

## RESISTENCIA DE MATERIALES I

### Conferencia 11

#### Tema VI- Flexión

- 6.9 Introducción
- 6.10 Flexión transversal plana
- 6.11 Flexión transversal oblicua
- 6.12 Centro de flexión
- 6.13 Conclusiones

#### Objetivos:

- Aplicar la condición de resistencia y rigidez en vigas sometidas a flexión plana y oblicua.

#### 6.9 Introducción

En esta conferencia se analizarán los esfuerzos que se generan en la flexión transversal plana y la flexión transversal oblicua y cómo se determinan sus magnitudes en los distintos puntos que componen la sección transversal de una barra.

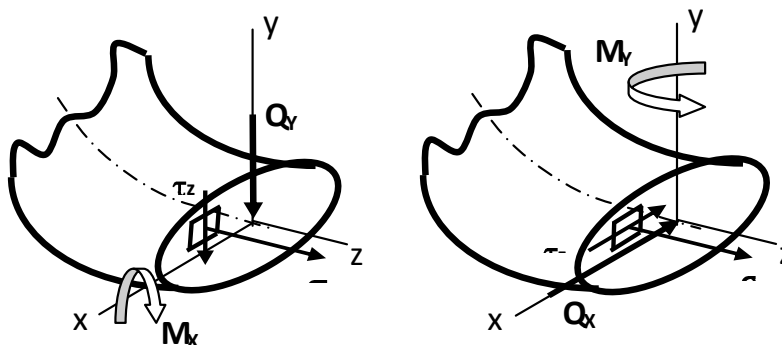
#### 6.10 Flexión transversal plana

Flexión transversal plana: es el estado en el cual en la sección transversal de la pieza actúa momento flector respecto al eje  $x$ , fuerza cortante respecto al eje  $y$  y se cumple que

$Q_y = \frac{dM_x}{dz}$  o actúa momento respecto al eje  $y$ , fuerza cortante respecto al eje  $x$  y se

cumple que  $Q_x = \frac{dM_y}{dz}$ .

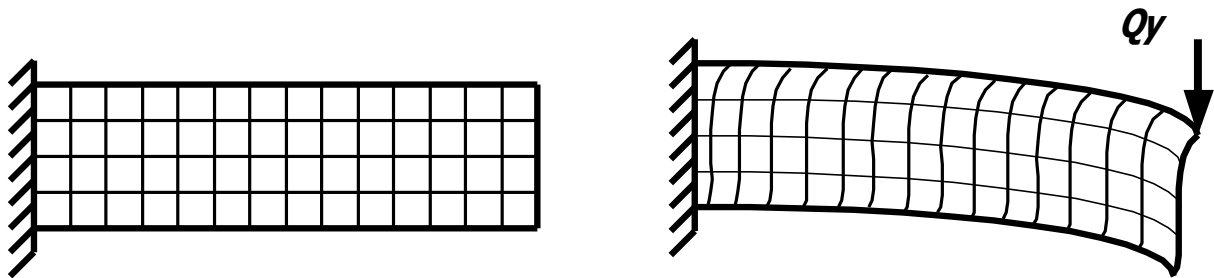
La flexión transversal plana se caracteriza por la acción conjunta del momento flector respecto a un eje y la fuerza cortante en el eje perpendicular al del momento flector, además debe cumplirse la relación diferencial entre el momento flector y la fuerza cortante, como se muestra en la figura.



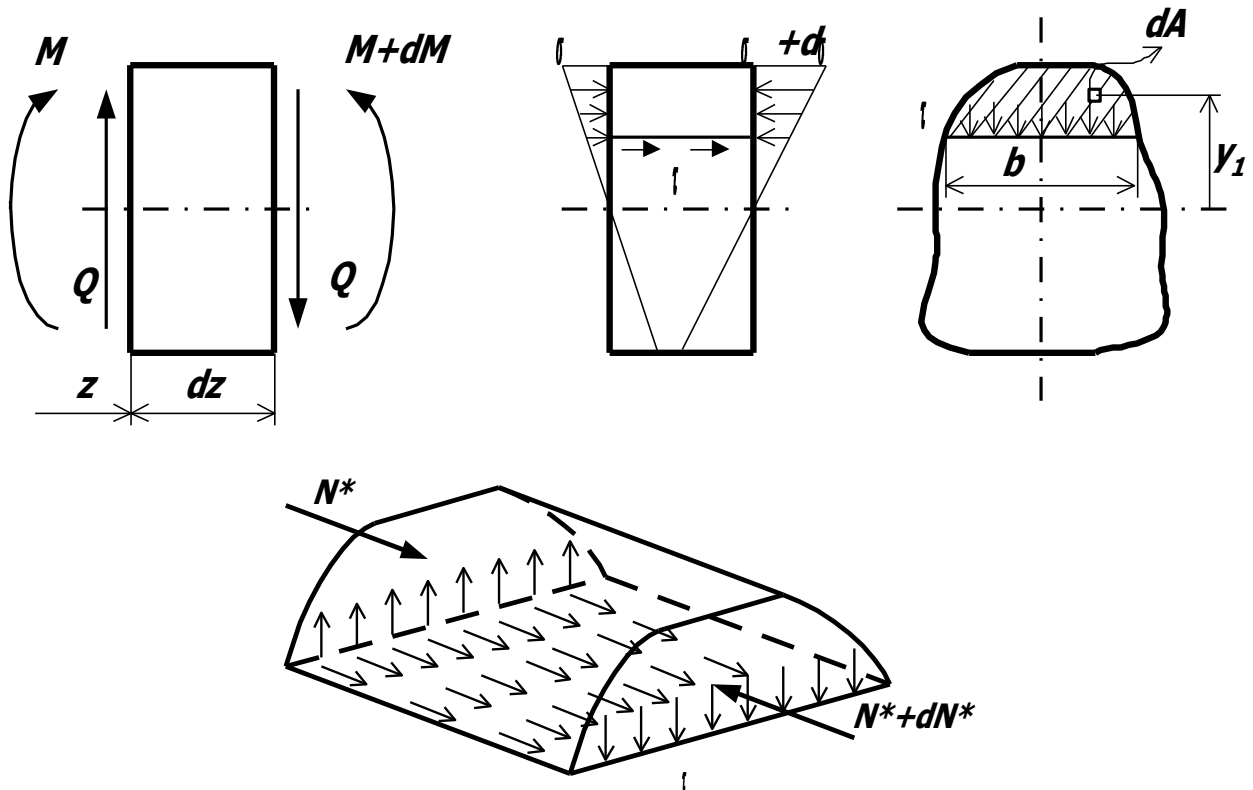
Los momentos flectores generan el esfuerzo normal ( $\sigma$ ), cuya magnitud con una aproximación aceptable se puede obtener a partir de las expresiones brindadas en el estudio de la flexión pura plana. La magnitud del esfuerzo tangencial ( $\tau$ ), generado por las fuerzas tangenciales, se determinan a partir de la fórmula de Shuravskii, que se estudiará en el próximo epígrafe.

### Fórmula de Shuravskii

A partir del equilibrio de una porción diferencial de una barra sometida a flexión transversal plana se deduce la fórmula de Shuravskii, cuyos resultados más exactos se obtienen para una sección transversal rectangular.



En este caso no se cumple la hipótesis de las secciones planas, por lo cual existe un alabeo de las secciones transversales. Tomando para el análisis un elemento diferencial de longitud se tiene lo siguiente



$$N^* = \int \sigma dA = \frac{M_x}{I_x} \int y_1 dA = \frac{M_x}{I_x} S_x^*$$

$$N^* + dN^* = \frac{(M_x + dM_x)}{I_x} S_x^*$$

$$(N^* + dN^*) - N^* = \frac{dM_x}{I_x} S_x^*$$

$$dN^* = \frac{dM_x}{I_x} S_x^*$$

$$\frac{dM_x}{I_x} S_x^* = \tau b dz$$

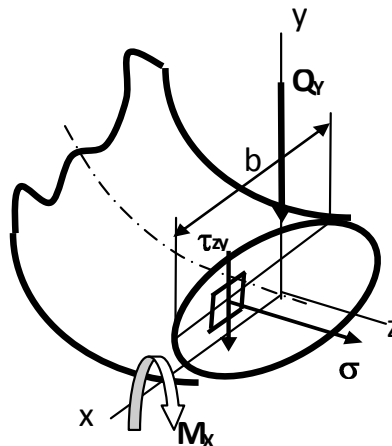
$$\tau = \frac{dM_x}{dz} \cdot \frac{S_x^*}{b I_x}$$

$$\tau = \frac{Q_y S_x^*}{b I_x}$$

La fórmula de Shuravskii permite determinar el esfuerzo tangencial en un punto cualquiera de una sección transversal sometida a flexión transversal plana:

donde:

$\tau$	: Esfuerzo tangencial
$Q$	: Fuerza cortante
$S^*$	: Momento estático del área limitada por la fibra que contiene al punto en cuestión.
$I$	: Momento de inercia
$b$	: ancho de la fibra que contiene al punto en cuestión



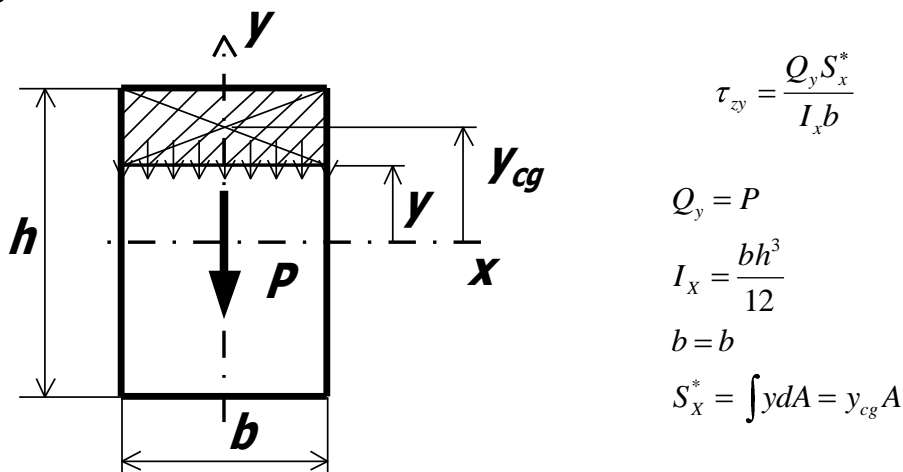
Para la fuerza cortante actuando en la dirección del eje  $y$  la fórmula quedará como se muestra

$$\tau_{zy} = \frac{Q_y S_x^*}{I_x b}$$

De similar forma se obtendría la fórmula de Shuravskii si la fuerza cortante estuviera actuando en el eje  $x$ , como se muestra a continuación:

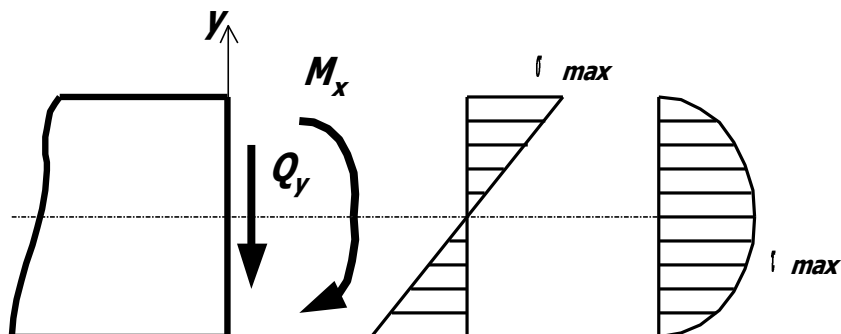
$$\tau_{zx} = \frac{Q_x S_y^*}{I_y h}$$

Esta expresión solo es exacta en secciones rectangulares o compuestas por tramos rectangulares o similares, en la figura siguiente se muestra la aplicación a una sección rectangular.



$$S_x^* = \left[ \frac{h}{2} - \frac{1}{2} \left( \frac{h}{2} - y \right) \right] b \left( \frac{h}{2} - y \right)$$

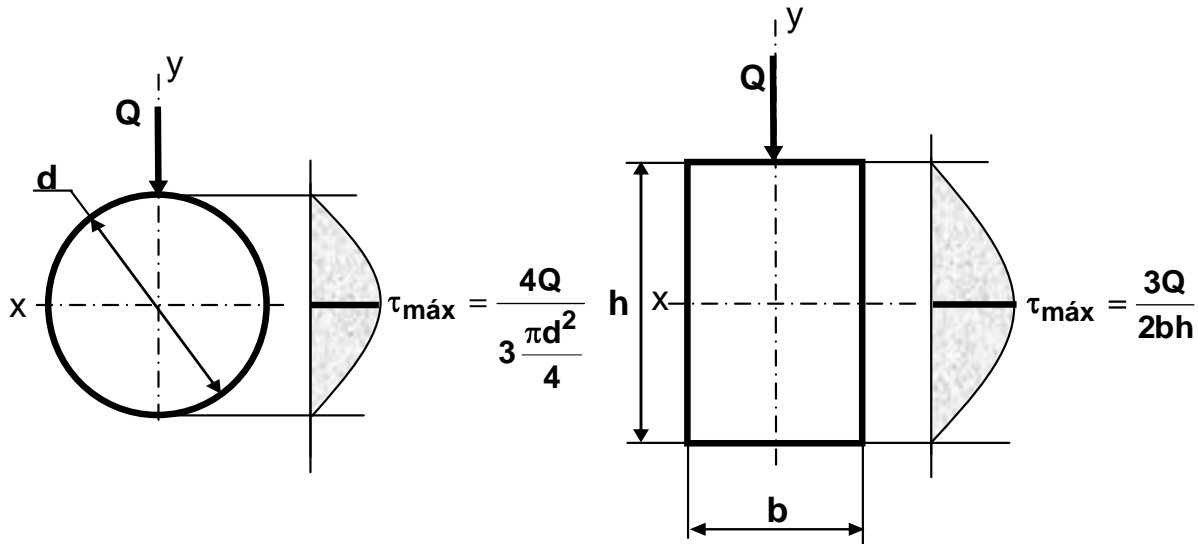
$$S_x^* = \frac{b}{2} \left( \frac{h^2}{2} - \frac{hy}{2} - y^2 \right)$$



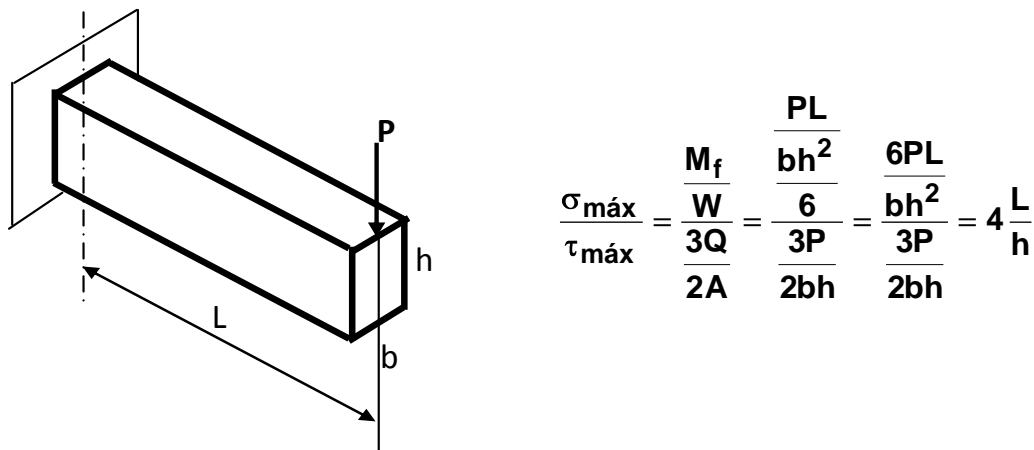
$$\sigma_{\max} = \frac{6M_x}{bh^2}$$

$$\tau_{\max} = \frac{3Q_y}{2bh}$$

Seguidamente se muestran las distribuciones de las magnitudes de los esfuerzos tangenciales debido a la fuerza cortante en la flexión transversal plana para el caso del círculo y el rectángulo, pudiendo observarse que los valores máximos se encuentran a la mitad de la altura, precisamente en el lugar donde los esfuerzos normales debido a la flexión son nulos.



Si ahora se analizan los esfuerzos máximos debido a la flexión con los esfuerzos máximos debido a la fuerza cortante para el caso de una barra de sección rectangular empotrada y sometida a una carga concentrada en el extremo libre, como se muestra a continuación en la figura.

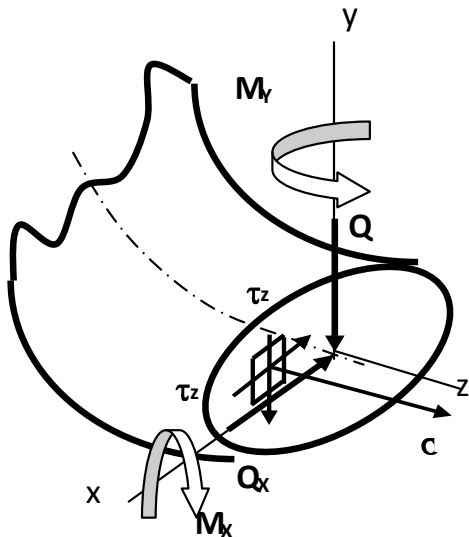


Se arriba a la conclusión de que siempre que la longitud de la barra sea cinco veces mayor que su altura se puede despreciar el efecto de la fuerza cortante en la flexión transversal plana, pues los esfuerzos normales serán al menos 20 veces mayor que los esfuerzos tangenciales y por lo tanto se puede transformar la flexión transversal plana en flexión pura plana, es decir:

**Si  $L \geq 5h \Rightarrow Q \downarrow \Rightarrow$  Flexión transversal plana  $\rightarrow$  Flexión pura plana**

## 6.11 Flexión transversal oblicua

Sabiendo determinar las tensiones en la flexión transversal plana se pueden obtener las tensiones en la flexión transversal oblicua al considerar esta última como la superposición de dos flexiones transversales planas, como se muestra en la figura.



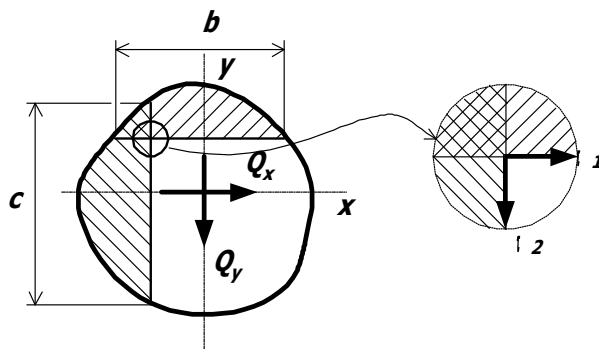
De tal forma que:

$$\sigma = \frac{M_x}{I_x} y + \frac{M_y}{I_y} x$$

$$\tau = \sqrt{\tau_{zx}^2 + \tau_{zy}^2}$$

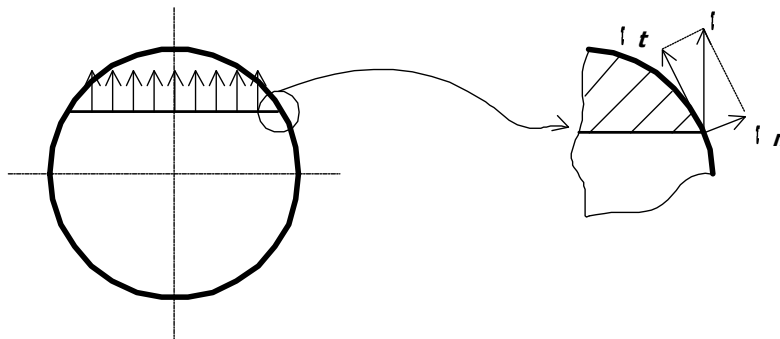
siendo:

$$\tau_{zx} = \frac{Q_x S_y^*}{I_y h} \quad \tau_{zy} = \frac{Q_y S_x^*}{I_x b}$$



$$\tau = \sqrt{\tau_1^2 + \tau_2^2}$$

Se debe destacar que esta fórmula tiene un carácter aproximado en determinados lugares de la sección transversal.



Como puede verse en la sección mostrada si existe el esfuerzo  $\tau$  entonces también debe existir  $\tau$ , según la Ley de Paridad de los esfuerzos tangenciales y esto implicaría la existencia de otro esfuerzo en la superficie de la pieza lo cual es imposible.

Sin embargo, como frecuentemente se trabajará con barras largas, donde la longitud de la barra sobrepasará en más de cinco veces la mayor dimensión transversal de la barra, entonces se podrá despreciar el efecto de las fuerzas cortantes, al transformar la flexión transversal oblicua en flexión pura oblicua, considerando solamente el efecto de los esfuerzos normales.

### Condición de resistencia

Al considerar que se está en presencia de una barra larga,  $L \geq 5h$ , poder despreciar el efecto de las fuerzas cortantes y poder transformar la flexión transversal oblicua en una flexión pura oblicua, las expresiones para establecer la condición de resistencia coincidirán con las ya conocidas de la flexión pura oblicua, es decir:

$$\begin{aligned} \sigma_{\text{máx}} = \sigma_P &= +\frac{M_x}{I_x} y_P + \frac{M_y}{I_y} x_P \leq \sigma_t \\ \sigma_{\text{máx}} = \sigma_Q &= -\frac{M_x}{I_x} y_Q - \frac{M_y}{I_y} x_Q \leq \sigma_c \end{aligned} \quad \text{para } L \geq 5h$$

donde para los puntos más peligrosos **P** y **Q** se requiere determinar la ubicación de la línea neutra como ya se explicó anteriormente.

De todo lo expresado hasta el momento se pueden arribar a las siguientes conclusiones para el caso de la flexión:

- Cuando se está en presencia de una **barra larga**  $L \geq 5h$ , se puede despreciar el efecto del cortante y transformar la flexión transversal en flexión pura.
- Si en la sección transversal de la barra se cumple que los momentos de inercia respecto a ambos ejes coinciden,  $I_x = I_y$ , se puede transformar la flexión oblicua en flexión plana.

Así si se está en presencia de una barra larga de sección circular sometida a flexión transversal oblicua, como  $L \geq 5h$ , e  $I_x = I_y$ , se puede transformar la flexión transversal oblicua en una flexión pura plana y por lo tanto la condición de resistencia adoptaría la forma:

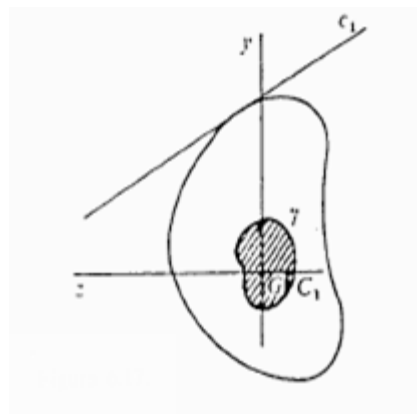
$$\sigma_{\text{máx}} = \pm \frac{M_f}{W} = \pm \frac{\sqrt{M_x^2 + M_y^2}}{W} \leq \sigma_{t,c} \quad \text{para } L \geq 5h$$

e  $I_x = I_y$

## 6.12 Centro de flexión

En el plano de la sección existe una curva cerrada  $\zeta$  que rodea al centro de gravedad, tal que considerando cualquiera de sus puntos como centro de presiones el eje neutro es tangente a la sección del prisma mecánico. Por lo dicho anteriormente, si tomamos como centro de presiones cualquier punto interior al área encerrada por la curva  $\zeta$  estará asegurado que las tensiones normales en toda la sección sean de tracción o de compresión.

A la zona delimitada por esta curva  $\zeta$  se le denomina **núcleo central de la sección**. Podemos definir, pues, que el núcleo central de la sección como el lugar geométrico de los puntos tales que tomados como centro de presiones en una tracción o compresión excéntrica, las tensiones normales en todos los puntos de la sección tienen el mismo signo.



Se define como **centro de flexión** de una sección transversal como el punto con respecto al cual el momento de las fuerzas tangenciales que se producen en dicha sección debido a las fuerzas cortantes es nulo.

Entre las muchas utilidades que tiene el conocer la ubicación del centro de flexión está la de prevenir un efecto indeseado de torsión en elementos de pared delgada sometidos a flexión.

## 6.13 Conclusiones

El estudio de la flexión transversal es de gran importancia ya que a partir de las expresiones aquí obtenidas es posible tomar en cuenta el efecto de los esfuerzos tangenciales producidos por la fuerza cortante, partiendo de la condición de no cumplimiento de la hipótesis de las secciones planas. La expresión empleada, ecuación de Shuravski presenta algunas limitaciones que deben ser de conocimiento para poder aplicarla de forma adecuada.

Como otro aspecto de interés se debe considerar que para el cálculo clásico de tensiones en vigas, en las cuales la longitud es apreciable, es posible despreciar el efecto de los esfuerzos tangenciales producidos por las fuerzas cortantes si se comparan con los



esfuerzos normales producidos por los momentos flectores. También es de importancia tener en cuenta el efecto de los esfuerzos tangenciales en el caso de vigas armadas, que aunque es un tema no considerado en este curso de Resistencia de Materiales, no deja de ser de interés en casos más específicos de análisis.

Finalmente se debe conocer el concepto de centro de flexión y su utilidad en los análisis de perfiles delgados que aparecen con bastante frecuencia en las soluciones prácticas de elementos estructurales.

#### PREGUNTAS TEORICAS TEMA VI. RESISTENCIA DE MATERIALES I

1. Plantee la ecuación de Shuravski para la determinación de esfuerzos tangenciales en flexión transversal. Identifique cada término.
2. Represente la distribución de tensiones tangenciales en el caso de flexión transversal. Identifique los puntos más peligrosos.
3. ¿Cómo se obtiene el esfuerzo tangencial resultante en el caso de flexión transversal oblicua? Plantee una expresión de cálculo e identifique cada término.
4. Explique bajo qué condiciones y cuáles serían las causas que permitirían desprestigiar el efecto del esfuerzo tangencial en comparación con el esfuerzo normal en el caso de flexión transversal en vigas.
5. ¿Qué se entiende por centro de flexión? Explique cuál sería su utilidad en algún caso práctico.