

RESISTENCIA DE MATERIALES I

Conferencia 12

Tema VII-Flexión

- 6.14** Introducción
- 6.15** Ecuación diferencial de la elástica de la viga
- 6.16** Método de los parámetros de origen
- 6.17** Conclusiones.

Objetivos:

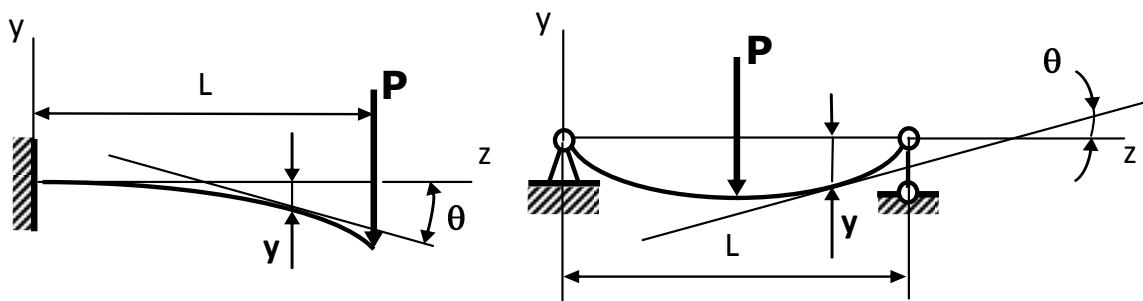
- Aplicar la condición de resistencia y rigidez en vigas sometidas a flexión plana y oblicua.

6.14 Introducción

La ecuación diferencial de la elástica de la viga: es la ecuación diferencial, a partir de la cual se obtiene la configuración que adopta la viga una vez deformada. Como procedimiento matemático permitirá, una vez conocida la ecuación diferencial y su solución en forma de ecuación algebraica, determinar para cualquier valor de longitud de la viga estudiada el valor de desplazamiento lineal o angular correspondiente, estos valores serán usados en los análisis de rigidez a la flexión.

Antes de conocer los detalles de la EDEV es necesario describir los parámetros que serán evaluados y los que interviene en este análisis

En la flexión surgen dos tipos de desplazamientos, el lineal, y , y el angular, θ , como se muestran en la figura.



De hecho en la flexión existe una relación entre los desplazamientos lineales y angulares, como se observa en la figura y se plantea a continuación, generalizándolo tanto para el plano mostrado yz como para el plano xz:

$$\theta_{yz} \approx \tan \theta_{yz} = \frac{dy}{dz}$$

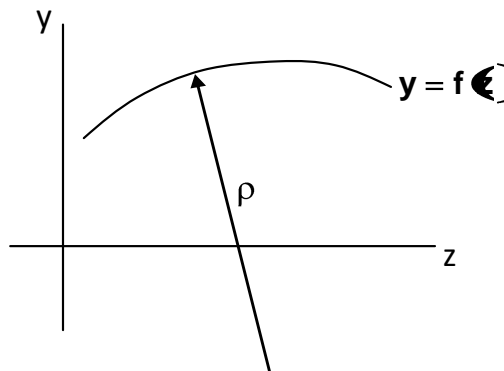
$$\theta_{xz} \approx \tan \theta_{xz} = \frac{dx}{dz}$$

6.15 Ecuación diferencial de la elástica de la viga

En el estudio de la flexión pura plana se obtuvo una expresión que permitía obtener el radio de curvatura de la barra en función del momento flector y de la rigidez a la flexión, EI_x y que se muestra a continuación, a manera de recordatorio:

$$\frac{1}{\rho} = \frac{M_x}{EI_x}$$

Por otro lado se sabe de la Geometría Analítica que la curvatura de un punto en una curva se obtiene a partir de la expresión:



$$\frac{1}{\rho} = \frac{\frac{d^2y}{dz^2}}{\left[1 + \left(\frac{dy}{dz}\right)^2\right]^{\frac{3}{2}}}$$

Si se tiene en cuenta en esta última expresión que se está dentro del período elástico y por tanto los desplazamientos serán muy pequeños, la derivada $\frac{dy}{dz}$ será muy pequeña y al cuadrado se hace aún más pequeña, por lo que comparada con la unidad se puede despreciar y por tanto la expresión quedará en la forma:

$$\frac{1}{\rho} = \frac{d^2y}{dz^2}$$

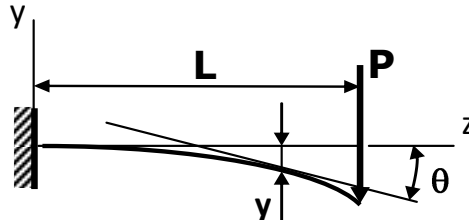
Y finalmente igualando las expresiones:

$$\boxed{\frac{d^2y}{dz^2} = \frac{M_x}{EI_x}}$$

Expresión que se conoce con el nombre de **ecuación diferencial de la elástica de la viga**, que permitirá en su primera integración obtener los desplazamientos angulares y en su segunda integración los desplazamientos lineales, como se verá en el ejemplo que se muestra seguidamente.

Ejemplo.

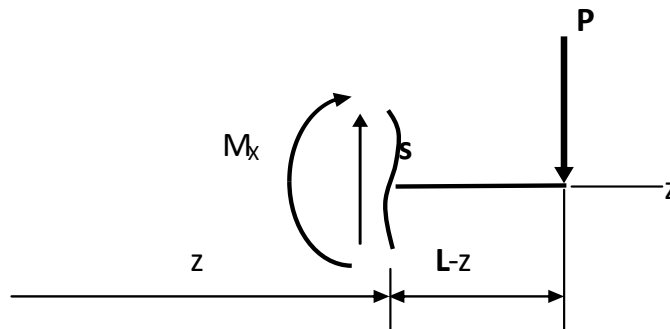
Para la barra en voladizo mostrada en la figura obtenga la ecuación de los desplazamientos angulares y lineales, se conocen la carga aplicada **P**, la longitud **L** y la rigidez a la flexión **EI_x**.



Partiendo de la ecuación diferencial de la elástica de la viga:

$$\frac{d^2 y}{dz^2} = \frac{M_x}{EI_x}$$

se observa que para su solución se requiere obtener la expresión del momento flector en función de la coordenada *z* para poder efectuar la integración, para lo cual se necesita determinar la magnitud del momento flector para una sección cualquiera de la barra, como se muestra a continuación:



$$\Sigma M_s = 0$$

$$M_x + P(-z) = 0$$

por lo tanto:

$$M_x = P(-L)$$

Seguidamente se efectuarán las correspondientes integraciones para obtener el desplazamiento angular, θ , y el desplazamiento lineal, *y*.

De la ecuación diferencial de la elástica (EDEV) se tendrá:

$$\frac{d}{dz} \left(\frac{dy}{dz} \right) = \frac{M_x}{EI_x} = \frac{P(L-z)}{EI_x}$$

Integrando:

$$\theta = \frac{dy}{dz} = \frac{P}{EI_x} \int (L-z) dz + C_1$$

se obtiene

$$\theta = \frac{P}{EI_x} \left(\frac{z^2}{2} - Lz \right) + C_1$$

y evaluando las condiciones de contorno:

$$\text{Para } z = 0 \rightarrow \theta = 0 \Rightarrow C_1 = 0$$

de donde:

$$\theta = -\frac{P}{EI_x} \left(Lz - \frac{z^2}{2} \right)$$

cuya deformación angular será máxima para $z = L$, adoptando la magnitud:

$$\theta_{\text{máx}} = -\frac{PL^2}{2EI_x}$$

el signo negativo indica que la pendiente que es aproximadamente igual al ángulo es negativa y por tanto la mencionada pendiente se extiende entre el 2do y 4to cuadrante. Integrando la expresión del desplazamiento angular en función de z se obtendrán los desplazamientos lineales como se muestra a continuación:

$$\theta = \frac{d\psi}{dz} = -\frac{P}{EI_x} \left(Lz - \frac{z^2}{2} \right)$$

de donde:

$$y = -\frac{P}{EI_x} \int \left(Lz - \frac{z^2}{2} \right) dz + C_2$$

y por tanto:

$$y = -\frac{P}{EI_x} \left(L \frac{z^2}{2} - \frac{z^3}{6} \right)$$

o sea:

$$y = -\frac{P}{2EI_x} \left(Lz^2 - \frac{z^3}{3} \right)$$

cuyo desplazamiento lineal para $z = L$ tomará su valor máximo, el que será:

$$y_{\text{máx}} = -\frac{PL^3}{3EI_x}$$

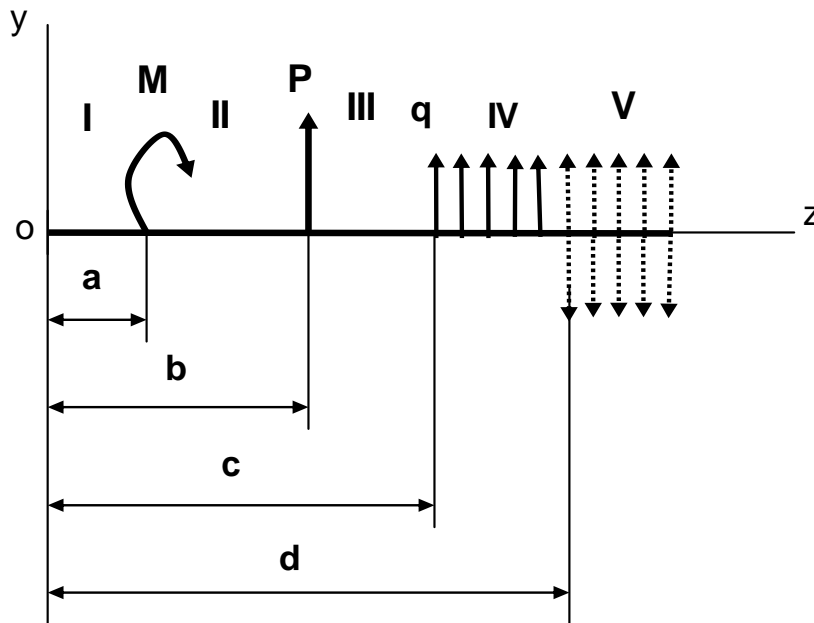
el signo negativo indica que el desplazamiento lineal máximo se produce en el sentido contrario al eje y .

Como se puede observar, el inconveniente que presenta el método de la ecuación diferencial de la elástica de la viga (**EDEV**) es el tratamiento matemático que requiere. El método de la ecuación general de la elástica de la viga (**EGEV**), que se verá en el próximo epígrafe posibilita la obtención de la elástica de la viga sin el engorro matemático que conlleva el método de la ecuación diferencial.

6.16 Método de los parámetros de origen

Seguidamente se muestran como se obtienen las expresiones que, basadas en la ecuación general de la elástica de la viga (**EGEV**), permiten obtener los desplazamientos angulares y lineales de una viga sometida a flexión.

Para explicar la aplicación de estas expresiones se hará uso de la figura que se muestra a continuación.



El sistema antes mostrado tiene que satisfacer las condiciones de equilibrio en cada tramo, cumpliéndose:

$$I-) \quad M_x = 0$$

$$II-) \quad M_x = M$$

$$III-) \quad M_x = M + P(z - b)$$

$$IV-) \quad M_x = M + P(z - b) + q \frac{(z - c)^2}{2}$$

$$V-) \quad M_x = M + P(z - b) + q \frac{(z - c)^2}{2} - q \frac{(z - d)^2}{2}$$

Si se integran estas expresiones sin abrir los paréntesis para mantener la forma de la expresión y se escogen las constantes de manera que al pasar de un tramo a otro la magnitud y' no sufra discontinuidad, se llega a las siguientes expresiones

$$EI_x \theta = EI_x \theta_0 + M(z - a) + P \frac{(z - b)^3}{6} + q \frac{(z - c)^3}{6}$$

$$EI_x y = EI_x y_0 + EI_x \theta_0 z + M \frac{(z - a)^2}{2} + P \frac{(z - b)^3}{6} + q \frac{(z - c)^4}{24}$$

Son realizadas varias consideraciones iniciales que deben cumplirse para la EGEV

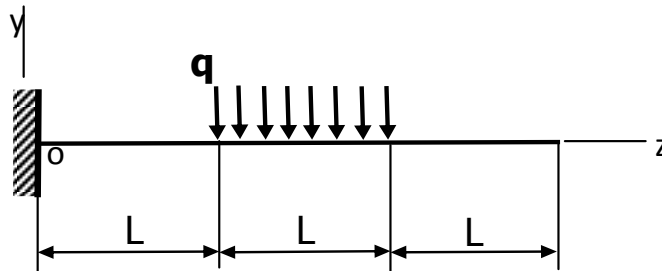
- Lo primero a señalar es que las mencionadas expresiones solo son aplicables para vigas sometidas a fuerzas concentradas, **P**, momentos concentrados, **M**, cargas uniformemente distribuidas, **q**, y siempre que la rigidez a la flexión, **EI_x**, a lo largo de la viga se mantenga constante.
- Se requiere que el origen del sistema de referencia se encuentre en el extremo izquierdo de la viga.
- Hay que ser consecuente con la siguiente convención de signos: la fuerzas concentradas y las cargas distribuidas son positivas cuando están dirigidas en el mismo sentido del eje al cual son paralelas y el momento es positivo cuando gira a favor de las manecillas del reloj, si ocurre lo contrario serán negativos.
- Los lugares de aplicación de las fuerzas, cargas distribuidas y momentos definen los tramos a analizar en la viga, así para la viga mostrada quedan definidos 5 tramos, ya que al aplicar las expresiones se ubica el término que contiene la carga distribuida, automáticamente se genera carga distribuida hasta el final de la viga, como se muestra en la figura con línea discontinua y para lograr que el sistema mantenga su configuración original es necesario aplicar carga distribuida en sentido contrario, tal y como se muestra en la figura con la carga en línea continua y contraria al eje positivo y.
- Los términos **θ₀** y **y₀** se corresponden respectivamente con el desplazamiento angular y el lineal en el origen del sistema de referencia.

- Las distancias **a**, **b**, **c**, **d** son medidas desde el origen del sistema de referencia hasta la sección donde se inicia la aplicación del momento concentrado **M**, la fuerza concentrada **P** y las cargas uniformemente distribuidas **q**.
- A partir de la definición de los tramos, en cada tramo se analizan las expresiones considerando solamente las acciones que actúan al inicio de cada tramo.

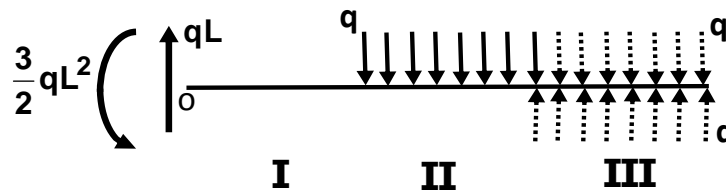
Para facilitar la comprensión en la aplicación de la ecuación general de la elástica de la viga se mostrará un ejemplo para la obtención de los desplazamientos angulares y lineales.

Ejemplo

Para la viga, de longitud **3L**, empotrada en el extremo izquierdo, sometida a la carga uniformemente distribuida **q** y con rigidez a la flexión, **EI_x**, constante, determine las expresiones para la obtención de los desplazamientos angulares, θ , y los desplazamientos lineales, y .



El primer paso que se debe dar es determinar las reacciones en el empotramiento a partir de las condiciones de equilibrio, como se muestra a continuación, además como hay carga uniformemente distribuida en el tramo intermedio una vez que se aplique la expresión de la ecuación general de la elástica de la viga, la carga distribuida se extenderá hasta el final de la viga, por lo que será necesario aplicar una carga uniformemente distribuida en sentido contrario, quedando definidos tres tramos para estudiar la viga.



Aplicando la ecuación general de la elástica de la viga, se tendrá:

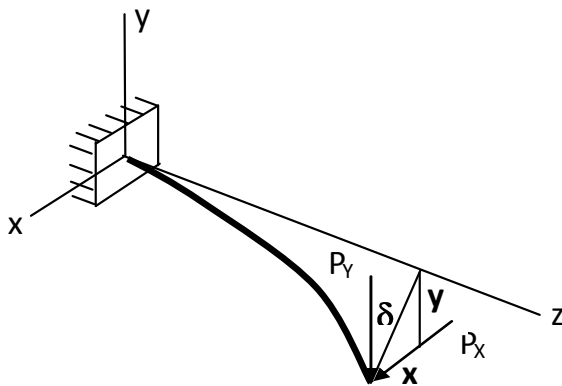
$$EI_x \theta = EI_x \theta_0 - \frac{3}{2} qL^2 \langle -0 \rangle + qL \frac{\langle -0 \rangle^3}{2} \Big|_I - q \frac{\langle -L \rangle^3}{6} \Big|_{II} + q \frac{\langle -2L \rangle^3}{6} \Big|_{III}$$

$$EI_x y = EI_x y_0 + EI_x \theta_0 z - \frac{3}{2} qL^2 \frac{\langle -0 \rangle^3}{2} + qL \frac{\langle -0 \rangle^3}{6} \Big|_I - q \frac{\langle -L \rangle^4}{24} \Big|_{II} + q \frac{\langle -2L \rangle^4}{24} \Big|_{III}$$

De cuyas expresiones, en el caso de la primera, se pueden obtener los desplazamientos angulares, θ , y en el caso de la segunda, los desplazamientos lineales, y

Condición de rigidez

Anteriormente se dio a conocer como, a través de la ecuación diferencial de la elástica de la viga (**EDEV**) o de la ecuación general de la elástica de la viga (**EGEV**), es posible determinar los desplazamientos angulares y lineales de una barra sometida a flexión y aún cuando se mostraron su aplicación en el plano yz es posible su aplicación, con las correspondientes adaptaciones, para el plano xz, de tal forma, que las mencionadas ecuaciones permiten obtener los desplazamientos angulares y lineales para el caso general de la flexión transversal oblicua y poder establecer en tal caso la condición de rigidez como se muestra a continuación:



$$\delta_{\text{máx}} = \sqrt{x^2 + y^2} \leq \delta_{\text{adm}}$$

$$\theta_{\text{máx}} = \sqrt{\theta_{xz}^2 + \theta_{yz}^2} \leq \theta_{\text{adm}}$$

De estar en presencia de una flexión transversal plana las expresiones de la condición a rigidez adoptarían la forma:

$$\begin{aligned} x_{\text{máx}} &\leq \delta_{\text{adm}} \\ y_{\text{máx}} &\leq \delta_{\text{adm}} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \theta_{xz\text{máx}} &\leq \theta_{\text{adm}} \\ \theta_{yz\text{máx}} &\leq \theta_{\text{adm}} \end{aligned}$$

6.17 Conclusiones

Han sido dados dos formas para determinar desplazamientos lineales y angulares en vigas sometidas a flexión, el primero, la EDEV presenta algunas limitaciones con la elaboración matemática cuando son elementos de varios tramos y también se parte de la condición de que la relación EI se mantiene constante en el tramo que se analiza. El segundo método está basado en una generalización del primero para una serie de condiciones iniciales que

han sido presentadas durante el desarrollo de la actividad y que deben cumplirse en todos los casos.

Todo este análisis está dirigido a la comprobación de la rigidez de estos elementos.

PREGUNTAS TEORICAS TEMA VI. RESISTENCIA DE MATERIALES I

1. Represente en un esquema de una viga cualquiera los desplazamientos lineales y angulares de una sección de esta.
2. Plantee la EDEV, identifique cada termino.
3. ¿Qué limitaciones presenta en su aplicación la EDEV?
4. Plantee la EGEV. Identifique cada termino.
5. ¿Qué condiciones deben cumplirse para poder aplicar esta ultima ecuación.
6. Plantee la condición de rigidez para desplazamientos lineales y angulares en ambos planos.