

RESISTENCIA DE MATERIALES I

Conferencia 13

Tema VII-Caso general de tensiones

- 7.1** Introducción
- 7.2** Caso general de tensiones
- 7.3** Conclusiones

Objetivos:

- Aplicar la condición de resistencia en el caso general de tracción, flexión y torsión en ejes de transmisión.

7.1 Introducción

Hasta el momento el estudiante ha abordado el estudio de casos de tensiones normales y/o tangenciales como elementos independientes, no obstante aparecen caso en los cuales se combinan efectos de cargas que finalmente producen lo que se denomina caso general de tensiones y se hace necesario el dominio de los métodos de cálculo más generales que permitan enfrentar esta situación que comúnmente aparece en la vida práctica.

La solución de este tipo de problema trae como consecuencia la necesidad de un análisis físico detallado, en busca de todas los tipos de cargas actuantes y sus particularidades, la solución de las acciones interiores así como la determinación de los puntos más peligrosos en el caso de que estas acciones se combinen, todo lo cual conduce a la determinación del estado tensional del punto más peligroso, que en ocasiones pudiera ser mas de un punto, con el objetivo final de aplicar la condición de resistencia.

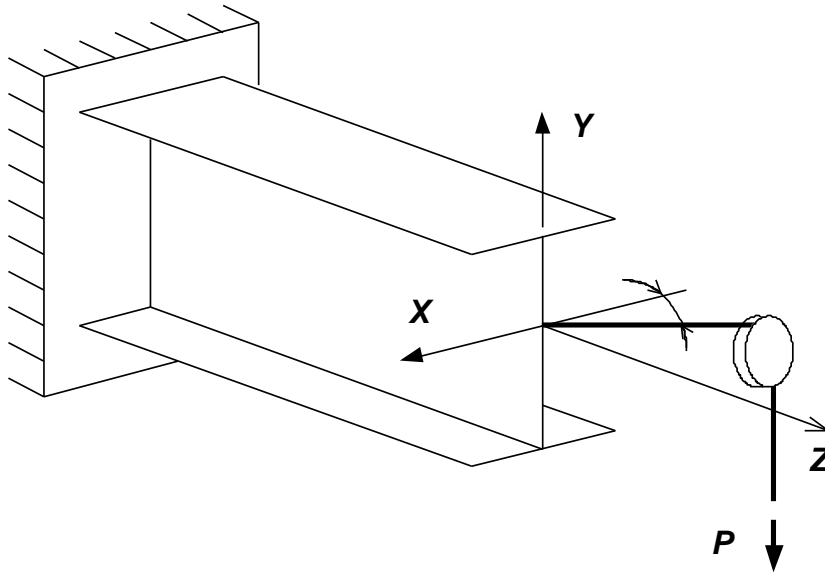
Se trata entonces de establecer una metodología de trabajo para el caso general de aparición de tensiones normales y tangenciales, con la aplicación de la condición de resistencia a partir de los criterios ya estudiados.

7.2 Caso general de tensiones

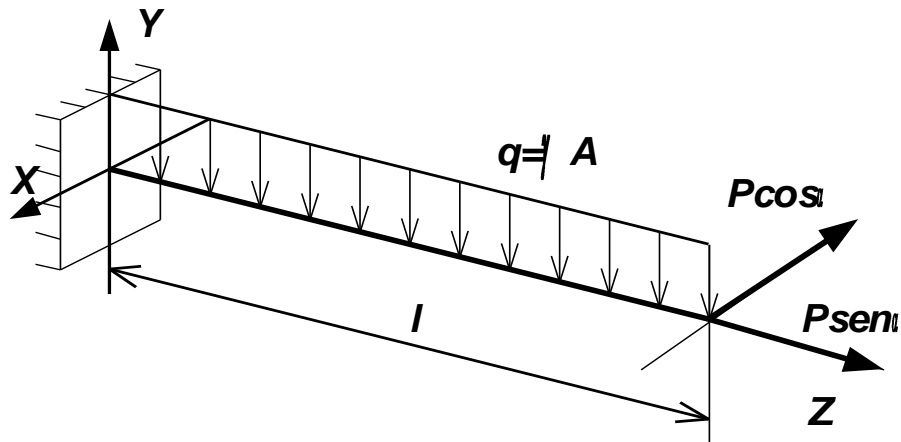
Tracción con flexión. Tensiones y condición de resistencia

Se hace un análisis del caso en que aparecen momentos flectores y fuerzas normales, estudiando la ecuación de la línea neutra y sus variaciones así como los puntos de mayor peligrosidad

En el análisis de un caso como el mostrado en la figura, se puede establecer, considerando el peso propio de la viga I, el siguiente modelo para estudio.



Existencia de flexión oblicua y tracción



si fuera posible modificar el ángulo α quedaría entonces la siguiente situación:

- Si $\alpha = 0^\circ \Rightarrow$ flexión oblicua (se considera el peso de la viga)
- Si $\alpha = 90^\circ \Rightarrow$ flexión plana + tracción
- Si $0^\circ \leq \alpha \leq 90^\circ \Rightarrow$ flexión oblicua + tracción.

Para el caso estudiado y de acuerdo a las cargas existentes quedará:

$$\sigma = \frac{N}{A} + \frac{M_x}{I_x} y + \frac{M_y}{I_y} x$$

si se desea obtener la ecuación de la **línea neutra** entonces la condición sería la siguiente:

$$\sigma = 0$$

$$\frac{N}{A} + \frac{M_x}{I_x} y + \frac{M_y}{I_y} x = 0$$

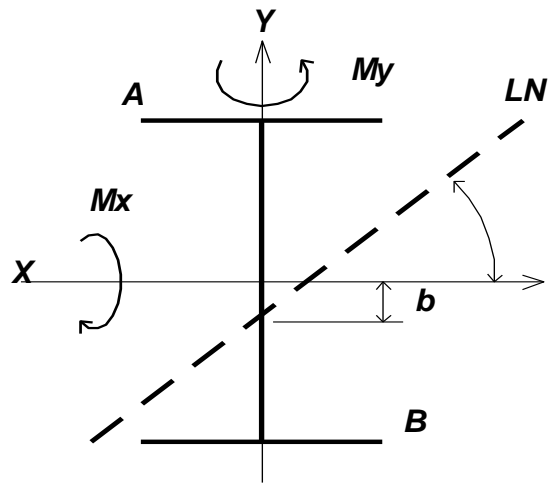
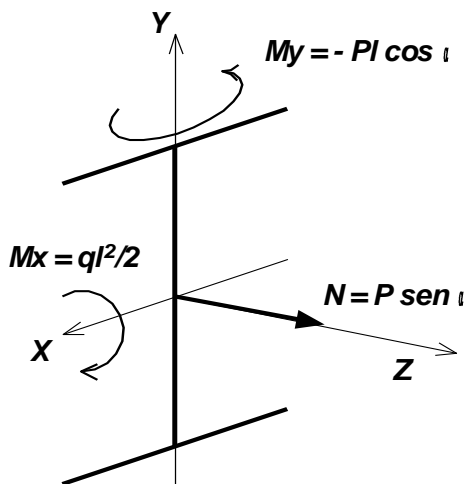
$$y = -\frac{N}{M_x} \cdot \frac{I_x}{A} - \frac{M_y}{M_x} \cdot \frac{I_x}{I_y} x$$

si esta última expresión se compara con la ecuación de la recta $y=mx+b$, quedará entonces:

$$m = -\frac{M_y}{M_x} \cdot \frac{I_x}{I_y}$$

$$b = -\frac{N}{M_x} \cdot \frac{I_x}{A}$$

En el empotramiento de la viga analizada quedará el sistema de cargas siguiente



Para el uso de esta ecuación se debe tomar en cuenta el siguiente convenio de signos que establece que los momentos flectores se considerarán positivos si traccionan el primer cuadrante

$$\sigma_A = \frac{N}{A} + \frac{M_x}{I_x} y + \frac{M_y}{I_y} x$$

$$\sigma_A = \frac{P \cdot \text{sen} \alpha}{A} + \frac{\frac{ql^2}{2}}{I_x} \cdot \frac{h}{2} + \frac{-Pl \cos \alpha}{I_y} \left(-\frac{b}{2}\right)$$

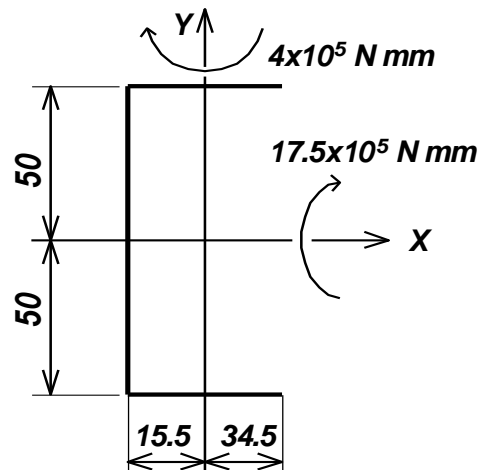
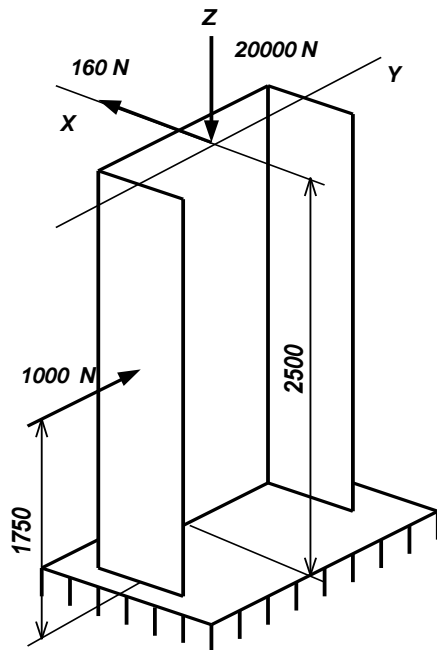
$$\sigma_B = \frac{N}{A} + \frac{M_x}{I_x} y + \frac{M_y}{I_y} x$$

$$\sigma_B = \frac{P \cdot \sin \alpha}{A} + \frac{ql^2}{I_x} \cdot \left(-\frac{h}{2}\right) + \frac{-Pl \cos \alpha}{I_y} \left(\frac{b}{2}\right)$$

Como se nota la LN se desplaza del centroide de la sección debido a la acción de la fuerza normal siendo los puntos más peligrosos los más alejados de la LN, los, puntos A (tracción) y B (compresión)

Ejemplo No.1.

Hallar el coeficiente de seguridad en la sección más peligrosa del perfil mostrado (I No. 10 GOST 8240-72)



Datos:

$$W_x = 37300 \text{ mm}^3$$

$$I_x = 187 \times 10^4$$

$$\sigma_{ft} = 250 \text{ MPa}$$

$$W_y = 7420 \text{ mm}^3$$

$$I_y = 25.6 \times 10^4$$

$$\sigma_{fc} = 250 \text{ MPa}$$

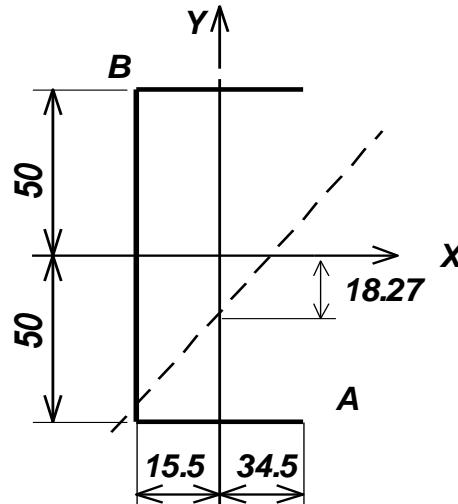
$$A = 1170 \text{ mm}^2$$

$$\sigma = -\frac{20000}{1170} + \frac{-17.5 \times 10^5}{187 \times 10^4} y + \frac{4 \times 10^5}{25.6 \times 10^4} x$$

$$\sigma = -17.1 - 0.9358y + 1.56x$$

Para determinar la ecuación de la Línea Neutra (LN) se impone la condición de $\sigma = 0$, quedando:

$$y = -18.27 + 1.67x$$



En la sección transversal se indican los puntos A y B como los más peligrosos por estar más alejados de la Línea Neutra, quedando:

$$A = (3.45; -5)$$

$$B = (-1.55; 5)$$

$$\sigma_A = 83.6 \text{ MPa}$$

$$\sigma_B = -88.1 \text{ MPa}$$

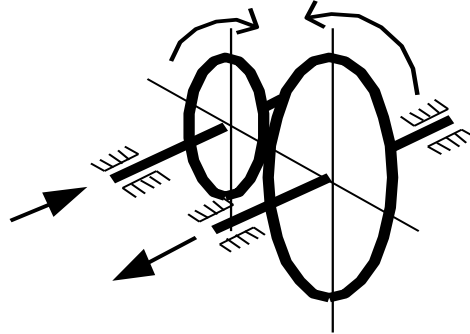
Debido a que $\sigma_{ft} = \sigma_{fc} = 250 \text{ MPa}$, el coeficiente de seguridad será

$$n = \frac{\sigma_{fc}}{\sigma_B} = \frac{250 \text{ MPa}}{88.1 \text{ MPa}} \approx 2.84$$

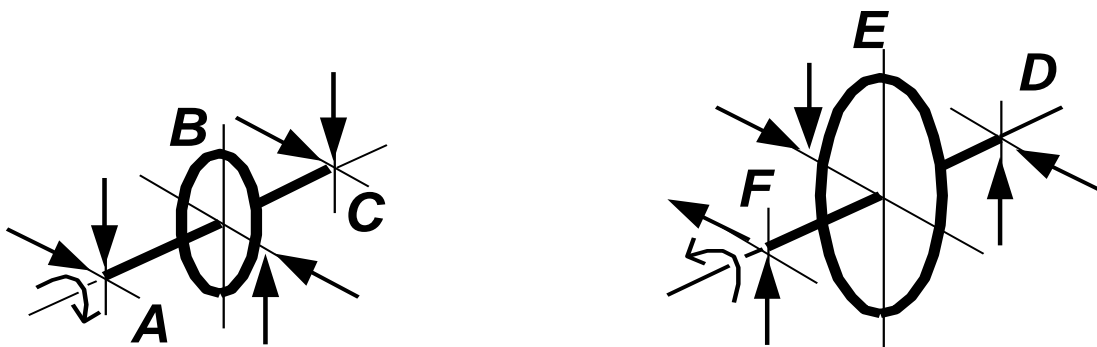
Un aspecto de interés que aparece en este caso es la posibilidad de la compresión o tracción excéntrica a partir de lo cual se define el núcleo de la sección transversal como el lugar geométrico de los puntos de aplicación de la carga de tracción o compresión que determinan esfuerzos de un solo signo en la sección transversal. Este conocimiento puede resultar de mucha importancia en el caso de materiales frágiles sometidos a este tipo de sollicitación en que se desee evitar esfuerzos de tracción.

Tracción con flexión y torsión. Condición de resistencia

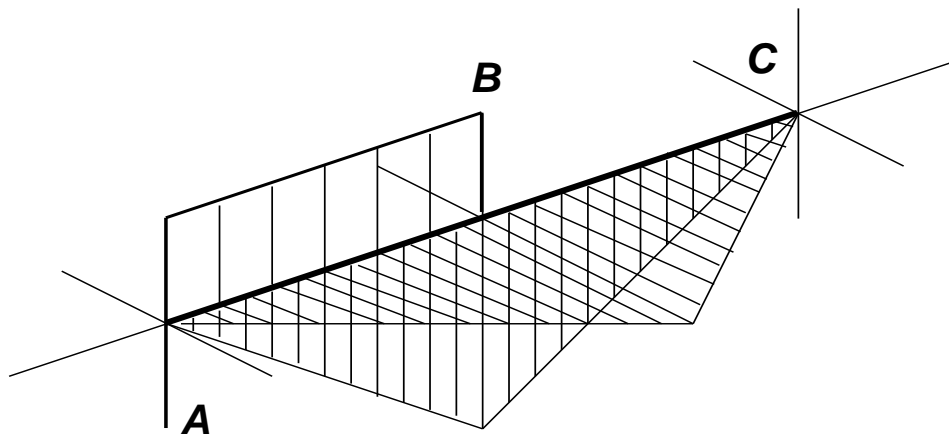
Se analizará ahora el caso que en general presenta mayor complejidad

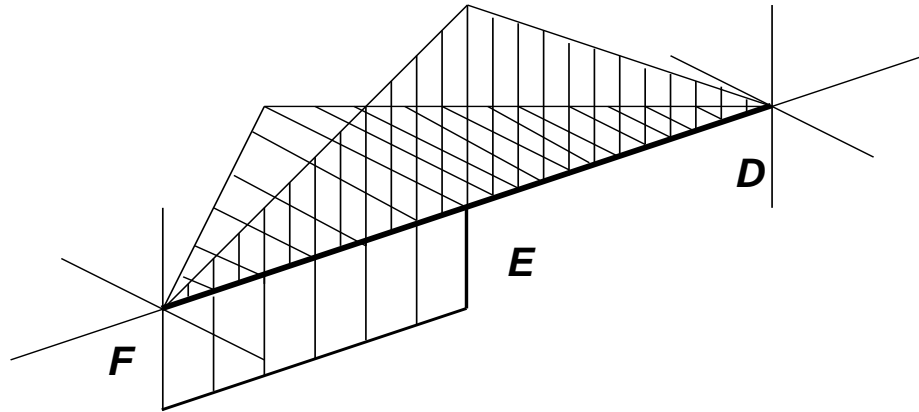


El caso ilustrado corresponde a un esquema de una transmisión por engranajes y en la misma aparece de forma simultánea flexión y torsión como se muestra a continuación.

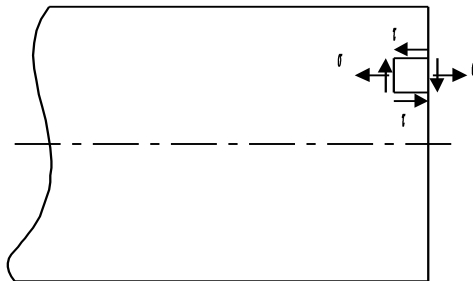


Los gráficos de momentos son mostrados a continuación



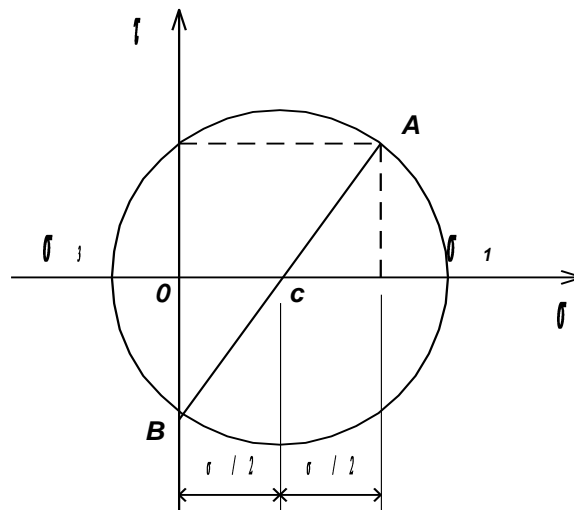


En el análisis del estado tensional de la sección más peligrosa para alguno de los esquemas antes mostrados se obtiene.



$$A \equiv (\sigma, \tau)$$

$$B \equiv (0, -\tau)$$



$$\sigma_{1,3} = \frac{\sigma}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\sigma}{2}\right)^2 + \tau^2}$$

$$\sigma_2 = 0$$

Para un caso como el mostrado si fuera usado como criterio de resistencia el de Huber & Mises, quedaría:

$$\sigma_{equi} = \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \sqrt{(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_1 - \sigma_3)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2}$$

$$\sigma_{equi} = \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_1^2 - \sigma_3^2 + \sigma_2^2}$$

quedando una vez sustituidos los valores correspondientes

$$\sigma_{equi} = \sqrt{\sigma^2 + 3\tau^2}$$

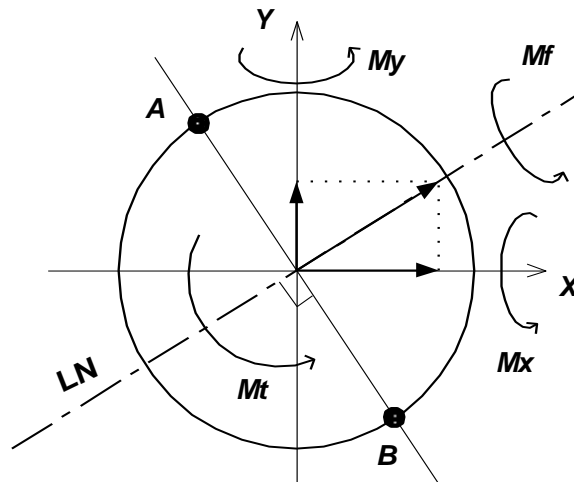
si fuera usado como criterio de resistencia el de Mohr, quedaría

$$\sigma_{equi} = \frac{1-k}{2} \cdot \sigma + \frac{1+k}{2} \sqrt{\sigma^2 + 4\tau^2}$$

se debe recordar que

$$k = \frac{\sigma_{ft}}{\sigma_{fc}} \quad \text{ó} \quad k = \frac{\sigma_{rt}}{\sigma_{rc}}$$

En el caso particular de barras de sección circular:



El plano de flexión contiene a los puntos A y B que a su vez son los más peligrosos de la sección transversal por encontrarse en la periferia (mayor peligrosidad en torsión) y por ser los más alejados de la Línea Neutra (mayor peligrosidad en flexión)

$$\sigma_{A,B} = \pm \frac{M_f}{W_f} \quad \tau_{A,B} = \frac{M_T}{W_P}$$

donde:

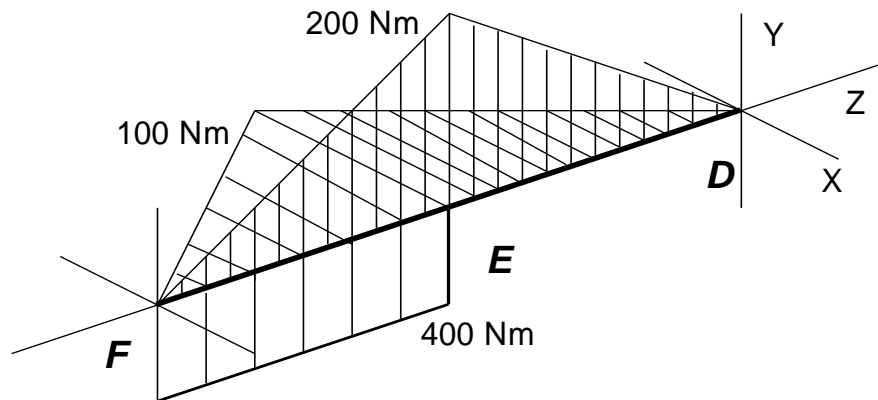
$$M_f = \sqrt{M_x^2 + M_y^2}$$

$$W_f = 0.1 \cdot d^3$$

$$W_p = 0.2 \cdot d^3$$

Ejemplo No.2

Hallar el coeficiente de seguridad en la sección más peligrosa de un eje de 0.04 m de diámetro de acero, cuyos gráficos de momentos se muestran.



Datos: $\sigma_{ft} = 400 \text{ MPa}$ $\sigma_{fc} = 600 \text{ MPa}$ $d = 0.04 \text{ m}$

Solución:

$$W_f = 0.1 \cdot d^3 = 0.1(0.04)^3 = 64 \times 10^{-6} \text{ m}^3$$

$$W_p = 0.2 \cdot d^3 = 0.2(0.04)^3 = 12.8 \times 10^{-6} \text{ m}^3$$

$$M_f = \sqrt{(200)^2 + (100)^2} = 223.6 \text{ Nm}$$

$$M_T = 400 \text{ Nm}$$

entonces:

$$\sigma = \pm \frac{223.6 \text{ Nm}}{6.4 \times 10^{-6} \text{ m}^3} = 34.9 \text{ MPa}$$

$$\tau = \frac{400 \text{ Nm}}{12.8 \times 10^{-6} \text{ m}^3} = 31.25 \text{ MPa}$$

Se aplicará e; criterio de Mohr debido a que $k \neq 1$

$$k = \frac{400}{600} = 0.67$$

Como el estado tensional se corresponde al visto anteriormente, es decir un solo esfuerzo normal, un solo esfuerzo tangencial y ambos en el mismo plano se aplicará la expresión ya mostrada

$$\sigma_{equi} = \frac{1-k}{2} \cdot \sigma + \frac{1+k}{2} \sqrt{\sigma^2 + 4\tau^2}$$

sustituyendo valores se obtiene:

$$\sigma_{equi} = 65.5 MPa$$

finalmente se determina el valor del coeficiente de seguridad

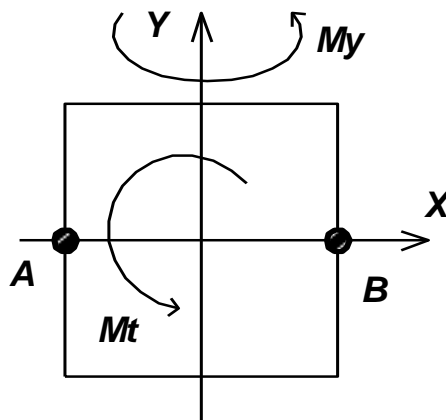
$$n = \frac{\sigma_{ft}}{\sigma_{equi}} = \frac{400}{65.5} = 6.11$$

El cálculo fue realizado en el punto traccionado debido a que su valor límite es menor, es decir menos resistente, siendo más peligroso para el mismo sistema de cargas si se compara con el punto comprimido.

Otras secciones transversales:

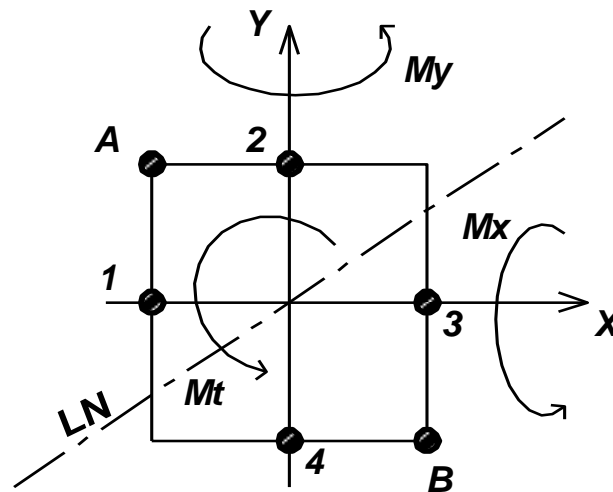
- **Sección cuadrada:**

Si $M_x = 0$, la LN coincidirá con el eje Y, entonces se pueden ubicar los puntos más peligrosos como A y B según se muestra en la figura.



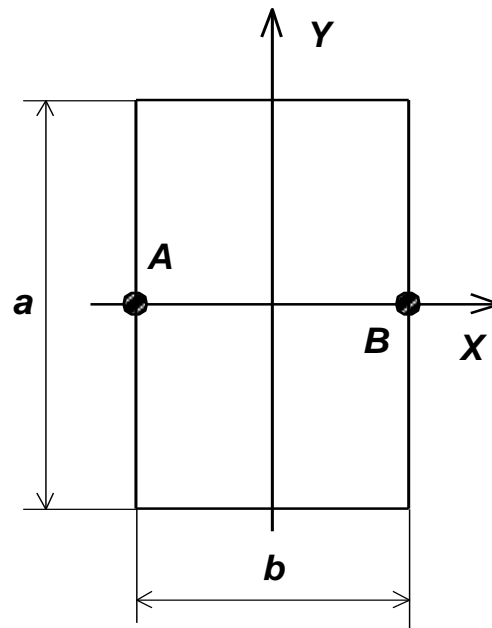
Quedando pendiente el análisis de los límites del material.

En este segundo caso, a continuación mostrado, A y B serían los puntos más peligrosos debido a la flexión y los puntos 1, 2, 3 y 4 los más peligrosos debido a la torsión.



En este caso sería necesario un análisis más detallado de la peligrosidad de los puntos a través de la determinación numérica del valor del esfuerzo equivalente.

También sería fácil entender que en caso de existir fuerzas axiales y torsión los puntos más peligrosos serían los mismos que si solo existiera torsión. Se presenta una sección rectangular en la cual los puntos A y B son los más peligrosos.



$$\sigma = \frac{N}{a \cdot b}$$

$$\tau = \frac{M_T}{\alpha \cdot (a \cdot b)}$$

Como se recordará α depende de la relación entre **a** y **b**

• Sección circular:

Las secciones de este tipo sometidas a tracción compresión y torsión tienen como puntos más peligrosos los de la periferia de la pieza de la pieza. Siendo los valores de esfuerzos los siguientes:

$$\sigma = \frac{N}{A} = \frac{4N}{\pi d^2} \qquad \tau = \frac{M_T}{W_P}$$

Flexión con torsión y tracción - compresión:

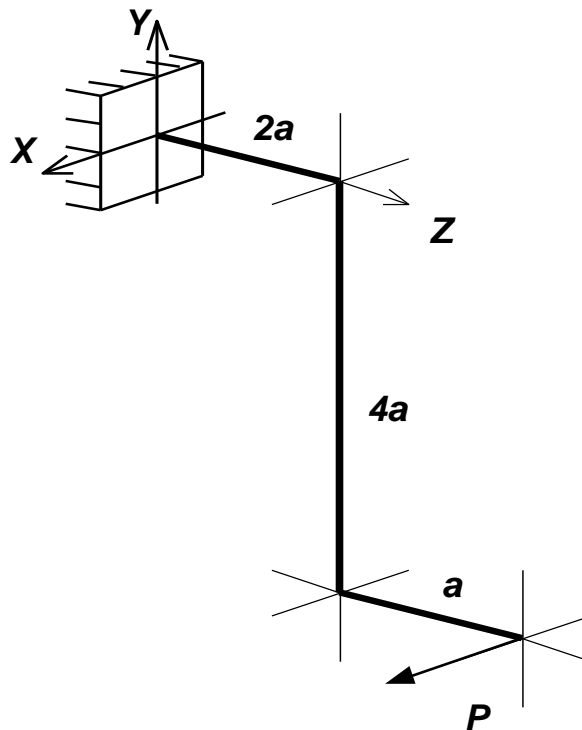
En el caso de las secciones circulares, aunque la Línea Neutra se desplace esta sigue siendo paralela al momento flector resultante.

$$\sigma = \frac{N}{A} \pm \frac{M_f}{W_f} \qquad \tau = \frac{M_T}{W_P}$$

Otros casos deben ser analizados en su individualidad.

Ejemplo No.3

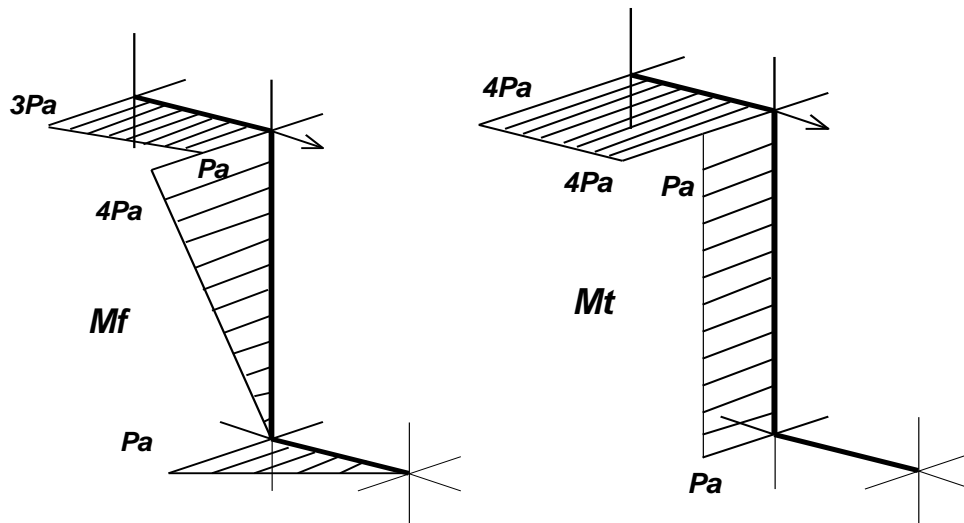
Determine el esfuerzo equivalente para el pórtico de la figura compuesto por barras de sección circular maciza.



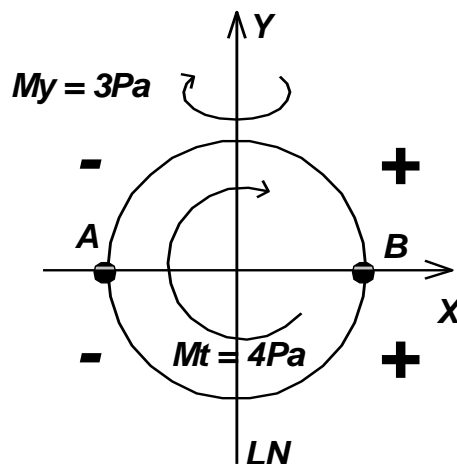
Datos: P, a, d, $[\sigma]$, k=1 (dúctil)

Solución:

- Gráficos de Momentos flectores y torsores (acciones internas)



- Determinación de la sección más peligrosa (una o varias secciones)
En este caso por simple observación se logra comprender que la sección más peligrosa corresponde al empotramiento, que es donde aparecen los mayores valores de flexión y torsión, siendo la sección transversal idéntica para todas las barra que componen el pórtico.
- Determinación del punto más peligroso (uno o varios puntos).



Como se observa los puntos A y B son los más peligrosos por encontrarse en la periferia (torsión en sección circular) y por ser los más alejados de la LN (flexión). Ambos puntos son igualmente peligrosos. Siendo la única diferencia que el punto A está en la zona de compresión y el B en la zona de tracción (se observa de los datos que el material tiene el mismo esfuerzo límite en tracción y compresión).

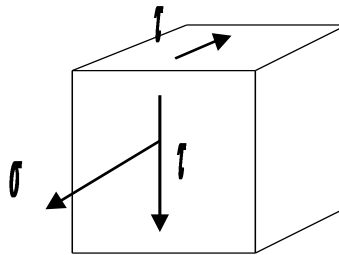
Será analizado el punto B.

- Determinación de los valores de los esfuerzos.

$$\sigma = \frac{M_f}{W_f} = \frac{M_y}{W_y} = \frac{3Pa}{0.1d^3}$$

$$\tau = \frac{M_T}{W_T} = \frac{4Pa}{0.2d^3}$$

- Estado tensional del punto más peligroso (en este caso punto B)



- Selección del criterio de resistencia a aplicar
En el caso estudiado el material es dúctil (dato) y $k = 1$, por lo tanto será aplicado el criterio de Huber & Mises.
- Determinación del esfuerzo equivalente.

$$\sigma_{equi} = \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \sqrt{(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_1 - \sigma_3)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2}$$

$$\sigma_{equi} = \sqrt{\sigma^2 + 3\tau^2}$$

$$\sigma_{equi} = \sqrt{\left(\frac{3Pa}{0.1d^3}\right)^2 + 3\left(\frac{4Pa}{0.2d^3}\right)^2}$$

$$\sigma_{equi} = 46 \frac{Pa}{d^3}$$

En caso necesario, de acuerdo a lo que se solicite en el problema, puede realizarse la comprobación de la resistencia o el cálculo de algún parámetro necesario partiendo de esta condición.

Finalmente puede establecerse una metodología de solución para este tipo de problemas partiendo de los pasos vistos en este ejemplo:

METODOLOGÍA DE SOLUCIÓN:

- 1. Análisis físico del problema**
- 2. Construcción de gráficos de acciones internas**
- 3. Determinación de la sección más peligrosa (una o varias)**
- 4. Determinación del punto más peligroso (uno o varios)**
- 5. Determinación de valores de esfuerzos**
- 6. Estado tensional del punto más peligroso**
- 7. Selección del criterio de resistencia a aplicar**
- 8. Determinación de esfuerzo equivalente**
- 9. Aplicación de la condición de resistencia**

Esta metodología trata de abarcar todas las opciones posibles en la solución de este tipo de problemas y debe ser aplicada teniendo en cuenta que en dependencia de las características del problema estudiado la misma pudiera simplificarse o adaptarse a las condiciones que se necesiten.

7.3 Conclusiones

A partir de la metodología propuesta es posible realizar el análisis de resistencia en los casos más complejos para las condiciones impuestas en la Resistencia de Materiales. El estudiante debe ser cuidadoso en el análisis inicial o análisis físico, ya que de esto dependen una serie de aspectos que pudieran ser decisivos en el éxito de la comprobación o cálculo para este tipo de problemas.

En esta solución se integran una gran cantidad de conocimientos, algunos de los cuales fueron impartidos en otras asignaturas, como por ejemplo Mecánica Teórica, por lo que se recomienda la actualización de estos como una herramienta fundamental en las soluciones que se desean.

PREGUNTAS TEORICAS TEMA VI. RESISTENCIA DE MATERIALES I

- 1. ¿Qué usted entiende por CASO GENRAL DE TENSIONES O RESISTENCIA COMPUESTA?**
- 2. Plantee la metodología propuesta para la solución de problemas de Resistencia Compuesta y explique brevemente el objetivo de cada paso de esta.**