la barra y el radio de curvatura y no el valor inicial de este.

En el caso de las barras de pequeña curvatura se continuará aplicando la expresión obtenida para las barras rectas, lo que implica que aún se sigue considerando que la línea neutra pasa por el centroide de la sección transversal de la barra. Para estudiar la curvatura adicional producida por la flexión se utiliza la siguiente expresión

$$\frac{1}{\rho} = \frac{1}{\rho_0} + \frac{M_x}{EI_x}$$

Si $\frac{h}{\rho_0} > 0.2$ se entra en el campo de las barras de apreciable curvatura donde se produce el fenómeno de corrimiento de la línea neutra con relación al centroide, la siguiente figura muestra este fenómeno. La línea neutra se desplaza hacia el centro de curvatura en todos los casos.



Otros aspectos de interés relacionados con este epígrafe pueden ser vistos en el **Manual de Resistencia de Materiales** de **G. S. Pisarenko**, editorial MIR Moscú, 1985 o alguna otra edición, (capítulo 14, CALCULO DE VIGUETAS PLANAS CURVAS).

6.8 Conclusiones

Se deben destacar una serie de aspectos con respecto a este tema que el estudiante debe dominar para el éxito del trabajo, aspectos tales como la construcción de gráficos de momentos flectores y de ser necesario de fuerza cortantes. Es de mucho interés también la clasificación de la flexión (pura y transversal) y las variantes de plana y oblicua. Así como el uso de las ecuaciones para la determinación de tensiones normales y tangenciales.

El estudiante debe ser capaz de ubicar la línea neutra ya que a partir de ella podrá establecer los puntos más peligrosos para realizar el cálculo o comprobación de resistencia, todos los aspectos anteriores pasan además por el adecuado dominio de las características geométricas de las secciones transversales y la correcta interpretación de las ecuaciones y los términos que las componen.

El caso de las barras curvas solo será analizado dentro de este curso como un aspecto teórico aunque no por esto deja de tener importancia ya que el tipo de elemento que trata es muy común en la vida práctica.

PREGUNTAS TEORICAS TEMA VI. RESISTENCIA DE MATERIALES I

1. ¿Cómo se clasifica la flexión en Resistencia de Materiales? Explique su respuesta.
2. ¿Qué se entiende por capa neutra y por línea neutra en flexión?
3. ¿Cuáles son los puntos mas peligrosos en flexión?
4. Plantee la expresión para el cálculo del esfuerzo normal en el caso de flexión oblicua.
5. Plantee la expresión de Shuravski para el calculo de esfuerzos tangenciales en flexión transversal. Identifique cada termino.
6. ¿Cuáles son las limitaciones de la ecuación de Shuravski?
7. Represente, a través de un esquema, la distribución de tensiones tangenciales para el caso de flexión transversal plana
8. Plantee tres ejemplos de barras curvas sometidas a flexión.
9. ¿Cómo se clasifican las barras curva? Explique.
10. Represente, a través de un esquema, la distribución de tensiones normales en barras curvas, indique la posición de la línea neutra.